第 3 章

行列式

3.1　行列式の定義と性質

行列式の導入

次の連立 1 次方程式を消去法で解いてみよう．

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \cdots ① \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \cdots ② \end{cases}$$

$① \times a_{22} - ② \times a_{12}$ を計算すると

$$(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_1 = a_{22}b_1 - a_{12}b_2.$$

また $② \times a_{11} - ① \times a_{21}$ を計算すると

$$(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_2 = a_{11}b_2 - a_{21}b_1.$$

よって

$$a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0 \tag{1}$$

ならば，解

$$x_1 = \frac{a_{22}b_1 - a_{12}b_2}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}, \quad x_2 = \frac{a_{11}b_2 - a_{21}b_1}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}$$

を得る．

同じようにして，連立 1 次方程式

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases}$$

を考えると

$$a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31} \neq 0 \tag{2}$$

のとき，解を表す式が得られることがわかる．

(1) の左辺を $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$，(2) の左辺を $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$ と表し，それぞれ 2 次の行列式，3 次の行列式という．

順列

n 個の数 $1, 2, \cdots, n$ を任意の順序で 1 列に並べたものを n 次の順列といい，$(p_1 p_2 \cdots p_n)$ で表す．n 次の順列は全部で $n!$ 個ある．

$(p_1 p_2 \cdots p_n)$ を順列とする．各 $p_i\ (i = 1, 2, \cdots, n-1)$ に対し，p_i の右側にある数 $p_{i+1}, \cdots, p_n$ のうち p_i より小さい数の個数を k_i とおく．また $k_n = 0$ とする．このとき和 $k_1 + k_2 + \cdots + k_{n-1}$ を順列 $(p_1 p_2 \cdots p_n)$ の転倒数という．

順列 $(p_1 p_2 \cdots p_n)$ の転倒数が偶数のとき $(p_1 p_2 \cdots p_n)$ は偶順列，転倒数が奇数のとき奇順列であるという．このとき順列の符号 $\varepsilon(p_1 p_2 \cdots p_n)$ を

$$\varepsilon(p_1 p_2 \cdots p_n) = \begin{cases} 1 & ((p_1 p_2 \cdots p_n) \text{ が偶順列のとき}) \\ -1 & ((p_1 p_2 \cdots p_n) \text{ が奇順列のとき}) \end{cases}$$

によって定める．

例．　4 次の順列 (2143) について，$k_1 = 1, k_2 = 0, k_3 = 1$ だから転倒数は $1 + 0 + 1 = 2$．よって (2143) は偶順列である．

定理 1．　順列の隣同士の数を入れ換えると，順列の符号が変わる：

$$\varepsilon(p_1 \cdots p_i p_{i+1} \cdots p_n) = -\varepsilon(p_1 \cdots p_{i+1} p_i \cdots p_n).$$

行列式の定義

正方行列

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & \cdots\cdots\cdots\cdots & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

に対し，その成分によって定義される式

$$\sum \varepsilon(p_1 p_2 \cdots p_n) a_{1p_1} a_{2p_2} \cdots a_{np_n}$$

を A の行列式 (determinant) という．A が n 次のとき，その行列式を n 次の行列式という．ここで $\sum$ は n 次の順列 $(p_1 p_2 \cdots p_n)$ すべてについて和をとる

ことを表す．A の行列式は

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & \cdots\cdots\cdots\cdots & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

で表し，略して $|A|, \det A$ とも書く．

例．　1 次と 2 次の行列式はそれぞれ次のようになる:

$$|a_{11}| = a_{11}, \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \varepsilon(12)a_{11}a_{22} + \varepsilon(21)a_{12}a_{21} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

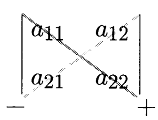
また，3 次の行列式は

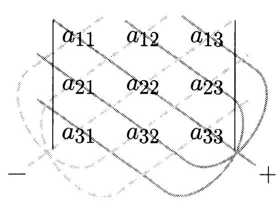
$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \varepsilon(123)a_{11}a_{22}a_{33} + \varepsilon(231)a_{12}a_{23}a_{31} + \varepsilon(312)a_{13}a_{21}a_{32}$$

$$+ \varepsilon(132)a_{11}a_{23}a_{32} + \varepsilon(213)a_{12}a_{21}a_{33} + \varepsilon(321)a_{13}a_{22}a_{31}$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}$$

となり，これらは先に述べた定義と一致する．2 次と 3 次の行列式は次のたすき掛けの方法で記憶すると便利である．なお，4 次以上の行列式にはこの方法は適用できない．





行列式の性質

定理 2.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & \cdots\cdots\cdots\cdots & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & \cdots & \\ a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

定理2より，特に次の式が成り立つことがわかる．

$$\begin{vmatrix} a_{11} & & & 0 \\ a_{21} & a_{22} & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & & \ddots & \vdots \\ 0 & & & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$$

定理 3.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \multicolumn{4}{c}{\cdots\cdots\cdots\cdots} \\ \lambda a_{i1} & \lambda a_{i2} & \cdots & \lambda a_{in} \\ \multicolumn{4}{c}{\cdots\cdots\cdots\cdots} \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \lambda \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \multicolumn{4}{c}{\cdots\cdots\cdots\cdots} \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \multicolumn{4}{c}{\cdots\cdots\cdots\cdots} \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

定理 4.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \multicolumn{4}{c}{\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots} \\ a_{i1}+b_{i1} & a_{i2}+b_{i2} & \cdots & a_{in}+b_{in} \\ \multicolumn{4}{c}{\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots} \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \multicolumn{4}{c}{\cdots\cdots\cdots\cdots} \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \multicolumn{4}{c}{\cdots\cdots\cdots\cdots} \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \multicolumn{4}{c}{\cdots\cdots\cdots\cdots} \\ b_{i1} & b_{i2} & \cdots & b_{in} \\ \multicolumn{4}{c}{\cdots\cdots\cdots\cdots} \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

定理 5.　2つの行を入れ換えると行列式の符号が変わる:

$$\begin{vmatrix} \multicolumn{4}{c}{\cdots\cdots\cdots} \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \multicolumn{4}{c}{\cdots\cdots\cdots} \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \multicolumn{4}{c}{\cdots\cdots\cdots} \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} \multicolumn{4}{c}{\cdots\cdots\cdots} \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \multicolumn{4}{c}{\cdots\cdots\cdots} \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \multicolumn{4}{c}{\cdots\cdots\cdots} \end{vmatrix}$$

定理 6.　2つの行が一致すれば，行列式の値は0である．

定理 7. 1つの行に他の行の定数倍を加えても行列式の値は変わらない:

$$\begin{vmatrix} \multicolumn{4}{c}{\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots} \\ a_{i1}+\lambda a_{j1} & a_{i2}+\lambda a_{j2} & \cdots & a_{in}+\lambda a_{jn} \\ \multicolumn{4}{c}{\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots} \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \multicolumn{4}{c}{\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \multicolumn{4}{c}{\cdots\cdots\cdots} \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \multicolumn{4}{c}{\cdots\cdots\cdots} \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \multicolumn{4}{c}{\cdots\cdots\cdots} \end{vmatrix}$$

定理 8. 行と列を入れ換えても行列式の値は変わらない:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \multicolumn{4}{c}{\cdots\cdots\cdots\cdots} \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \multicolumn{4}{c}{\cdots\cdots\cdots} \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

定理8より，行列式の行に関する性質 (定理3〜定理7) は列に対しても同様に成り立つ.

