連立方程式の掃き出し計算:

2019/rennritu-ma33U8.tex

未知変数 $x, y, z, u, v \cdots$ の連立方程式を掃き出し計算で解く。この方法は行列の階数を求めることや逆行列の計算にも応用できる有用な方法です。行列の変形計算を 3 つの基本操作に対応しています。

問題１： 掃き出し計算による解法でつぎの連立方程式の解をもとめよ。

(1) $\begin{cases} 2x - 3y = 7 \\ 3x + 4y = 2 \end{cases}$ (2) $\begin{cases} 3x + 7y + 5z = 24 \\ 2x + 4y + 2z = 14 \end{cases}$ (3) $\begin{cases} -x + y - z = 2 \\ 2x - y + 3z = 4 \\ x + 2z = 1 \end{cases}$

(1) の【解】 枠で囲んだ数値が方程式の係数に対する掃き出し計算で、その左側は基本操作を示した行列です。

I. $\begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ $\left[\begin{array}{cc|c} \boxed{2} & -3 & 7 \\ 3 & 4 & 2 \end{array}\right]$

II. $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \underline{-3} & 1 \end{pmatrix}$ $\left[\begin{array}{cc|c} 1 & -3/2 & 7/2 \\ \underline{3} & 4 & 2 \end{array}\right]$

III. $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2/17 \end{pmatrix}$ $\left[\begin{array}{cc|c} 1 & -3/2 & 7/2 \\ 0 & \boxed{17/2} & -17/2 \end{array}\right]$

IV. $\begin{pmatrix} 1 & \underline{3/2} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ $\left[\begin{array}{cc|c} 1 & \underline{-3/2} & 7/2 \\ 0 & 1 & -1 \end{array}\right]$

V. $\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \end{array}\right]$

（答） $x = 2, y = -1$

「注」 最終掃き出しから、 左側の操作行列の積を順次に求めると、逆行列が得られる。

$$\begin{pmatrix} 1 & \underline{3/2} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2/17 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \underline{-3} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}^{-1}$$

この逆行列をつかって, 問題 $Ax = b$ の答えが $x = A^{-1}b$ として得られる。

(2) の【解】

I. $\begin{pmatrix} 1/3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ $\left[\begin{array}{ccc|c} \boxed{3} & 7 & 5 & 24 \\ 2 & 4 & 2 & 14 \end{array}\right]$

II. $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \underline{-2} & 1 \end{pmatrix}$ $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 7/3 & 5/3 & 8 \\ \underline{2} & 4 & 2 & 14 \end{array}\right]$

III. $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -3/2 \end{pmatrix}$ $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 7/3 & 5/3 & 8 \\ 0 & \boxed{-2/3} & -4/3 & -2 \end{array}\right]$

IV. $\begin{pmatrix} 1 & \underline{-7/3} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & \underline{7/3} & 5/3 & 8 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{array}\right]$

V. $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{array}\right]$

これは係数行列の階数が変数の個数より小さい「不定形」で任意定数 c をもちい、一般解を表現する。

(答) $x = 1 - 3c, y = 3 - 2c, z = c$ ただし c は任意定数.

(3) の【解】

I. $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ $\left[\begin{array}{ccc|c} \boxed{-1} & 1 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \end{array}\right]$

II. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \underline{-2} & 1 & 0 \\ \underline{-1} & 0 & 1 \end{pmatrix}$ $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & -2 \\ \underline{2} & -1 & 3 & 4 \\ \underline{1} & 0 & 2 & 1 \end{array}\right]$

III. $\begin{pmatrix} 1 & \underline{1} & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & \underline{-1} & 1 \end{pmatrix}$ $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & \underline{-1} & 1 & -2 \\ 0 & \boxed{1} & 1 & 8 \\ 0 & \underline{1} & 1 & 3 \end{array}\right]$

IV. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1/5 \end{pmatrix}$ $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 6 \\ 0 & 1 & 1 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{-5} \end{array}\right]$

V. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & \underline{-6} \\ 0 & 1 & \underline{-8} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & \underline{6} \\ 0 & 1 & 1 & \underline{8} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$

VI. $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$

既に step IV までで、解なしはわかるが、階段行列と最後までおこなう。これは係数行列と拡大係数行列の階数が一致していないから、解が存在しない。 (答) 解なし

問題２： 掃き出し計算による連立方程式の解をもとめよ。

$$(1)\quad \begin{cases} x+2y+3u+4v=2 \\ -x+2y-4z+u=2 \\ 2x+y+3z-2u-10v=-4 \\ -2x+y-5z+u+3v=3 \end{cases} \qquad (2)\quad \begin{cases} x-2y+4z+2u+9v=0 \\ x+y+z+2u+3v=3 \\ -2x+y-5z+2u+6v=4 \\ 2x+y+3z-u-7v=-4 \end{cases}$$

