

第7章

工学への応用

線形代数は物理学などの科学や工学に重要な応用をもち不可欠なものであるが、ここでは簡単な例をいくつか挙げて、どのように行列が使われているかを示す。

1 線形システムと状態方程式

機械などのように、入力に応じて出力を出すものをシステムという。科学では、現象をすべて理想化して（モデル化）1つのシステムと考えて、理論的に扱うのである。システムのうち、入力が2倍、3倍になれば、出力も2倍、3倍というように比例して変化し、2種類の入力があったときに、それぞれに対する出力を合わせたものを出力するものを線形システムという。身の回りにある機械で線形なものがあるだろうか。

線形写像とはどんなもので、行列とどんな関係があるか考えると、線形システムとよばれる理由と、なぜ行列が使われるのかわかるのではないだろうか。

システムのうち、出力がその時刻の入力だけから決まるものを静的システムという。100円硬貨1枚を10円硬貨10枚に両替する機械は静的システムといえるだろう。

実用上は、出力がその時点の入力だけでなく、それまでの入力やシステム内部の状態に依存する場合が大事である。このようなものを動的システムという。出力がシステムの最終的な変数であるのに対して、過去の入力や内部状態を表す中間の変数が必要になり、状態変数とよんでいる。

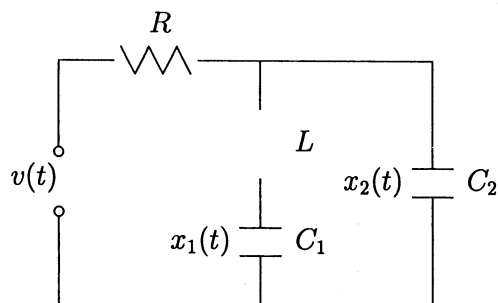
例 1.1. 電気回路 時刻 t における回路の両端の電圧を $v(t)$ とし、これがシステムへの入力だと思ふ。容量 C_1 のコンデンサの両端電圧を

$x_1(t)$ 、容量 C_2 のコンデンサの両端の電圧を $x_2(t)$ 、

インダクタンス L のコイルに流れる電流を $x_3(t)$

とし、これらを状態変数とする。また、 C_1 と C_2 の

電圧を出力 $y(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$ とする。



コンデンサ C_1 を流れる電流は $C_1 x_1'(t)$ で コイル L に流れる電流と等しいから, 次の式が成り立つ.

$$x_3(t) = C_1 x_1'(t).$$

したがって,

$$x_1'(t) = \frac{1}{C_1} x_3(t).$$

一方, L による逆起電力 $Lx_3'(t)$ と C_1 の両端電圧の和が, C_2 の両端電圧に等しいから,

$$Lx_3'(t) + x_1(t) = x_2(t)$$

変形して,

$$x_3'(t) = -\frac{1}{L}x_1(t) + \frac{1}{L}x_2(t).$$

最後に, 抵抗 R による電圧降下と C_2 の両端電圧の和が, 全電圧 $v(t)$ に等しく, R を流れる電圧は C_2 と L を流れる電流の和だから,

$$R(C_2 x_2'(t) + x_3(t)) + x_2(t) = v(t).$$

これより,

$$x_2'(t) = -\frac{1}{RC_2}x_2(t) - \frac{1}{R}x_3(t) + \frac{1}{RC_2}v(t).$$

これらの連立方程式をまとめると, 次のように表せる.

$$\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{C_1} \\ -\frac{1}{RC_2} & 0 & -\frac{1}{C_2} \\ -\frac{1}{L} & \frac{1}{L} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{RC_2} \\ 0 \end{pmatrix} v. \quad (7.1)$$

このような, 状態変数と入力との間に成り立つ方程式を **状態方程式** という.

$$\mathbf{y} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \quad (7.2)$$

が成り立ち, 出力と入力, および, 状態変数の間の方程式を **出力方程式** とよんでいる.

一般的にまとめておこう. 動的システムは微分方程式で記述される. ここでは, 常微分方程式で表される **集中定数システム** を扱うことにする. 入力変数が $v_1(t), v_2(t), \dots, v_m(t)$ の m 個, 状態変数が $x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)$ の n 個, 出力変数が $y_1(t), y_2(t), \dots, y_l(t)$ の l 個のシステムを考える. 3つのベクトル

$$\mathbf{v}(t) = \begin{pmatrix} v_1(t) \\ v_2(t) \\ \vdots \\ v_m(t) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x}(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{y}(t) = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ \vdots \\ y_l(t) \end{pmatrix}$$

をそれぞれ, 入力変数ベクトル, 状態変数ベクトル, 出力変数ベクトル という.

$$\frac{d}{dt}\mathbf{x}(t) = \begin{pmatrix} x'_1(t) \\ x'_2(t) \\ \vdots \\ x'_n(t) \end{pmatrix}$$

とする (成分ごとに微分したもの).