定理 9 (積の行列式). n 次正方行列 A, B に対して，次の等式が成り立つ.

$$|AB| = |A|\,|B|$$

行列式の幾何学的意味

平面上の点 O を始点とする 2 つのベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OA}} = (a, b), \overrightarrow{\mathrm{OB}} = (c, d)$ のつくる平行四辺形の面積 S は 2 次正方行列 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ の行列式の絶対値 $|\det A|$ に他ならない:

$$S = |ad - bc| = |\det A|.$$

一方，空間の点 O を始点とする 3 つのベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OA}} = \boldsymbol{a} = (a_1, a_2, a_3)$, $\overrightarrow{\mathrm{OB}} = \boldsymbol{b} = (b_1, b_2, b_3)$, $\overrightarrow{\mathrm{OC}} = \boldsymbol{c} = (c_1, c_2, c_3)$ について，$\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ が右手系 (左手系) をなす条件は 3 次正方行列 $A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix}$ の行列式 $\det A$ が正 (負) であることである. また，ベクトル $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ のつくる平行六面体の体積 V は行列 A の行列式の絶対値 $|\det A|$ に他ならない:

$$V = |\boldsymbol{a} \cdot (\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c})| = |\det A|.$$

例題 1.

$\boldsymbol{a} = (a_1, a_2, a_3)$, $\boldsymbol{b} = (b_1, b_2, b_3)$, $\boldsymbol{c} = (c_1, c_2, c_3)$ とする．このとき

$$(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) \cdot \boldsymbol{c} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

を示せ．また，$(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) \cdot \boldsymbol{a} = 0$ を示せ．

解答

$$\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = (a_2b_3 - a_3b_2,\ a_3b_1 - a_1b_3,\ a_1b_2 - a_2b_1)$$

だから

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) \cdot \boldsymbol{c} &= (a_2b_3 - a_3b_2)c_1 + (a_3b_1 - a_1b_3)c_2 + (a_1b_2 - a_2b_1)c_3 \\ &= a_1b_2c_3 + a_2b_3c_1 + a_3b_1c_2 - a_1b_3c_2 - a_2b_1c_3 - a_3b_2c_1 \\ &= \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}.\end{aligned}$$

次に定理6より

$$(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) \cdot \boldsymbol{a} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \end{vmatrix} = 0.$$

例題 2.

次の行列式を計算せよ．

$$\varDelta = \begin{vmatrix} -1 & -4 & 5 & 1 \\ 1 & 3 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 4 & 3 \\ 2 & -4 & 3 & -4 \end{vmatrix}$$

解答　2行に1行を，3行と4行に1行の2倍をそれぞれ加えると

$$\varDelta = \begin{vmatrix} -1 & -4 & 5 & 1 \\ 0 & -1 & 4 & 3 \\ 0 & -9 & 14 & 5 \\ 0 & -12 & 13 & -2 \end{vmatrix} = (-1)\begin{vmatrix} -1 & 4 & 3 \\ -9 & 14 & 5 \\ -12 & 13 & -2 \end{vmatrix}$$

さらに2行に1行の (-9) 倍，3行に1行の (-12) 倍をそれぞれ加えると

$$\varDelta = (-1)\begin{vmatrix} -1 & 4 & 3 \\ 0 & -22 & -22 \\ 0 & -35 & -38 \end{vmatrix} = (-1)^2 \begin{vmatrix} -22 & -22 \\ -35 & -38 \end{vmatrix}$$

1行から (-22) を，2行から (-1) をそれぞれくくり出すと

$$\varDelta = (-1)^2 \cdot (-22)(-1)\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 35 & 38 \end{vmatrix} = (-1)^4\, 22(38-35) = 66.$$

例題 3.

次の行列式を因数分解せよ．

$$\varDelta = \begin{vmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{vmatrix}$$

解答　1行に2行と3行を加えて，1行から $(a+b+c)$ をくくり出すと

$$\varDelta = \begin{vmatrix} a+b+c & a+b+c & a+b+c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{vmatrix} = (a+b+c)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ c & a & b \\ b & c & a \end{vmatrix}$$

2列と3列に1列の (-1) 倍をそれぞれ加えて，直接展開すると

$$\begin{aligned} \varDelta &= (a+b+c)\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ c & a-c & b-c \\ b & c-b & a-b \end{vmatrix} \\ &= (a+b+c)\begin{vmatrix} a-c & b-c \\ c-b & a-b \end{vmatrix} \\ &= (a+b+c)\{(a-c)(a-b)-(b-c)(c-b)\} \\ &= (a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca). \end{aligned}$$

A

1.　次の順列の転倒数を求め，偶順列か奇順列かを判定せよ．さらに符号を求めよ．

(1) $(4\ \ 3\ \ 2\ \ 1)$　(2) $(2\ \ 5\ \ 3\ \ 1\ \ 4)$　(3) $(3\ \ 1\ \ 4\ \ 6\ \ 5\ \ 2)$

2.　4次の行列式は，たすき掛けの方法では求められない．その理由を行列式の定義に戻り説明せよ．

3.　次の行列式の値を求めよ．

(1) $\begin{vmatrix} 5 & -9 \\ 3 & 7 \end{vmatrix}$　(2) $\begin{vmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{vmatrix}$　(3) $\begin{vmatrix} 5 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 4 & 1 & 3 \end{vmatrix}$

(4) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 3 & 1 & 2 \\ -1 & 5 & 1 \end{vmatrix}$　(5) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix}$　(6) $\begin{vmatrix} 20 & 33 & -30 \\ -20 & -11 & 0 \\ 70 & 55 & 70 \end{vmatrix}$

(7) $\begin{vmatrix} 123 & 122 & 124 \\ 124 & 123 & 122 \\ 122 & 124 & 123 \end{vmatrix}$　(8) $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 4 & 5 & 0 \\ 6 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$　(9) $\begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$

(10) $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 5 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 5 & 2 \end{vmatrix}$　(11) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 4 & 5 & 6 \end{vmatrix}$　(12) $\begin{vmatrix} \text{\Large 0} & & & & 1 \\ & & & 2 & \\ & & 3 & & \\ & \iddots & & & \\ n & & & & \text{\Large 0} \end{vmatrix}$

4.　次の行列式を因数分解せよ．

(1) $\begin{vmatrix} 1 & a & bc \\ 1 & b & ca \\ 1 & c & ab \end{vmatrix}$　(2) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^3 & b^3 & c^3 \end{vmatrix}$　(3) $\begin{vmatrix} a+3 & -1 & 1 \\ 5 & a-3 & 1 \\ 6 & -6 & a+4 \end{vmatrix}$

(4) $\begin{vmatrix} a+b+2c & a & b \\ c & b+c+2a & b \\ c & a & c+a+2b \end{vmatrix}$　(5) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & a \\ 1 & 1 & a & 1 \\ 1 & a & 1 & 1 \\ a & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$

(6) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ x & a & a & a \\ x & y & b & b \\ x & y & z & c \end{vmatrix}$　(7) $\begin{vmatrix} a & b & c & 0 \\ b & a & 0 & c \\ c & 0 & a & b \\ 0 & c & b & a \end{vmatrix}$　(8) $\begin{vmatrix} a & 0 & 0 & 0 & 0 & p \\ 0 & b & 0 & 0 & q & 0 \\ 0 & 0 & c & r & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r & c & 0 & 0 \\ 0 & q & 0 & 0 & b & 0 \\ p & 0 & 0 & 0 & 0 & a \end{vmatrix}$

5.　(1) $\left|\det\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right|$ はどのような図形の面積を表しているか，図示せよ．

(2) $\left|\det\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\right|$ はどのような立体の体積を表しているか，図示せよ．

6. ベクトル $(2,1,1)$, $(-1,0,2)$, $(-1,2,1)$ で作られる平行六面体を図示し，さらに体積 V を求めよ．

7. 4 点 $\mathrm{O}(0,0,0)$, $\mathrm{A}(1,2,3)$, $\mathrm{B}(4,6,5)$, $\mathrm{C}(2,6,4)$ を頂点とする四面体の体積 V を求めよ．

8. 2 次方程式 $f(x) = ax^2 + 2bx + c = 0$ $(a \neq 0)$ に対して行列式 $\varDelta = -\dfrac{1}{a}\begin{vmatrix} a & 2b & c \\ 2a & 2b & 0 \\ 0 & 2a & 2b \end{vmatrix}$ の符号により，$f(x) = 0$ の解の様子が変わることを示せ．