(1) の【解】

$$\text{I.}\quad \left[\begin{array}{ccccc|c} \boxed{1} & 2 & 0 & 3 & 4 & 2 \\ -1 & 2 & -4 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 3 & -2 & -10 & -4 \\ -2 & 1 & -5 & 1 & 3 & 3 \end{array}\right] \qquad \text{II.}\quad \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 0 & 3 & 4 & 2 \\ 0 & \boxed{4} & -4 & 4 & 4 & 4 \\ 0 & -3 & 3 & -8 & -18 & -8 \\ 0 & 5 & -5 & 7 & 11 & 7 \end{array}\right]$$

$$\text{III.}\quad \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 2 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{-5} & -15 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 6 & 2 \end{array}\right] \qquad \text{IV.}\quad \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 2 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

係数行列と拡大係数行列の階数は等しいから、連立方程式には解がある。しかし未知数は 5 個で、階数は 3 となっているから、$5-3=2$ 個の任意定数をもちいて方程式の解を表すことができる。掃き出しの結果から、$z=c_1,\ v=c_2$ と任意定数をおくならば、$x=-1-2c_1+c_2,\ y=c_1+2c_2,\ u=1-3c_2$ と表される。あるいはベクトル表示であるならば、右側のようになる。

(答) c_1, c_2 を任意定数として

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_1 \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

(2) の【解】

$$\text{I.}\quad \left[\begin{array}{ccccc|c} \boxed{1} & -2 & 4 & 2 & 9 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 3 & 3 \\ -2 & 1 & -5 & 2 & 6 & 4 \\ 2 & 1 & 3 & -1 & -7 & -4 \end{array}\right] \qquad \text{II.}\quad \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & -2 & 4 & 2 & 9 & 0 \\ 0 & \boxed{3} & -3 & 0 & -6 & 3 \\ 0 & -3 & 3 & 6 & 24 & 4 \\ 0 & 5 & -5 & -5 & -25 & -4 \end{array}\right]$$

$$\text{III.}\quad \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 2 & 2 & 5 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{6} & 18 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & -5 & -15 & -9 \end{array}\right] \qquad \text{IV.}\quad \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 2 & 0 & -1 & -1/3 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 & 7/6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -19/6 \end{array}\right]$$

係数行列の階数は 3 であるが、拡大係数行列の階数は 4 で一致していない。したがって解をもたない。

(答) 解なし

表計算ソフトを用いる場合での注意

１．セルの設定 (表示形式) を「標準」から「数値」に替えておき、「負の数の表示形式」は”-1234”に替える。さらに「小数点以下の桁数」は、２から３、４程度に増やす。これは分数のばあいには、自動的に四捨五入されてしまい、確認ができない。

2. 行列の計算を表計算ソフトでおこなうには、「配列数式」を使用して入力する。このとき、単に「Enter」だけでは入力できない。Ctrl + Shift を押しながら、Enter をキー入力しなければならない。ウィザードの画面でも単に「OK」をクリックしないことに注意。

つぎは連立方程式の係数に未知数が含まれるとき、掃き出し計算の進行をおこないつつ、解をもつような条件を考えます。

例題１：未知変数 x, y, z の連立方程式で、解をもつ条件 a, b は何か。また解をもつとき、その解をもとめよ。(前回配布から係数の訂正をしています)

$$\begin{cases} x+2y+z=1 \\ -y+2z=1 \\ 2x+3y+az=b \end{cases}$$

$$\text{(I)}\ \left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & a & b \end{array}\right) \quad \text{(II)}\ \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & \boxed{-1} & 2 & 1 \\ 0 & -1 & a-2 & b-2 \end{array}\right) \quad \text{(III)}\ \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 5 & 3 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & \boxed{a-4} & b-3 \end{array}\right)$$

(i) ここで $a-4=0$ であれば、係数行列の階数は $\mathrm{rank}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}=2$ となります。もし、$b-3\neq 0$ であれば、第 3 行の式は係数と定数を比べては $0x+0y+0z=0=b-3$ となるから、右辺の定数 $b-3$ の値がゼロでなければ、等号の矛盾ですから、「解なし」です。なぜなら、もし $a=4$ であれば、係数行列の階数は $\mathrm{rank}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}=2$ ですが、しかし $b-3\neq 0$ とすると、拡大係数行列において、この値をピボット（軸）として割り算ができ、掃き出し可能ですから、その階数は $\mathrm{rank}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 & 3 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & b-3 \end{pmatrix}=\mathrm{rank}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}=3$ となります。これら係数行列と拡大係数行列の階数を比較すれば、$2<3$ で「解なし」となります。(ii) しかし $b=3$ であれば、ともに階数が 2 ですから「無数に多くの解」をもちます。(iii) いま $a-4\neq 0$ とし、b の値に関係なく、1 行目、2 行目の掃き出しから、$3-5\cdot\dfrac{b-3}{a-4}=\dfrac{3a-5b+3}{a-4}$, $-1-(-2)\cdot\dfrac{b-3}{a-4}=\dfrac{-a+2b-2}{a-4}$ ですから、STEP（IV）$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & \dfrac{3a-5b+3}{a-4} \\ 0 & 1 & 0 & \dfrac{-a+2b-2}{a-4} \\ 0 & 0 & 1 & \dfrac{b-3}{a-4} \end{array}\right)$ が得られます。これが一意解となります。