制御理論では, 連立の 1 階常微分方程式

$$\frac{d}{dt}\mathbf{x}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t), \mathbf{v}(t), t) \quad (7.3)$$

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{g}(\mathbf{x}(t), \mathbf{v}(t), t) \quad (7.4)$$

で表されるものを考える. (7.3) を 状態方程式, (7.4) を 出力方程式 という.

多くの場合, $\mathbf{f}$ と $\mathbf{g}$ は線形性をもち,

$$\frac{d}{dt}\mathbf{x}(t) = \mathbf{A}(t)\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}(t)\mathbf{v}(t) \quad (7.5)$$

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}(t)\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}(t)\mathbf{v}(t) \quad (7.6)$$

で表される. このようなシステムを 線形時変システム とよぶ.

問 1.1. $\mathbf{A}(t), \mathbf{B}(t), \mathbf{C}(t), \mathbf{D}(t)$ はそれぞれ何行何列の行列か考えよう ($\mathbf{x}, \mathbf{v}, \mathbf{y}$ および $\frac{d}{dt}\mathbf{x}$ の成分の個数を考えればわかる.).

例 (1.1) の式 (7.1) と (7.5), および (7.2) と (7.6) を比べると,

$$\mathbf{A}(t) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{C_1} \\ -\frac{1}{RC_2} & 0 & -\frac{1}{C_2} \\ -\frac{1}{L} & \frac{1}{L} & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B}(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{RC_2} \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{C}(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{D}(t) = \mathbf{O}$$

になっていることがわかる.

このように, 4 つの行列が時間 t に関係せず一定のとき, システムは 線形時不変システム とよばれる (以下, 成分が定数である行列を 定数行列 ということにする.).

$$\frac{d}{dt}\mathbf{x}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{v}(t) \quad (7.7)$$

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}\mathbf{v}(t) \quad (7.8)$$

線形時不変システムは理論的にも扱いやすく、多くのシステムを近似できるので便利であるし、重要でもある。状態変数の個数 (n) は、システムの入力に対する振る舞いを決定するのに必要な最小限 (独立) の内部状態の数である。状態変数はいろいろな選びかたができるが (したがって、行列 A, B, C, D も異なってくるが)、システムの性質はその選びかたによらず記述されることがわかっているで心配する必要はない。これは、線形写像の表しかたは、基底の選びかたによって変化することに対応する。出力方程式 (7.6) は、 A, B, C, D が決まれば、出力が入力変数と状態変数のどんな 1 次結合であるかを表しているだけである。だから、システムの振る舞いを知るには、(7.5) の状態方程式を導き、それを解くことが重要である。

2 システムの安定性

線形時不変システム (7.7), (7.8) では、 $t=0$ のときの状態変数ベクトル $\mathbf{x}(0)$ と $t \geq 0$ の区分的連続な $\mathbf{v}(t)$ が与えられると、 $\mathbf{x}(t)$ はただ 1 つに決まることが知られている。

特に、 $\mathbf{v}(t) \equiv \mathbf{0}$ のとき、(7.7) は

$$\frac{d}{dt}\mathbf{x}(t) = A\mathbf{x}(t) \quad (7.9)$$

となり、自由システム とよばれる。

定理 2.1. 自由システム (7.9) の解は

$$\mathbf{x}(t) = e^{tA}\mathbf{x}(0) \quad (7.10)$$

である。ここで、

$$e^{tA} = E + tA + \frac{1}{2!}t^2A^2 + \frac{1}{3!}t^3A^3 + \cdots + \frac{1}{n!}t^nA^n + \cdots \quad (7.11)$$

は、指数関数の行列における類推である。

問 2.1. 次のことを確かめよう。ただし、 A は定数行列である。

$$e^0 = E \quad (7.12)$$

$$e^{tA}e^{sA} = e^{(s+t)A} \quad (7.13)$$

$$(e^{tA})^{-1} = e^{-tA} \quad (7.14)$$

≪ 行列を微分する ≫ 行列 X の各成分が t の式になっているとき、各成分を t で微分した行列を求めることを、行列 X を t で微分する という。われわれはすでに、ベクトル $\mathbf{x}(t)$ の微分 $\frac{d}{dt}\mathbf{x}(t)$ を使ってきている。行列 $X(t)$ の微分も同じく、 $\frac{d}{dt}X(t)$ とかくことにする。

例 2.1. 定数行列 X に対して, 行列 tX は X の各成分を t 倍したものである. そこで

$$\frac{d}{dt}(tX) = X \quad (7.15)$$

整数 n に対して

$$\frac{d}{dt}(t^n X) = nt^{n-1}X \quad (7.16)$$

が成り立つ.