9. (1) 正則行列 A の逆行列の行列式を求めよ．

(2) 奇数次の交代行列 A の行列式を求めよ．

(3) ${}^tAA = E$ をみたす行列 A（直交行列）の行列式を求めよ．

10. 次の行列式 $\varDelta$ を求めよ．

$$\varDelta = \left|\begin{array}{ccc:c} & O & & E_n \\ \hdashline 2 & 0 & 0 & \\ 0 & 2 & 0 & O \\ 0 & 0 & 2 & \end{array}\right|$$

B

1. 次の等式を示せ．

(1) $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ x_1 & x_2 \end{vmatrix} = x_2 - x_1$

(2) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 \end{vmatrix} = (x_2 - x_1)(x_3 - x_1)(x_3 - x_2)$

(3) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & \cdots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 & \cdots & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & x_3^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} = \displaystyle\prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_j - x_i)$

2.　次の行列式の値を求めよ．

(1) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 3 \\ 4 & 1 & 1 & 9 \\ 8 & 1 & -1 & 27 \end{vmatrix}$　(2) $\begin{vmatrix} 99 & 99^3 & 99^2 \\ 100 & 100^3 & 100^2 \\ 101 & 101^3 & 101^2 \end{vmatrix}$

3.　次の行列式を因数分解せよ．

(1) $\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ b & a & d & c \\ c & d & a & b \\ d & c & b & a \end{vmatrix}$　(2) $\begin{vmatrix} a & -b & -a & b \\ b & a & -b & -a \\ c & -d & c & -d \\ d & c & d & c \end{vmatrix}$

4.　A を m 次正方行列，B を n 次正方行列とするとき，次が成り立つことを示せ．

$$\begin{vmatrix} A & O \\ C & B \end{vmatrix} = |A||B|, \quad \begin{vmatrix} A & D \\ O & B \end{vmatrix} = |A||B|$$

5.

$$p_ip_j + q_iq_j + r_ir_j + s_is_j = \begin{cases} 1 & (i = j) \\ 0 & (i \neq j) \end{cases} \quad (i, j = 1, 2, 3, 4) \text{ のとき}$$

$$\begin{vmatrix} p_1 & q_1 & r_1 & s_1 \\ p_2 & q_2 & r_2 & s_2 \\ p_3 & q_3 & r_3 & s_3 \\ p_4 & q_4 & r_4 & s_4 \end{vmatrix} = \pm 1$$

を示せ．

6.　A, B を n 次正方行列とするとき，次を示せ．

(1) $\begin{vmatrix} A & B \\ B & A \end{vmatrix} = |A+B||A-B|$

(2) $\begin{vmatrix} A & -B \\ B & A \end{vmatrix} = |A+iB||A-iB|$　(i は虚数単位)

特に A, B の成分がすべて実数のとき

$$\begin{vmatrix} A & -B \\ B & A \end{vmatrix} = (|A+iB| \text{ の絶対値})^2$$

A の解答

1. (1) 転倒数 6，偶順列，$\varepsilon(4\ 3\ 2\ 1) = 1$.

(2) 転倒数 5，奇順列，$\varepsilon(2\ 5\ 3\ 1\ 4) = -1$.

(3) 転倒数 6，偶順列，$\varepsilon(3\,1\,4\,6\,5\,2) = 1$.

2. $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix}$ の展開式における項 $a_4b_3c_2d_1$ の係数は A の 1(1) より $+1$ である．ところがたすき掛けのような考え方で求めようとすると，この項の係数を -1 と誤解することになり正しい値を求められない．

3. (1) 62　(2) 1　(3) 30　(4) 45　(5) -18　(6) 40700　(7) 1107

$\begin{vmatrix} 123 & 122 & 124 \\ 124 & 123 & 122 \\ 122 & 124 & 123 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 369 & 369 & 369 \\ 124 & 123 & 122 \\ 122 & 124 & 123 \end{vmatrix} = 369 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 124 & 123 & 122 \\ 122 & 124 & 123 \end{vmatrix}$ として計算せよ．

(8) 12　(9) 16　(10) -224　(11) 0

(12)

$$
\begin{vmatrix} 0 & & & & 1 \\ & & & 2 & \\ & & 3 & & \\ & \iddots & & & \\ n & & & & 0 \end{vmatrix} = (-1)^{n-1} \begin{vmatrix} n & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & & 2 & 0 \\ \vdots & \vdots & \iddots & & \vdots \\ 0 & n-1 & \cdots & \cdots & 0 \end{vmatrix}
$$

$$
= (-1)^{n-1}(-1)^{n-2} \begin{vmatrix} n & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & n-1 & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & & 1 \\ \vdots & \vdots & & \iddots & 0 \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ 0 & 0 & n-2 & \cdots & 0 \end{vmatrix}
$$

$$
= \cdots = (-1)^{(n-1)+(n-2)+\cdots+1} \begin{vmatrix} n & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & n-1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & 2 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & 1 \end{vmatrix}
$$

$$
= (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} n!
$$

4. (1)

$$\begin{vmatrix} 1 & a & bc \\ 1 & b & ca \\ 1 & c & ab \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & a & bc \\ 0 & b-a & c(a-b) \\ 0 & c-a & b(a-c) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b-a & c(a-b) \\ c-a & b(a-c) \end{vmatrix}$$

$$= (a-b)(c-a)\begin{vmatrix} -1 & c \\ 1 & -b \end{vmatrix} = (a-b)(b-c)(c-a)$$

(2)

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^3 & b^3 & c^3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & b-a & c-a \\ a^3 & b^3-a^3 & c^3-a^3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b-a & c-a \\ b^3-a^3 & c^3-a^3 \end{vmatrix}$$

$$= (b-a)(c-a)\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ b^2+ba+a^2 & c^2+ca+a^2 \end{vmatrix}$$

$$= (a-b)(b-c)(c-a)(a+b+c)$$

(3)

$$\begin{vmatrix} a+3 & -1 & 1 \\ 5 & a-3 & 1 \\ 6 & -6 & a+4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a+2 & -1 & 1 \\ a+2 & a-3 & 1 \\ 0 & -6 & a+4 \end{vmatrix} = (a+2)\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & a-3 & 1 \\ 0 & -6 & a+4 \end{vmatrix}$$

$$= (a+2)\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & a-2 & 1 \\ 0 & a-2 & a+4 \end{vmatrix} = (a+2)(a-2)\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & a+4 \end{vmatrix} = (a+2)(a-2)\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & a+4 \end{vmatrix}$$

$$= (a+2)(a-2)(a+4)$$

(4)

$$\begin{vmatrix} a+b+2c & a & b \\ c & b+c+2a & b \\ c & a & c+a+2b \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2a+2b+2c & a & b \\ 2a+2b+2c & b+c+2a & b \\ 2a+2b+2c & a & c+a+2b \end{vmatrix}$$

$$= (2a+2b+2c)\begin{vmatrix} 1 & a & b \\ 1 & b+c+2a & b \\ 1 & a & c+a+2b \end{vmatrix} = (2a+2b+2c)\begin{vmatrix} 1 & a & b \\ 0 & b+c+a & 0 \\ 0 & 0 & a+b+c \end{vmatrix}$$

$$= 2(a+b+c)^3$$

(5)

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & a \\ 1 & 1 & a & 1 \\ 1 & a & 1 & 1 \\ a & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a+3 & a+3 & a+3 & a+3 \\ 1 & 1 & a & 1 \\ 1 & a & 1 & 1 \\ a & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (a+3)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a & 1 \\ 1 & a & 1 & 1 \\ a & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= (a+3)\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & a-1 & 1 \\ 0 & a-1 & 0 & 1 \\ a-1 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (a+3)(-1)^3\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & a-1 \\ 1 & 0 & a-1 & 0 \\ 1 & a-1 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= -(a+3)\begin{vmatrix} 0 & 0 & a-1 \\ 0 & a-1 & 0 \\ a-1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = (a-1)^3(a+3)$$