したがって以上をまとめて

(i) $a=4, b\neq 3$ のとき、解なし。

(ii) $a=4, b=3$ のとき、無数に多くの解。任意定数 c をもちい、
$x=3-5c, y=-1+2c, z=c$ (c は任意定数)

(iii) $a\neq 4$ のとき、$x=\dfrac{3a-5b+3}{a-4}, y=\dfrac{-a+2b-2}{a-4}, z=\dfrac{b-3}{a-4}$

(終)

例題 2： 未知変数 x, y, z の連立方程式で、解をもつ条件 a, b は何か。また解をもつとき、その解をもとめよ。

$$\begin{cases} x+2y+az=1 \\ -x-2y+(1-a)z=0 \\ 2x+4y+bz=2 \end{cases}$$

掃き出し計算による連立方程式の解法で階段行列に変形する。

$$\text{(I)} \left[\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 2 & a & 1 \\ -1 & -2 & 1-a & 0 \\ 2 & 4 & b & 2 \end{array}\right] \quad \text{(II)} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & a & 1 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 1 \\ 0 & 0 & b-2a & 0 \end{array}\right] \quad \text{(III)} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 1-a \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2a-b \end{array}\right]$$

掃き出し計算はここで終り。解をもつ条件をチェックすると、係数行列と拡大係数行列の階数が等しくならなければならないから、$2a-b=0$ を得る。つまり、$b=2a$ が求める関係式。

もし、$b=2a$ の関係があれば、2 つの行列の階数はともに階数 2 で等しくなるから、解をもつ。その解を表すためには、任意定数を一つもちいる。つまり、方程式を変数をもちいて表すと、

$$\begin{cases} x+2y=1-a \\ z=1 \end{cases}$$

となるから、z は定まっているが、x, y が不定形であるから、もし $y=c_1$ (任意定数) とすれば、$x=1-a-2c_1$ となり、$x=1-a-2c_1$, $y=c_1$, $z=1$ となる。あるいは、もし $x=c_2$ (任意定数) とすれば、$y=\dfrac{1-a-c_2}{2}$ となり、$x=c_2$, $y=\dfrac{1-a-c_2}{2}$, $z=1$ となる。前者の場合には、任意定数でくくり出してから、ベクトルで表すと、$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-a \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + c_1 \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ であり、後者の場合には $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1-a}{2} \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{-1}{2} \\ 0 \end{pmatrix}$ となる。定数ベクトルの項は通る点を表し、任意定数をもつベクトル項は方向ベクトルを表す。この二つは任意定数 c_1, c_2 を適当に定めれば、同じベクトルである。（確かめてみよ）さらにいずれの場合にも任意定数の個数はひとつであるが、これは係数行列 $m \times n$ 型では、$m=3, n=3$ であり、解をもつ場合の係数行列と拡大係数行列の階数は

$$\operatorname{rank} \begin{pmatrix} 1 & 2 & a \\ -1 & -2 & 1-a \\ 2 & 4 & b \end{pmatrix} = \operatorname{rank} \begin{pmatrix} 1 & 2 & a & 1 \\ -1 & -2 & 1-a & 0 \\ 2 & 4 & b & 2 \end{pmatrix} = \operatorname{rank} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1-a \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 2$$

となっている。（終）

まとめ：連立方程式 $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ $(A : m \times n)$ の解は

(a) 一意解：　条件 $\operatorname{rank}(A) = \operatorname{rank}(A \,|\, \boldsymbol{b}) = n$ （A は正方行列 $m=n$ で、変数、方程式の個数に等しい)、$\boldsymbol{x} = A^{-1}\boldsymbol{b}$ (逆行列の存在) あるいはクラメルの公式の形。

(b) 解なし：　条件 $\operatorname{rank}(A) < \operatorname{rank}(A \,|\, \boldsymbol{b})$ （係数行列 A と拡大係数行列 $A \,|\, \boldsymbol{b}$ の階数が等しくない)

(c) 不定解：　条件 $\operatorname{rank}(A) = \operatorname{rank}(A \,|\, \boldsymbol{b}) < n$ （変数の個数より拡大係数行列 (係数行列も同じ値) の階数が小さい場合、任意定数の個数 k は $k = n - \operatorname{rank}(A)$ が必要。)