定理 2.2. 定数行列 A に対して次の等式が成り立つ.

$$\frac{d}{dt}e^{tA} = Ae^{tA} \quad (7.17)$$

証明. 定義 (7.11) から

$$e^{tA} = E + tA + \frac{1}{2!}t^2A^2 + \frac{1}{3!}t^3A^3 + \cdots + \frac{1}{n!}t^nA^n + \cdots$$

ここで, A^n も定数関数であることに注意して, 上の例 2.1 を使うと,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}e^{tA} &= O + A + \frac{1}{2!}(2t)A^2 + \cdots + \frac{1}{n!}(nt^{n-1})A^n + \frac{1}{(n+1)!}\{(n+1)t^n\}A^{n+1} + \cdots \\ &= A + tA^2 + \frac{1}{2!}t^2A^3 + \cdots + \frac{1}{(n-1)!}t^{n-1}A^n + \frac{1}{n!}t^nA^{n+1} + \cdots \\ &= A(E + tA + \frac{1}{2!}t^2A^2 + \cdots + \frac{1}{n!}t^nA^n + \cdots) \\ &= Ae^{tA} \quad \square \end{aligned}$$

定理 2.1 の証明 は上の定理からもう明らかだろう. このように, 指数関数は普通の実数の関数の世界だけでなく, 行列の世界でも大切な役目を果たす. (複素数の世界でも, ものすごく重要なことは, もう知っている人もいるかも知れない).

今, 自由システム (7.9) において, 行列 A が n 次正方行列で次のように対角化されたとしよう.

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix} \quad (7.18)$$

問 2.2. 対角行列の掛け算と指数関数の定義を思い出して, 次のことを確かめよう.

$$P^{-1}e^{tA}P = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 t} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & e^{\lambda_n t} \end{pmatrix} \quad (7.19)$$

したがって,

$$e^{tA} = P \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 t} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & e^{\lambda_n t} \end{pmatrix} P^{-1} \quad (7.20)$$

問 2.3. 次の行列に対し e^A を計算しなさい ($t = 1$ の場合である).

$$(1) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \quad (2) \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

線形時不変の自由システムは, どんな初期条件 $\mathbf{x}(0)$ に対しても

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{x}(t) = \mathbf{0} \quad (7.21)$$

のとき **漸近安定** という. 現実には, 文字どおりシステムがだんだん一定の状態に落ち着くことを意味している.

問 2.4. 漸近安定の場合, なぜ, 近づくのが $\mathbf{0}$ でなければならないかを, 方程式 (7.9) の形から考えてみよう.

方程式 (7.9) の解 $\mathbf{x}(t)$ が次の式 (7.10)

$$\mathbf{x}(t) = e^{tA} \mathbf{x}(0)$$

で与えられたことと上の等式 (7.20) から, 次のことがわかる.

定理 2.3. 自由システムが漸近安定であるための必要十分条件は

A のすべての **固有値の実数部分** が負である

ことである (実数 a, b に対してオイラーの公式 $e^{a+ib} = e^a(\cos b + i \sin b)$ より $|e^{a+ib}| = e^a$ であることに注意.).

ここにも, 線形代数における固有値の重要性が発揮されている.

多くのシステム制御理論の教科書をざっと眺めると, 行列がそこらじゅうにあふれているものが多い. これ以上のことは, 皆さんの今後の学習にまかせて, 違う応用に移る.

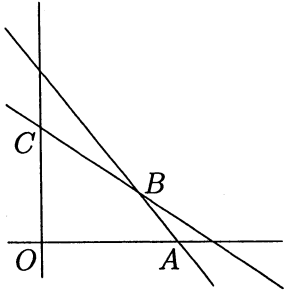
3 線形計画法

いくつかの1次方程式と1次不等式で決められた条件の下で, 与えられた1次関数の最大値や最小値を求める問題が **線形計画法** である. 生産, 輸送, 経営などには資源, 設備, 労働力, コストなどで種々の制約があり, その下で利益, 効率を最大にすることへ応用されている.

次の例のように, 考慮する要素の数や条件が少なければ, 図を用いて簡単に処理できる.

例 3.1. 条件 $\begin{cases} 2x + 3y \leq 10 \\ 5x + 4y \leq 20 \\ x, y \geq 0 \end{cases}$ の下で, $z = 3x + 5y$ を最大にせよ.

解 条件をみたす領域は図の 4 角形 $OABC$ の内部で, 4 頂点 $O(0,0)$, $A(4,0)$, $B\left(\frac{20}{7}, \frac{10}{7}\right)$, $C\left(0, \frac{10}{3}\right)$ のどれかで z は最大になる. 実際に計算すると, 点 C で最大値 $\frac{50}{3}$ をとることがわかる.