(6)

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ x & a & a & a \\ x & y & b & b \\ x & y & z & c \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ x & a-x & a-x & a-x \\ x & y-x & b-x & b-x \\ x & y-x & z-x & c-x \end{vmatrix}$$

$$= (a-x)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ y-x & b-x & b-x \\ y-x & z-x & c-x \end{vmatrix} = (a-x)\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ y-x & b-y & b-y \\ y-x & z-y & c-y \end{vmatrix}$$

$$= (a-x)(b-y)\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ z-y & c-y \end{vmatrix} = (a-x)(b-y)(c-z).$$

(7)

$$\begin{vmatrix} a & b & c & 0 \\ b & a & 0 & c \\ c & 0 & a & b \\ 0 & c & b & a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a+b+c & a+b+c & a+b+c & a+b+c \\ b & a & 0 & c \\ c & 0 & a & b \\ 0 & c & b & a \end{vmatrix}$$

$$= (a+b+c)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ b & a & 0 & c \\ c & 0 & a & b \\ 0 & c & b & a \end{vmatrix} = (a+b+c)\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ b & a-b & -b & c-b \\ c & -c & a-c & b-c \\ 0 & c & b & a \end{vmatrix}$$

$$= (a+b+c)\begin{vmatrix} a-b & -b & c-b \\ -c & a-c & b-c \\ c & b & a \end{vmatrix} = (a+b+c)\begin{vmatrix} a-b-c & a-b-c & 0 \\ -c & a-c & b-c \\ c & b & a \end{vmatrix}$$

$$= (a+b+c)\begin{vmatrix} a-b-c & a-b-c & 0 \\ 0 & a+b-c & a+b-c \\ c & b & a \end{vmatrix}$$

$$= (a+b+c)(a-b-c)(a+b-c)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ c & b & a \end{vmatrix}$$

$$= (a+b+c)(a-b-c)(a+b-c)(a-b+c)$$

$$= -(a+b+c)(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)$$

(8)

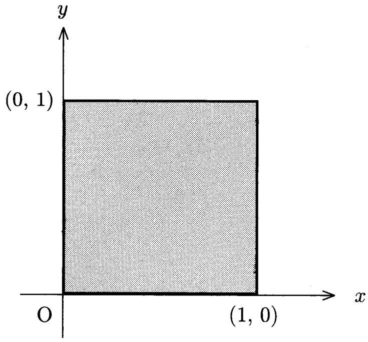
$$\begin{vmatrix} a & 0 & 0 & 0 & 0 & p \\ 0 & b & 0 & 0 & q & 0 \\ 0 & 0 & c & r & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r & c & 0 & 0 \\ 0 & q & 0 & 0 & b & 0 \\ p & 0 & 0 & 0 & 0 & a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a-p & 0 & 0 & 0 & 0 & p-a \\ 0 & b-q & 0 & 0 & q-b & 0 \\ 0 & 0 & c-r & r-c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r & c & 0 & 0 \\ 0 & q & 0 & 0 & b & 0 \\ p & 0 & 0 & 0 & 0 & a \end{vmatrix}$$

$$= (a-p)(b-q)(c-r)\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r & c & 0 & 0 \\ 0 & q & 0 & 0 & b & 0 \\ p & 0 & 0 & 0 & 0 & a \end{vmatrix}$$

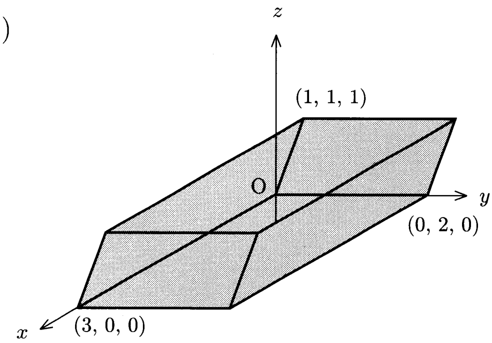
$$= (a-p)(b-q)(c-r)\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r & c+r & 0 & 0 \\ 0 & q & 0 & 0 & b+q & 0 \\ p & 0 & 0 & 0 & 0 & a+p \end{vmatrix}$$

$$= (a-p)(b-q)(c-r)(a+p)(b+q)(c+r)$$

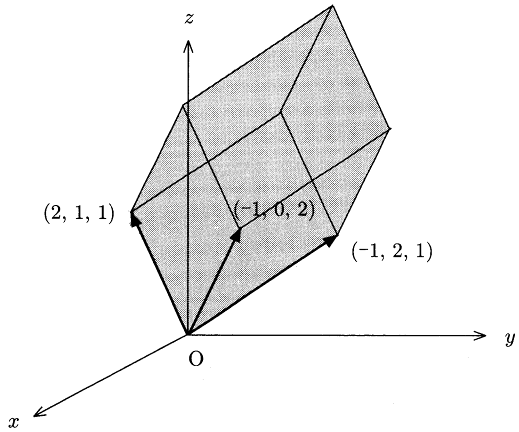
5. (1)



(2)



6.



$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -11 \text{ より，} V = |-11| = 11.$$

7.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 6 & 5 \\ 2 & 6 & 4 \end{vmatrix} = 18 \text{ より，} V = \frac{1}{6} \cdot 18 = 3.$$

8. $\varDelta = -\dfrac{1}{a}\begin{vmatrix} a & 2b & c \\ 2a & 2b & 0 \\ 0 & 2a & 2b \end{vmatrix} = 4(b^2 - ac)$ は 2 次方程式 $f(x) = 0$ の判別式である．

9. (1) $AA^{-1} = E$ より $|A| \cdot |A^{-1}| = 1$ 　　$\therefore$ 　$|A^{-1}| = \dfrac{1}{|A|}$.

(2) ${}^tA = -A$ より $|A| = |{}^tA| = (-1)^n|A|$, $\{1 - (-1)^n\}|A| = 0$.

n は奇数だから $|A| = 0$.

(3) $|{}^tA| \cdot |A| = |A|^2 = 1$ 　$\therefore$ 　$|A| = \pm 1$.

10.

$$\varDelta = (-1)^n 2 \left| \begin{array}{cc:c} \multicolumn{2}{c:}{O} & E_n \\ \hdashline 2 & 0 & \\ 0 & 2 & O \end{array} \right| = (-1)^{2n} 2^2 \left| \begin{array}{c:c} O & E_n \\ \hdashline 2 & O \end{array} \right|$$

$$= (-1)^{3n} 2^3 |E_n| = (-1)^n 2^3 = \begin{cases} 8 & (n = \text{偶数}) \\ -8 & (n = \text{奇数}) \end{cases}$$

B の解答

1. (1),(2) は省略する．

(3) 左辺の行列式で $x_i = x_j$ $(i \neq j)$ とおくと第 i 列と第 j 列が一致するから，行列式の値は 0．よって $(x_j - x_i)$ $(i < j)$ で割り切れる．したがって，$\displaystyle\prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_j - x_i)$ でも割り切れる．両辺とも $1 + 2 + \cdots + (n-1) = \dfrac{n(n-1)}{2}$ 次の多項式だから，定数 k があって 左辺 $= k \displaystyle\prod_{1 \leq i < j \leq m} (x_j - x_i)$．行列式の中で対角成分の積を考えると両辺における $x_2 \cdot x_3^2 \cdot \cdots \cdot x_n^{n-1}$ の係数はどちらも 1 だから $k = 1$．