変数が 3 つならば, 立体的に図をかけばなんとかなるが, それ以上になると図を思い浮かべることが難しくなる. 頂点の数も増えてくるので, それらを全部求めて値を計算するのも時間がかかる. そこで, 効率的に最大値を求める方法がいくつか考え出された. ここで紹介するのは, シンプレクス法 である.

例 3.2. ある工場では SE, S, M, E の 4 種の車を生産している. それぞれを 1 台つくるのにかかる材料費, 人件費, 設備投資費は表のようにになっている (単位は同等に評価できるように調整してある).

	SE	S	M	E	利用限度
材料	1	1	1	1	110
人件費	2	1	3	2	220
設備	3	2	0	0	150

また, 1 台あたりの利益はそれぞれ, 40 万円, 30 万円, 50 万円, 20 万円である. 利益を最大にする生産計画はどんなものか.

解 SE, S, M, E の各車種の生産台数を x, y, z, w とすると,

$$\text{条件} \begin{cases} x + y + z + w \leq 110 \\ 2x + y + 3z + 2w \leq 220 \\ 3x + 2y \leq 150 \\ x, y, z, w \geq 0 \end{cases} \quad (7.22)$$

の下で, $m = 4x + 3y + 5z + 2w$ を最大にせよという問題になる. 4 変数なので図をかくのは難しいし, 不等式は方程式より扱いにくい.

そこで, 新しく 補助の変数 を加えて 不等式を方程式に変える. 上の式 (7.22) で

$$\begin{cases} s = 110 - (x + y + z + w) \\ t = 220 - (2x + y + 3z + 2w) \\ u = 150 - (3x + 2y) \end{cases} \quad (7.23)$$

とおくと, 次の問題と同値になる.

$$\text{条件} \left\{ \begin{array}{rcl} x + y + z + w + s & \leq & 110 \\ 2x + y + 3z + 2w + t & \leq & 220 \\ 3x + 2y & + u & \leq 150 \\ 4x + 3y + 5z + 2w & = & m \\ x, y, z, w, s, t, u \geq 0 \end{array} \right. \quad (7.24)$$

の下で, $m = 4x + 3y + 5z + 2w$ を最大にせよ.

したがって, m をパラメータと考えて, この方程式の解で m の最も大きい値に対応するものを求めればよい. なお, s, t, u は生産に使われない余剰にあたる.

方程式の解を考えると, m は一番下の式にしか出てこないから, 上の3つの式を考えればよいことに注意する. $x = y = z = w = 0$ とすると, $s = 110, t = 220, u = 150$ という解が得られ, $m = 0$ である (これは, まったく生産しない場合にあたり, ここから出発して, 利益である m を増やすように生産計画を立てていく). m の式を見ると, x, y, z, w のどれかを増やせば, m も増えることがわかる. 係数を比べると, z を増やしたときの効果が最大であることがわかるので, x, y, w は0のまま, z がどこまで増やせるか調べてみる (z を選ぶことに本質的な意味はない).

$$\begin{array}{rcl} z + s & = & 110 \\ 3z + t & = & 220 \end{array} \quad (7.25)$$

であるから, 上の式からは $z \leq 110$, 下の式からは $z \leq \frac{220}{3}$ で, z は $\frac{220}{3}$ まで増やせることがわかる. このときの解は,

$$x = y = w = t = 0, z = \frac{220}{3}, s = \frac{110}{3}, u = 150$$

で, $m = \frac{1100}{3}$ に増加している.

ここで, 基本変形を使って, $z = \frac{220}{3}$ とした根拠になっている方程式 (7.24) の第2式以外の式から z を消去すると次のようになる.

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x + 2y & + w + 3s - t & = 110 \\ 2x + y + 3z + 2w & + t & = 220 \\ 3x + 2y & & + u = 150 \\ 2x + 4y & - 4w - 5t & = 3m - 1100 \end{array} \right. \quad (7.26)$$

ここで m の式を見ると, x と y を増加させれば m は増大するが, w と t を増やすと, m は減ってしまうことがわかる. そこで $x = w = t = 0$ のままで, y をいくつまで増やせるか調べる.

$$\left\{ \begin{array}{rcl} 2y & + 3s & = 110 \\ y + 3z & & = 220 \\ 2y & + u & = 150 \end{array} \right. \quad (7.27)$$

それぞれ $y \leq 55$, $y \leq 220$, $y \leq 75$ となり, y は 55 まで増やせる. 先ほどと同じようにして, 式 (3) から y を消去する.

$$\begin{cases} x + 2y & + w + 3s - t & = 110 \\ 3x & + 6z + 3w - 3s + 3t & = 330 \\ 2x & - w - 3s + t + u & = 40 \\ & - 6w - 6s - 3t & = 3m - 1320 \end{cases} \quad (7.28)$$

このとき, $x = w = s = t = 0$, $y = 55$, $z = 55$, $u = 40$ で $m = 440$ である.

m の式を見ると, w, s, t の係数はみな負だから, これらを増やすと m は減少してしまう. したがって, このときの $m = 440$ が最大値である. $\square$

この例では, $u = 40$ で設備投資にまだ余裕があるが, これ以上設備投資をすると, かえって利益が減ってしまうことになる.