2. B の 1 を利用する．(1) -48．

(2)

$$\begin{vmatrix} 99 & 99^3 & 99^2 \\ 100 & 100^3 & 100^2 \\ 101 & 101^3 & 101^2 \end{vmatrix} = (-99) \cdot 100 \cdot 101 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 99 & 100 & 101 \\ 99^2 & 100^2 & 101^2 \end{vmatrix}$$

$$= -1999800.$$

3. (1)

$$\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ b & a & d & c \\ c & d & a & b \\ d & c & b & a \end{vmatrix} = (a+b+c+d) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ b & a & d & c \\ c & d & a & b \\ d & c & b & a \end{vmatrix}$$

$$= (a+b+c+d) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ b & a-b & d-b & c-b \\ c & d-c & a-c & b-c \\ d & c-d & b-d & a-d \end{vmatrix}$$

$$
= (a+b+c+d)\begin{vmatrix} a-b & d-b & c-b \\ d-c & a-c & b-c \\ c-d & b-d & a-d \end{vmatrix}
$$

$$
= (a+b+c+d)\begin{vmatrix} a-b & d-b & c-b \\ a-b-c+d & a-b-c+d & 0 \\ a-b+c-d & 0 & a-b+c-d \end{vmatrix}
$$

$$
= (a+b+c+d)(a-b-c+d)(a-b+c-d)\begin{vmatrix} a-b & d-b & c-b \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}
$$

$$
= (a+b+c+d)(a-b-c+d)(a-b+c-d)(a+b-c-d)
$$

(2)

$$
\begin{vmatrix} a & -b & -a & b \\ b & a & -b & -a \\ c & -d & c & -d \\ d & c & d & c \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & -b & 0 & 0 \\ b & a & 0 & 0 \\ c & -d & 2c & -2d \\ d & c & 2d & 2c \end{vmatrix} = 4\begin{vmatrix} a & -b & 0 & 0 \\ b & a & 0 & 0 \\ c & -d & c & -d \\ d & c & d & c \end{vmatrix}
$$

$$
\overset{(*)}{=} 4\begin{vmatrix} a & -b \\ b & a \end{vmatrix}\begin{vmatrix} c & -d \\ d & c \end{vmatrix} = 4(a^2+b^2)(c^2+d^2)
$$

（注：$(*)$ ではBの4の結果を使った.）

4. $\begin{vmatrix} A & O \\ C & B \end{vmatrix} = |A||B|$ を示す．$N = m+n$ とし，$\begin{vmatrix} A & O \\ C & B \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots\cdots & a_{1N} \\ \vdots & & \vdots \\ \vdots & & \vdots \\ a_{N1} & \cdots\cdots & a_{nN} \end{vmatrix}$

とおくと定義から

$$
(*) \qquad \begin{vmatrix} A & O \\ C & B \end{vmatrix} = \sum_{(p_1\cdots p_N)} \varepsilon(p_1p_2\cdots p_N)\, a_{1p_1}\cdots a_{mp_m}a_{m+1p_{m+1}}\cdots a_{Np_N}
$$

である．仮定より $a_{ij} = 0$ $(i = 1,2,\cdots,m;\ j = m+1,\cdots N)$ だから $p_1,\cdots,p_m$ の中に m より大きい数があれば

$$
a_{1p_1}\cdots a_{mp_m}a_{m+1p_{m+1}}\cdots a_{Np_N} = 0.
$$

よって $(*)$ の右辺の順列 $(p_1\cdots p_N)$ についての和は $(p_1\cdots p_m)$ が $1,2,\cdots,m$ の順列となっているもののみで取ればよい．このとき $(p_{m+1}\cdots p_N)$ は $m+1,\cdots,N$ の順列である．したがって $\varepsilon(p_1\cdots p_N) = \varepsilon(p_1\cdots p_m)\varepsilon(p_{m+1}\cdots p_N)$

となることに注意すれば

$$\begin{vmatrix} A & O \\ C & B \end{vmatrix} = \sum_{(p_1\cdots p_m)} \sum_{(p_{m+1}\cdots p_N)} \varepsilon(p_1\cdots p_m)\varepsilon(p_{m+1}\cdots p_N)$$

$$\times\, a_{1p_1}\cdots a_{mp_m}a_{m+1p_{m+1}}\cdots a_{Np_N}$$

$$= \left(\sum_{(p_1\cdots p_m)} \varepsilon(p_1\cdots p_m)a_{1p_1}\cdots a_{mp_m}\right)$$

$$\times \left(\sum_{(p_{m+1}\cdots p_N)} \varepsilon(p_{m+1}\cdots p_N)a_{m+1p_{m+1}}\cdots a_{Np_N}\right)$$

$$= |A||B|.$$

等式 $\begin{vmatrix} A & D \\ O & B \end{vmatrix} = |A||B|$ の証明については，行列を転置して考えればよい．

5. $A = \begin{pmatrix} p_1 & q_1 & r_1 & s_1 \\ p_2 & q_2 & r_2 & s_2 \\ p_3 & q_3 & r_3 & s_3 \\ p_4 & q_4 & r_4 & s_4 \end{pmatrix}$ とすると

$$A\,{}^tA = \begin{pmatrix} p_1 & q_1 & r_1 & s_1 \\ p_2 & q_2 & r_2 & s_2 \\ p_3 & q_3 & r_3 & s_3 \\ p_4 & q_4 & r_4 & s_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_1 & p_2 & p_3 & p_4 \\ q_1 & q_2 & q_3 & q_4 \\ r_1 & r_2 & r_3 & r_4 \\ s_1 & s_2 & s_3 & s_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\therefore\quad |A\,{}^tA| = |A|\cdot|{}^tA| = |A|^2 = 1 \qquad \therefore\quad |A| = \pm 1$$

6. B の 4 を用いる．

(1) $\begin{vmatrix} A & B \\ B & A \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A+B & A+B \\ B & A \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A+B & O \\ B & A-B \end{vmatrix}$

$= |A+B||A-B|$.

(2) $\begin{vmatrix} A & -B \\ B & A \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A+iB & -B+iA \\ B & A \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A+iB & O \\ B & A-iB \end{vmatrix}$

$= |A+iB||A-iB|$.

3.2　余因子展開

行列式の余因子展開

n 次正方行列 A から第 i 行と第 j 列を取り除いて得られる $n-1$ 次正方行列を A_{ij} と表す．また $\tilde{a}_{ij} = (-1)^{i+j}|A_{ij}|$ とおき，$\tilde{a}_{ij}$ を a_{ij} の余因子という．

例． $A = \begin{pmatrix} 1 & 6 & 5 \\ 0 & 3 & 4 \\ 2 & 8 & 7 \end{pmatrix}$ に対して

$$|A_{23}| = \begin{vmatrix} 1 & 6 \\ 2 & 8 \end{vmatrix} = -4, \quad \tilde{a}_{23} = (-1)^5 \cdot (-4) = 4.$$

定理 1.　n 次正方行列 $A = (a_{ij})$ の行列式 $|A|$ は次のように余因子展開される．

(1) $|A| = a_{i1}\tilde{a}_{i1} + a_{i2}\tilde{a}_{i2} + \cdots + a_{in}\tilde{a}_{in}$　(第 i 行に関する展開)

(2) $|A| = a_{1j}\tilde{a}_{1j} + a_{2j}\tilde{a}_{2j} + \cdots + a_{nj}\tilde{a}_{nj}$　(第 j 列に関する展開)

定理 2.　n 次正方行列 $A = (a_{ij})$ に対して，次の (1)，(2) が成り立つ．

(1) $a_{i1}\tilde{a}_{j1} + a_{i2}\tilde{a}_{j2} + \cdots + a_{in}\tilde{a}_{jn} = 0$　($i \neq j$ のとき)

(2) $a_{1i}\tilde{a}_{1j} + a_{2i}\tilde{a}_{2j} + \cdots + a_{ni}\tilde{a}_{nj} = 0$　($i \neq j$ のとき)

余因子行列，正則行列

n 次正方行列 $A = (a_{ij})$ に対し，a_{ij} の余因子 $\tilde{a}_{ij}$ を成分とする行列

$$\begin{pmatrix} \tilde{a}_{11} & \tilde{a}_{12} & \cdots & \tilde{a}_{1n} \\ \tilde{a}_{21} & \tilde{a}_{22} & \cdots & \tilde{a}_{2n} \\ & \cdots\cdots\cdots\cdots & & \\ \tilde{a}_{n1} & \tilde{a}_{n2} & \cdots & \tilde{a}_{nn} \end{pmatrix}$$

の転置行列

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} \tilde{a}_{11} & \tilde{a}_{21} & \cdots & \tilde{a}_{n1} \\ \tilde{a}_{12} & \tilde{a}_{22} & \cdots & \tilde{a}_{n2} \\ & \cdots\cdots\cdots\cdots & & \\ \tilde{a}_{1n} & \tilde{a}_{2n} & \cdots & \tilde{a}_{nn} \end{pmatrix}$$

を A の余因子行列という ($\tilde{A}$ の (i,j) 成分は $\tilde{a}_{ji}$ であることに注意せよ)．

定理 3.　正方行列 A に対し

$$A\tilde{A} = \tilde{A}A = \begin{pmatrix} |A| & & & \text{\Large 0} \\ & |A| & & \\ & & \ddots & \\ \text{\Large 0} & & & |A| \end{pmatrix} = |A|E$$

定理 4.　A が n 次正方行列のとき，次の (1)〜(3) は互いに同値である．

(1) A は正則である．

(2) $|A| \neq 0$.

(3) $\operatorname{rank} A = n$.

さらに A が正則であるとき，A の逆行列 A^{-1} は

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}\tilde{A}$$

で与えられる．

定理 5.　正方行列 A に対し，$BA = E$ となる正方行列 B が存在すれば $AB = E$ が成り立つ．すなわち A は正則で，$B = A^{-1}$ である．$AC = E$ となる C が存在する場合も同様である．

クラメル (Cramer) の公式

$x_1, x_2, \cdots, x_n$ を未知数とする連立 1 次方程式

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \qquad\qquad \cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

を

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & \cdots\cdots & \cdots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

とおいて $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ と表す．もし $|A| \neq 0$ ならば，この連立 1 次方程式はただ 1 組の解をもち，その解は

$$x_j = \frac{|A_j|}{|A|} \quad (j = 1, 2, \cdots n)$$

で与えられる．ここで A_j は A の第 j 列を $\boldsymbol{b}$ で置き換えた行列である:

$$A_j = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & b_1 & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & b_2 & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & b_n & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

注：特に $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{0}$ のとき $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ が非自明解をもつための必要十分条件は $|A| = 0$ である．

例題 1.

第 1 列で展開して，次の行列式を計算せよ．

$$\begin{vmatrix} a & -1 & 0 & 0 \\ b & x & -1 & 0 \\ c & 0 & x & -1 \\ d & 0 & 0 & x \end{vmatrix}$$

解答

$$\begin{vmatrix} a & -1 & 0 & 0 \\ b & x & -1 & 0 \\ c & 0 & x & -1 \\ d & 0 & 0 & x \end{vmatrix} = a\begin{vmatrix} x & -1 & 0 \\ 0 & x & -1 \\ 0 & 0 & x \end{vmatrix} - b\begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & x & -1 \\ 0 & 0 & x \end{vmatrix}$$

$$+ c\begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 \\ x & -1 & 0 \\ 0 & 0 & x \end{vmatrix} - d\begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 \\ x & -1 & 0 \\ 0 & x & -1 \end{vmatrix}$$

$$= ax^3 + bx^2 + cx + d$$

例題 2.

行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & -2 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ が正則か否かを判定し，正則ならばその逆行列を余因子行列を求めることで求めよ．

解答

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & -2 \\ 3 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -18 \neq 0$$

だから A は正則である．

$$\tilde{a}_{11} = \begin{vmatrix} 0 & -2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = -2, \quad \tilde{a}_{21} = -\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = -4, \quad \tilde{a}_{31} = \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} = -4,$$

$$\tilde{a}_{12} = -\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -7, \quad \tilde{a}_{22} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -5, \quad \tilde{a}_{32} = -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = 4,$$

$$\tilde{a}_{13} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = -1, \quad \tilde{a}_{23} = -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = 7, \quad \tilde{a}_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -2$$

より $\tilde{A} = \begin{pmatrix} -2 & -4 & -4 \\ -7 & -5 & 4 \\ -1 & 7 & -2 \end{pmatrix}$，よって $A^{-1} = -\dfrac{1}{18}\begin{pmatrix} -2 & -4 & -4 \\ -7 & -5 & 4 \\ -1 & 7 & -2 \end{pmatrix}$.

例題 3.

クラメルの公式を用いて，次の連立1次方程式を解け.

$$\begin{cases} x + y + \ \ z = \ \ 4 \\ x - y + 2z = -2 \\ 2x \qquad + \ \ z = \ \ 3 \end{cases}$$

解答

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 4 \neq 0$ よりクラメルの公式が使える.

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 4 & 1 & 1 \\ -2 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{7}{4}, \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 1 & -2 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{11}{4},$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 1 & -1 & -2 \\ 2 & 0 & 3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix}} = -\frac{1}{2}.$$

A

1.　行列式 $\begin{vmatrix} 1 & 4 & -7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{vmatrix}$ を第 1 行で展開して計算し，たすき掛けの方法で求めたものと等しくなることを確かめよ．

2.　次の行列式を第 1 行の展開および第 3 列の展開によって求め，値が等しいことを確かめよ．

$$\varDelta = \begin{vmatrix} -1 & 2 & 0 & 1 \\ 4 & 2 & -3 & -2 \\ 1 & -3 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 0 & -3 \end{vmatrix}$$

3.

$$\varDelta = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ x & y & z & u & w \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = ax + by + cz + du + ew$$

とするとき，a, b, c, d, e を求めよ．

4.　余因子展開を利用して，次の行列式を因数分解せよ．

(1) $\begin{vmatrix} 0 & a & b & c \\ -a & 0 & c & b \\ -b & -c & 0 & a \\ -c & -b & -a & 0 \end{vmatrix}$　(2) $\begin{vmatrix} x & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & x & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & x & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & x & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & x \end{vmatrix}$

5.　行列 $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & b & 0 \\ 0 & c & 0 & 0 \\ d & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ の余因子行列 $\tilde{A}$ を求めよ．

また $A\tilde{A} = \tilde{A}A = |A|E$ が成り立つことを確かめよ．

6.　次の行列の余因子行列を求めよ．

(1) $\begin{pmatrix} 100 & 101 & 99 \\ 99 & 100 & 101 \\ 101 & 99 & 100 \end{pmatrix}$　(2) $\begin{pmatrix} a^2 & ab & ac \\ ab & b^2 & bc \\ ac & bc & c^2 \end{pmatrix}$　(3) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \\ 13 & 14 & 15 & 16 \end{pmatrix}$

7.　次の行列の逆行列を余因子行列を利用して求めよ．

$$A = \begin{pmatrix} 2+i & 0 & 2i \\ i & 1-i & 0 \\ 0 & -1-i & -i \end{pmatrix}$$

8.　n 次正方行列 A, B の積 AB が正則ならば，A, B はそれぞれ正則であることを示せ．

9.　次の連立1次方程式をクラメルの公式を用いて解け．

(1) $\begin{cases} 3x-5y=7 \\ 4x+3y=1 \end{cases}$　(2) $\begin{cases} x-3y+3z=9 \\ 3x+4y-5z=-6 \\ 2x+3y-4z=-7 \end{cases}$　(3) $\begin{cases} 2x-3y+5z=1 \\ x-4y+3z=2 \\ 5x-y+4z=0 \end{cases}$

10.　$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 4 & 6 & 5 \\ 7 & 9 & 8 \end{pmatrix}$ とする．

(1) $\det A$ を求めよ．

(2) A^{-1} の $(2,3)$ 成分を求めよ．

(3) クラメルの公式を用いて，連立1次方程式 $A\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 11 \\ 12 \end{pmatrix}$ の解 x_2 を求めよ．