また, 2回の手続きで処理しており, 頂点をすべて求めてそこでの m の値を求めるより, 効率がよい.

ここでの手順を整理してみる.

- (1). 補助の変数を使って, 不等式から連立方程式をつくる.
- (2). 目的の m の式で係数が正の変数を 1 つ選び, 他の式と各変数が正であるという条件から, その変数がいくつまで増やせるかを見る.
- (3). 上の最大値を判定するのに使った式以外から, その変数を基本変形で消去する.
- (4). m の式を見て, 係数が正のものがあれば, 同じ操つくを繰り返す.
- (5). m の式でどの変数の係数も負になったら, それらを 0 とおいた m が最大である.

行列の形で例 3.2 の処理を表すと次のようになる. 判定の基準になった係数には下線を引いてある.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 110 \\ 2 & 1 & \underline{3} & 2 & 0 & 1 & 0 & 220 \\ 3 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 150 \\ 4 & 3 & 5 & 2 & 0 & 0 & 0 & m \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & \underline{2} & 0 & 1 & 3 & -1 & 0 & 110 \\ 2 & 1 & 3 & 2 & 0 & 1 & 0 & 220 \\ 3 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 150 \\ 2 & 4 & 0 & -4 & 0 & -5 & 0 & 3m - 1100 \end{pmatrix} \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 & 3 & -1 & 0 & 110 \\ 3 & 0 & 6 & 3 & -3 & 3 & 0 & 330 \\ 2 & 0 & 0 & -1 & -3 & 1 & 1 & 40 \\ 0 & 0 & 0 & -6 & -6 & -3 & 0 & 3m - 1320 \end{pmatrix}$$

問 3.1. 条件
$$\begin{cases} x + y + z \leq 170 \\ x + y \leq 80 \\ x \leq 15 \\ x, y, z \geq 0 \end{cases}$$
 の下で, $m = 3x + 2y + z$ の最大値を求めよ.

与えられた関数 m の最小値を求めるには, $-m$ の最大値を求めればよいのだが, この場合の処理は, 意外と複雑になることが多い. そこで, 通常は **双対定理** というものを使って, 同値な最大値問題を考える. 詳しくは述べないが, 転置行列が関係している.

また, 線形計画法は最適戦略を考える, **ゲーム理論** にも応用される.

4 2次形式と固有値

第5章では2次形式の標準形を2次曲線の分類に利用した. ここでは, 2次形式の値を問題にしたい.

対称行列 A で定まる2次形式 ${}^t x A x$ に対し, 座標変換 $x = P x'$ を行くと,

$${}^t (P x') A (P x') = {}^t x' ({}^t P A P) x'$$

に変化する. ここで ${}^t P A P$ が対角行列になったとすると, 2次形式は

$$d_1 x_1'^2 + d_2 x_2'^2 + \cdots + d_n x_n'^2$$

の形になる. これを ${}^t x A x$ の標準形という. うまく直交行列を選んで2次形式を標準形にすることができ, 得られた標準形の係数には A の固有値が現れる, というのが第5章で学んだことである. ここでは, P を直交行列に限っていないことに注意する.

例 4.1. 2次形式 $x^2 + 2xy + 4y^2$ は,

$$(x + y)^2 + 3y^2 \quad \text{と} \quad 4\left(y + \frac{1}{4}x\right)^2 + \frac{3}{4}x^2$$

の両方で表される. このときの標準形と座標変換の行列は, それぞれ次のようになる.

$$x'^2 + 3y'^2 \quad \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad 4x'^2 + \frac{3}{4}y'^2 \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -\frac{1}{4} \end{pmatrix}.$$

このように, 標準形は1つとは限らない. しかし, 次のことが知られている.

定理 4.1. (シルベスターの慣性律) 与えられた2次形式のどの標準形を比べても, 正の係数の個数および負の係数の個数は同じになっている.

問 4.1. 次の2次形式の標準形を2つ作りなさい.

(1) $x^2 - y^2 + z^2 + 2xy - 2yz + 2zx$

(2) $xy - yz - zx$

n 次対称行列 A で定まる 2 次形式 ${}^t\mathbf{x}A\mathbf{x}$ の標準形で, 正の係数が p 個, 負の個数が q 個あったとする. 必要なら座標軸を入れ替える座標変換をして, x'_1 から x'_p までの係数が正で, 次の x'_{p+1} から x'_{p+q} までの係数が負, x'_{p+q+1} から最後の x'_n までの係数が 0 としてよい. つまり, $d_1, d_2, \dots, d_{p+q} > 0$ として,

$$y = d_1 x'^2_1 + \dots + d_p x'^2_p - d_{p+1} x'^2_{p+1} - \dots - d_{p+q} x'^2_{p+q}$$

になっているとする. ここで, いくつかの場合に分けて考えてみる.

- (1). $p = n$ のとき: $q = 0$ だから, 原点以外では $y > 0$ で, 原点で最小値 0 をとる. このとき, 2 次形式 ${}^t\mathbf{x}A\mathbf{x}$ 及び A は **正定値** であるという.
- (2). $q = n$ のとき: 逆に, 原点で最大値 0 をとり, 他の点では $y < 0$ である. 2 次形式 ${}^t\mathbf{x}A\mathbf{x}$ は **負定値** であるという.
- (3). $p < n, q = 0$ のとき: このときは負にはならないが, 原点以外の

$$x'_1 = x'_2 = \dots = x'_p = 0$$

をみたす点で $y = 0$ になる. これらの点の全体が $n - p$ 次元部分空間であることはすぐ確かめられるが, 実はそれが $\text{Ker}A = \{\mathbf{x} : A\mathbf{x} = 0\}$ になっていることを示すのも,それほど難しくない. このときは, ${}^t\mathbf{x}A\mathbf{x}$ は **非負定値** であるといわれる.

- (4). $p = 0, q < n$ のとき: 逆に $\text{Ker}A$ の点で $y = 0$ になり, それ以外では $y < 0$ である. このときは **非正定値** とよばれる.

次のことは明らかだろう.

定理 4.2. 2 次形式 ${}^t\mathbf{x}A\mathbf{x}$ が正定値であるためには, A の固有値がみな正であることが必要十分である.

次の定理はそれほど明らかではないが, 行列式が使えるので便利である.

定理 4.3. 2 次形式 ${}^t\mathbf{x}A\mathbf{x}$ が正定値であるためには, $r = 1, 2, \dots, n$ に対して

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1r} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{r1} & \dots & a_{rr} \end{vmatrix} > 0$$

が成り立つことである.

問 4.2. 2 次形式 $2x^2 + y^2 + z^2 + w^2 - xy + yz + zw - wx$ は正定値であることを示せ.

次に, 変分原理について述べよう.

問 4.3. 次の等式を確かめよ.

$${}^t\mathbf{x}A\mathbf{x} - {}^t\mathbf{x}_0A\mathbf{x}_0 = {}^t(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)A(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) + 2{}^t\mathbf{x}_0A(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)$$

定理 4.4. (変分原理) 正値対称行列 A とベクトル $\mathbf{b}$ から定まる $\mathbf{x}$ の 2 次式

$$f(\mathbf{x}) = {}^t\mathbf{x}A\mathbf{x} + 2{}^t\mathbf{b}\mathbf{x} + c$$

は, 1 次方程式

$$A\mathbf{x} + \mathbf{b} = \mathbf{0} \quad (7.29)$$

の解 $\mathbf{x}_0$ で最小値をとる.

証明 問 4.3 より

$$\begin{aligned} f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}_0) &= {}^t\mathbf{x}A\mathbf{x} - {}^t\mathbf{x}_0A\mathbf{x}_0 + 2{}^t\mathbf{b}\mathbf{x} - 2{}^t\mathbf{b}\mathbf{x}_0 \\ &= {}^t(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)A(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) + 2{}^t\mathbf{x}_0A(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) + 2{}^t\mathbf{b}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) \\ &= {}^t(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)A(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) + 2({}^t\mathbf{x}_0A + {}^t\mathbf{b})(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0), \end{aligned}$$

ここで,

$${}^t(A\mathbf{x}_0 + \mathbf{b}) = {}^t\mathbf{x}_0{}^tA + {}^t\mathbf{b} = {}^t\mathbf{x}_0A + {}^t\mathbf{b} = \mathbf{0}$$

だから,

$$f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}_0) = {}^t(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)A(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) > 0$$

が $\mathbf{x} \neq \mathbf{x}_0$ について成り立つ. $\square$

最後に固有値, 固有ベクトルの重要さを示す定理を述べる.

定理 4.5. 対称行列 A に対して, $NR(A) = \{{}^t\mathbf{x}A\mathbf{x} : |\mathbf{x}| = 1\}$ とする. つまり, $NR(A)$ は長さ 1 のベクトルに対する 2 次形式の値の全体である. このとき, $NR(A)$ は閉区間で, その両端は A の固有値のなかで最小のものと最大のものである. また, その両端の値をとる点は, それぞれの固有値に対する固有ベクトルである.