11.　連立1次方程式 $\begin{cases} x+ay-z=1 \\ ax+y-z=1 \\ 3x-4y+2z=-2 \end{cases}$ がただ1つの解をもつための a の条件を求め，そのときこの連立1次方程式を解け．

B

1.

$$F_n = \begin{vmatrix} x & -1 & & & & \\ 0 & x & -1 & & \text{\Large 0} & \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & x & -1 \\ a_0 & \cdots & \cdots & \cdots & a_{n-1} & a_n \end{vmatrix}$$

とおく．

(1) F_n を第 n 列で余因子展開すると F_n と F_{n-1} との関係式が得られる．それを求めよ．

(2) $F_1 = \begin{vmatrix} x & -1 \\ a_0 & a_1 \end{vmatrix} = a_1 x + a_0$ であることから順に F_n を求めよ．

2.　n 次正方行列 A の余因子行列 $\tilde{A}$ について次を示せ．

(1) $|\tilde{A}| = |A|^{n-1}$

(2) $\tilde{\tilde{A}} = |A|^{n-2}A$ （ただし，$n=2$ のとき，$|A|=0$ ならば $0^0=1$ とする．）

3.　連立 1 次方程式

$$\begin{cases} ax_1 + \ x_2 + \ x_3 + \cdots + \ x_n = b \\ x_1 + ax_2 + \ x_3 + \cdots + \ x_n = b \\ x_1 + \ x_2 + ax_3 + \cdots + \ x_n = b \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_1 + \ x_2 + \cdots\cdots\cdots + ax_n = b \end{cases}$$

の係数行列を A とし，$b \neq 0$ とする．このとき

(1) $|A|$ を因数分解せよ．

(2) A が正則であるための a の条件を求めよ．

(3) A が正則であるとき，クラメルの公式より方程式を解け．

(4) A が正則でないとき，方程式の解は存在するか．存在すれば解を求めよ．

A の解答

1. 第 1 行で展開すると

$$\begin{vmatrix} 1 & 4 & -7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & 8 \\ 6 & 9 \end{vmatrix} - 4 \begin{vmatrix} 2 & 8 \\ 3 & 9 \end{vmatrix} - 7 \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{vmatrix} = 42.$$

たすき掛けの方法で計算すると

$$\begin{vmatrix} 1 & 4 & -7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{vmatrix} = 1\cdot5\cdot9 + 4\cdot8\cdot3 + (-7)\cdot2\cdot6 - 1\cdot8\cdot6 - 4\cdot2\cdot9 - (-7)\cdot5\cdot3 = 42.$$

2. 第 1 行による展開

$$\varDelta = (-1)(-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 2 & -3 & -2 \\ -3 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & -3 \end{vmatrix} + 2(-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 4 & -3 & -2 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & -3 \end{vmatrix}$$

$$+ 0\cdot(-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 4 & 2 & -2 \\ 1 & -3 & 2 \\ 1 & 2 & -3 \end{vmatrix} + 1\cdot(-1)^{1+4} \begin{vmatrix} 4 & 2 & -3 \\ 1 & -3 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= -(-12+27) - 2(-6-9) + 0 - (-6-9) = 30.$$

第3列による展開

$$\varDelta = 0\cdot(-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 4 & 2 & -2 \\ 1 & -3 & 2 \\ 1 & 2 & -3 \end{vmatrix} + (-3)(-1)^{2+3}\begin{vmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 1 & -3 & 2 \\ 1 & 2 & -3 \end{vmatrix}$$

$$+ 0\cdot(-1)^{3+3}\begin{vmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 4 & 2 & -2 \\ 1 & 2 & -3 \end{vmatrix} + 0\cdot(-1)^{4+3}\begin{vmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 4 & 2 & -2 \\ 1 & -3 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= 0 + 3(-9+2+4+3+4+6) + 0 + 0 = 30.$$

3. $\varDelta$ を第3行で展開する．

$$\varDelta = x(-1)^{3+1}\begin{vmatrix} -1 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} + y(-1)^{3+2}\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$+ z(-1)^{3+3}\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} + u(-1)^{3+4}\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$+ w(-1)^{3+5}\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 3x + 6y - 6z + 6u - 9w.$$

よって $a = 3, b = 6, c = -6, d = 6, e = -9$.

4. (1)

$$\begin{vmatrix} 0 & a & b & c \\ -a & 0 & c & b \\ -b & -c & 0 & a \\ -c & -b & -a & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a+b+c & a & b & c \\ -a+b+c & 0 & c & b \\ a-b-c & -c & 0 & a \\ -(a+b+c) & -b & -a & 0 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a+b+c & a & b & c \\ -a+b+c & 0 & c & b \\ 0 & -c & c & a+b \\ 0 & a-b & b-a & c \end{vmatrix}$$

$$= (a+b+c)\begin{vmatrix} 0 & c & b \\ -c & c & a+b \\ a-b & b-a & c \end{vmatrix} - (-a+b+c)\begin{vmatrix} a & b & c \\ -c & c & a+b \\ a-b & b-a & c \end{vmatrix}$$

$$= (a+b+c)\begin{vmatrix} c & c & b \\ 0 & c & a+b \\ 0 & b-a & c \end{vmatrix} + (a-b-c)\begin{vmatrix} a+b & b & c \\ 0 & c & a+b \\ 0 & b-a & c \end{vmatrix}$$

$$= (a+b+c)c\{c^2-(a+b)(b-a)\} + (a-b-c)(a+b)\{c^2-(a+b)(b-a)\}$$

$$= (a^2-b^2+c^2)\{(a+b+c)c+(a-b-c)(a+b)\} = (a^2-b^2+c^2)^2$$

(2)

$$\begin{vmatrix} x & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & x & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & x & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & x & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & x \end{vmatrix} = x\begin{vmatrix} x & -1 & 0 & 0 \\ 1 & x & -1 & 0 \\ 0 & 1 & x & -1 \\ 0 & 0 & 1 & x \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & x & -1 & 0 \\ 0 & 1 & x & -1 \\ 0 & 0 & 1 & x \end{vmatrix}$$

$$= x\left\{x\begin{vmatrix} x & -1 & 0 \\ 1 & x & -1 \\ 0 & 1 & x \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & x & -1 \\ 0 & 1 & x \end{vmatrix}\right\} + \begin{vmatrix} x & -1 & 0 \\ 1 & x & -1 \\ 0 & 1 & x \end{vmatrix}$$

$$= x\{x(x^3+2x)+x^2+1\}+(x^3+2x)$$

$$= x(x^4+4x^2+3) = x(x^2+3)(x^2+1)$$

5.

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & abc \\ 0 & 0 & abd & 0 \\ 0 & acd & 0 & 0 \\ bcd & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad |A| = abcd,$$

$$A\tilde{A} = \tilde{A}A = \begin{pmatrix} abcd & 0 & 0 & 0 \\ 0 & abcd & 0 & 0 \\ 0 & 0 & abcd & 0 \\ 0 & 0 & 0 & abcd \end{pmatrix} = |A|E.$$

6. (1) $\begin{pmatrix} 1 & -299 & 301 \\ 301 & 1 & -299 \\ -299 & 301 & 1 \end{pmatrix}$ (2) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ (3) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

7.

$$|A| = \begin{vmatrix} 2+i & 0 & 2i \\ i & 1-i & 0 \\ 0 & -1-i & -i \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2+i & -2-2i & 0 \\ i & 1-i & 0 \\ 0 & -1-i & -i \end{vmatrix}$$

$$= -i \begin{vmatrix} 2+i & -2-2i \\ i & 1-i \end{vmatrix} = 1-i,$$

$$\tilde{a}_{11} = \begin{vmatrix} 1-i & 0 \\ -1-i & -i \end{vmatrix} = -1-i, \quad \tilde{a}_{12} = -\begin{vmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{vmatrix} = -1,$$

$$\tilde{a}_{13} = \begin{vmatrix} i & 1-i \\ 0 & -1-i \end{vmatrix} = 1-i, \quad \tilde{a}_{21} = -\begin{vmatrix} 0 & 2i \\ -1-i & -i \end{vmatrix} = 2-2i,$$

$$\tilde{a}_{22} = \begin{vmatrix} 2+i & 2i \\ 0 & -i \end{vmatrix} = 1-2i, \quad \tilde{a}_{23} = -\begin{vmatrix} 2+i & 0 \\ 0 & -1-i \end{vmatrix} = 1+3i,$$

$$\tilde{a}_{31} = \begin{vmatrix} 0 & 2i \\ 1-i & 0 \end{vmatrix} = -2-2i, \quad \tilde{a}_{32} = -\begin{vmatrix} 2+i & 2i \\ i & 0 \end{vmatrix} = -2,$$

$$\tilde{a}_{33} = \begin{vmatrix} 2+i & 0 \\ i & 1-i \end{vmatrix} = 3-i, \quad \frac{1}{|A|} = \frac{1}{1-i} = \frac{1+i}{2}$$

$$\therefore \quad A^{-1} = \frac{1+i}{2} \begin{pmatrix} -1-i & 2-2i & -2-2i \\ -1 & 1-2i & -2 \\ 1-i & 1+3i & 3-i \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -2i & 4 & -4i \\ -1-i & 3-i & -2-2i \\ 2 & -2+4i & 4+2i \end{pmatrix}$$

8. AB が正則であるから $|AB| \neq 0$. $|A||B| = |AB| \neq 0$ より $|A| \neq 0, |B| \neq 0$ である．よって A, B は正則である．

9.

(1) $x = \dfrac{26}{29}, \quad y = -\dfrac{25}{29}$　(2) $x = 3, \ y = 5, \ z = 7$

(3) $x = \dfrac{1}{36}, \quad y = -\dfrac{23}{36}, \quad z = -\dfrac{7}{36}$

10.

(1) $\det A = -9$

(2) A の余因子行列の $(2,3)$ 成分は $(-1)^{3+2}\det\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} = -6$ だから，

A^{-1} の $(2,3)$ 成分は $\dfrac{-6}{-9} = \dfrac{2}{3}$.

(3)

$$x_2 = \frac{\det\begin{pmatrix} 2 & 10 & 1 \\ 4 & 11 & 5 \\ 7 & 12 & 8 \end{pmatrix}}{\det A} = -\frac{19}{3}.$$

11. 与えられた方程式がただ 1 つの解をもつ条件は

$$\begin{vmatrix} 1 & a & -1 \\ a & 1 & -1 \\ 3 & -4 & 2 \end{vmatrix} = -(2a+1)(a-1) \neq 0,$$

すなわち $a \neq -\dfrac{1}{2}, 1$. このときクラメルの公式から

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & a & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -2 & -4 & 2 \end{vmatrix}}{-(2a+1)(a-1)} = 0, \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ a & 1 & -1 \\ 3 & -2 & 2 \end{vmatrix}}{-(2a+1)(a-1)} = 0, \quad z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & a & 1 \\ a & 1 & 1 \\ 3 & -4 & -2 \end{vmatrix}}{-(2a+1)(a-1)} = -1.$$

B の解答

1.

$$F_n = (-1)(-1)^{2n-1}\begin{vmatrix} x & -1 & & & & \\ 0 & x & -1 & & \text{\Large 0} & \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & x & -1 \\ a_0 & \cdots & \cdots & \cdots & a_{n-2} & a_{n-1} \end{vmatrix}$$

$$+ a_n(-1)^{2n}\begin{vmatrix} x & -1 & & & \\ & x & -1 & \text{\Large 0} & \\ & & \ddots & \ddots & \\ \text{\Large 0} & & & \ddots & -1 \\ & & & & x \end{vmatrix} = F_{n-1} + a_n x^n.$$

(2)

$$
\begin{array}{rl}
 & F_n = a_n x^n + F_{n-1} \\
 & F_{n-1} = a_{n-1} x^{n-1} + F_{n-2} \\
 & \quad\vdots \\
 & F_2 = a_2 x^2 + F_1 \\
+) & F_1 = a_1 x + a_0 \\
\hline
 & F_n = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0
\end{array}
$$

2.

(1) $|A| \neq 0$ のとき

$A\tilde{A} = |A|E$ より $|A||\tilde{A}| = |A|^n \quad \therefore \quad |\tilde{A}| = |A|^{n-1}$.

$|A| = 0$ のとき

$|\tilde{A}| \neq 0$ なら，$\tilde{A}$ に逆行列があることになり $A\tilde{A} = O$ より $A = O$ となるが，A の成分がすべて 0 なら $\tilde{A} = O$ であり矛盾．よって $|\tilde{A}| = 0$.

(2) $|A| \neq 0$ のとき

$\tilde{A}\tilde{\tilde{A}} = |\tilde{A}|E = |A|^{n-1}E$ より $A\tilde{A}\tilde{\tilde{A}} = |A|^{n-1}A$ である．$A\tilde{A} = |A|E$ より $|A|\tilde{\tilde{A}} = |A|^{n-1}A \quad \therefore \quad \tilde{\tilde{A}} = |A|^{n-2}A$.

$|A| = 0$ のとき

(i) $n > 2$ の場合

$\operatorname{rank} A \leq n-1$ であり，$\operatorname{rank} A < n-1$ であれば，A の $(n-1)$ 次小行列式はすべて 0 となるので，$\tilde{A} = O$．よって $\tilde{\tilde{A}} = O$.

$\operatorname{rank} A = n-1$ であれば，$A\tilde{A} = O$ より $\operatorname{rank} \tilde{A} = 1 < n-1$ なので，$\tilde{A}$ の $(n-1)$ 次小行列式はすべて 0 で $\tilde{\tilde{A}} = O$.

(ii) $n = 2$ の場合

$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ に対し $\tilde{A} = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$ なので $\tilde{\tilde{A}} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = A$.

これは $\tilde{\tilde{A}} = |A|^{n-2}A$ であることを示している．

3. (1)

$$
|A| = \begin{vmatrix} a & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & a & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & a & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & a \end{vmatrix} = (a+n-1) \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & a & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & a \end{vmatrix}
$$

$$
= (a+n-1) \begin{vmatrix} 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 1 & a-1 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & a-1 \end{vmatrix} = (a+n-1)(a-1)^{n-1}
$$

(2) A が正則 $\iff |A| \neq 0$ 　　$\therefore a \neq 1$ かつ $a \neq 1-n$

$$
|A_j| = \begin{vmatrix} a & \cdots & b & \cdots & 1 \\ 1 & \ddots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & & b & & \vdots \\ \vdots & & \vdots & \ddots & 1 \\ 1 & \cdots & b & \cdots & a \end{vmatrix} = b \begin{vmatrix} a & \cdots & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & \ddots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & & 1 & & \vdots \\ \vdots & & \vdots & \ddots & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & \cdots & a \end{vmatrix}
$$

$$
= b \begin{vmatrix} a-1 & \cdots & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & & 1 & & \vdots \\ \vdots & & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 1 & \cdots & a-1 \end{vmatrix}
$$

$$
= b \begin{vmatrix} a-1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & & 1 & & \vdots \\ \vdots & & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & a-1 \end{vmatrix} = b(a-1)^{n-1}
$$

$$
\therefore \quad x_j = \frac{|A_j|}{|A|} = \frac{b}{a+n-1} \quad (j = 1, 2, \cdots, n)
$$

(4) $a = 1$ のとき

$x_j = t_j$ $(j = 2, 3, \cdots, n)$ とおけば $x_1 = b - \displaystyle\sum_{j=2}^{n} t_j$.

$a = 1 - n$ のとき

$\mathrm{rank} \left(\begin{array}{c|c} & b \\ A & \vdots \\ & b \end{array} \right) > \mathrm{rank}\, A$ より解なし.