5 その他の応用

ここで挙げた行列の応用は狭い範囲に限られている. たとえば, フーリエ変換は機械工学や電気回路はもちろん, X 線分析, MRI などの広い範囲で使われている. もともとは積分で定義されたものだが, これをコンピュータなどの機械で扱うには数値化する必要があり, 離散フーリエ変換というものが使われている. これを表すには行列が不可欠である.

また, 現代の物理学は相対論と量子力学が柱になっているが, どちらでも行列が重要な役目を果たし, 量子論の舞台はヒルベルト空間というある種の線形空間, 状態はそこでの固有値である.

そもそも, 微分, 積分は関数から関数への線形な作用であるから, 線形代数と密接につながっていて, 決してばらばらなものではないのである.

付録

1 付録 1: 階段行列の一意性

階段行列は, 行列 A によって一意的に定まることが, 次の定理からわかる.

定理 1.1. (m, n) 行列 A が階段行列, P が m 次正則行列で, PA も階段行列であるならば, $PA = A$ である.

証明. A は第 2 章 (2.1) のような階段行列であるとする. $P = (P_1 P_2 \cdots P_m)$ とするとき

$$P_j = e_j \quad (j = 1, \dots, n)$$

であることを示せばよい.

いま仮に, ある $s \leq n$ について, $P_j = e_j$ ($j = 1, \dots, s-1$), $P_s \neq e_s$ であつたとする. このとき $P_n = {}^t(P_1, P_2, \dots, P_m)$ とすると

$$PA = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 & * & \cdots & * & 0 & * & \cdots & * & 0 & * & \cdots & * & P_1 \\ & & & 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 & * & \cdots & * & 0 & * & \cdots & * & P_2 & * \\ & & & & & & & & & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \\ & & & & & & & & & & 0 & 1 & * & \cdots & * & P_{s-1} & * \\ & & & & & & & & & & & 0 & \cdots & \cdots & 0 & P_s & \\ & & & & & & & & & & & & & & \vdots & * \\ & & & & & & & & & & & & & & P_m & \end{pmatrix} \quad (8.1)$$

P が正則行列だから $(P_s, \dots, P_m) \neq (0, \dots, 0)$. よつて PA が階段行列であるから $P_s = e_s$ でなければならないが, これは仮定に反する. ゆえに (A.1) が成り立ち, 主張を得る.

2 付録 2 : 2 次・3 次の行列式と面積・体積

行列式の幾何学的意味について, ここで考えておく.

平面の 2 つのベクトル $\mathbf{a} = \overrightarrow{OA}$, $\mathbf{b} = \overrightarrow{OB}$ に対して, 実数 $D(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ を次のように定める:

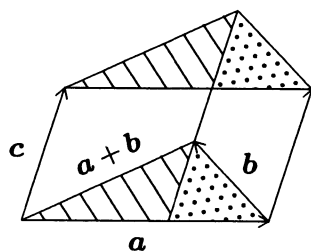
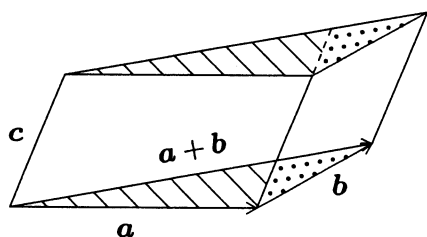
- (1) $D(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ の絶対値は, OA, OB を 2 辺とする平行四辺形の面積に等しい.
- (2) $D(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ の符号は, $\mathbf{a}$ を正の向き (時計と反対回り) に 180° 以内回転して $\mathbf{b}$ の方向が得られるときは正, 負の向きに 180° 以内回転して $\mathbf{b}$ の方向が得られるときは負である. ただし, $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ のどちらかが $\mathbf{0}$ であるときや, $\mathbf{a}$ と $\mathbf{b}$ の向きが同じか逆であるときは, $D(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = 0$ とする. 次が成り立つ.

$$D(\mathbf{a} + \mathbf{b}, \mathbf{c}) = D(\mathbf{a}, \mathbf{c}) + D(\mathbf{b}, \mathbf{c}) \quad (8.2)$$

$$D(\mathbf{a}, \mathbf{b} + \mathbf{c}) = D(\mathbf{a}, \mathbf{b}) + D(\mathbf{a}, \mathbf{c}) \quad (8.3)$$

$$D(k\mathbf{a}, \mathbf{b}) = D(\mathbf{a}, k\mathbf{b}) = kD(\mathbf{a}, \mathbf{b}) \quad (8.4)$$

ここで, $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ はベクトル, k は実数である. たとえば, (8.2) は下図からわかる.



定理 2.1. $\mathbf{a} = (a_1, a_2), \mathbf{b} = (b_1, b_2)$ のとき,

$$D(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}.$$

証明. $\mathbf{e}_1 = (1, 0), \mathbf{e}_2 = (0, 1)$ とすると,

$$D(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_1) = D(\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_2) = 0, \quad D(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2) = 1, \quad D(\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_1) = -1.$$

いま,

$$\mathbf{a} = a_1\mathbf{e}_1 + a_2\mathbf{e}_2, \quad \mathbf{b} = b_1\mathbf{e}_1 + b_2\mathbf{e}_2$$

であるから, (8.2) ~ (8.4) から,

$$\begin{aligned} D(\mathbf{a}, \mathbf{b}) &= a_1b_1D(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_1) + a_1b_2D(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2) + a_2b_1D(\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_1) + a_2b_2D(\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_2) \\ &= a_1b_2 - a_2b_1. \quad \square \end{aligned}$$

例 2.1. $A(1, 6)$, $B(5, 2)$ と O を頂点とする 3 角形の面積は,

$$\frac{1}{2} \left| \det \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 6 & 2 \end{pmatrix} \right| = \frac{1}{2} |-28| = 14.$$

例 2.2. 直線 $l: ax + by + c = 0$ の上に点 $A(x_1, y_1)$ をとる. 点 $B(x_1 + b, y_1 - a)$ も l 上の点である. いま, l 上にない点 $P(x_0, y_0)$ をひとつとると, $\triangle ABP$ の面積は

$$\frac{1}{2} \left| \det \begin{pmatrix} x_1 - x_0 & x_1 + b - x_0 \\ y_1 - y_0 & y_1 - a - y_0 \end{pmatrix} \right| = \frac{1}{2} |-a(x_1 - x_0) - b(y_1 - y_0)| = \frac{1}{2} |ax_0 + by_0 + c|.$$

$AB = \sqrt{a^2 + b^2}$ であるから, 点 P と直線 l との距離は,

$$\frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

であることがわかる.

次に 3 次の行列式について同様のことを考える. 空間に 3 つのベクトル $\mathbf{a} = \overrightarrow{OA}$, $\mathbf{b} = \overrightarrow{OB}$, $\mathbf{c} = \overrightarrow{OC}$ があるとし, $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ のどの 2 つも平行でないとする. 3 点 O, A, B を含む平面を地面と考え, $\mathbf{a}$ の方向を東, $\mathbf{b}$ の方向を東西に対して北寄りとし, $\mathbf{c}$ の方向が上向きであるか下向きであるかによって, $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ は 右手系 あるいは 左手系 であるという. 実数 $D(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})$ を次の (1), (2) で定める:

(1) $D(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})$ の絶対値は, OA, OB, OC を 3 辺とする平行 6 面体の体積に等しい.

(2) $D(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})$ の符号は, $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ が右手系のときは 正, 左手系のときは 負 である.

$\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ のどれかが $\mathbf{0}$ であるときや, $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ の中の 2 つが平行のときは, $D(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) = 0$ と定める.

(8.2), (8.3), (8.4) と同様な次の式が成り立つ.

$$D(\mathbf{a} + \mathbf{a}', \mathbf{b}, \mathbf{c}) = D(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) + D(\mathbf{a}', \mathbf{b}, \mathbf{c}) \quad (8.5)$$

$$D(\mathbf{a}, \mathbf{b} + \mathbf{b}', \mathbf{c}) = D(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) + D(\mathbf{a}, \mathbf{b}', \mathbf{c}) \quad (8.6)$$

$$D(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c} + \mathbf{c}') = D(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) + D(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}') \quad (8.7)$$

$$D(k\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) = D(\mathbf{a}, k\mathbf{b}, \mathbf{c}) = D(\mathbf{a}, \mathbf{b}, k\mathbf{c}) = kD(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) \quad (8.8)$$

ただし, $\mathbf{a}, \mathbf{a}', \mathbf{b}, \mathbf{b}', \mathbf{c}, \mathbf{c}'$ はベクトル, k は実数である.

定理 2.2. $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$, $\mathbf{b} = (b_1, b_2, b_3)$, $\mathbf{c} = (c_1, c_2, c_3)$ のとき,

$$D(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}.$$

証明. $e_1 = (1, 0, 0)$, $e_2 = (0, 1, 0)$, $e_3 = (0, 0, 1)$ とすると,

$$D(e_1, e_2, e_3) = D(e_2, e_3, e_1) = D(e_3, e_1, e_2) = 1$$

$$D(e_2, e_1, e_3) = D(e_1, e_3, e_2) = D(e_3, e_2, e_1) = -1$$

で, これら以外の $D(e_i, e_j, e_k)$ は 0 となる. いま,

$$a = a_1 e_1 + a_2 e_2 + a_3 e_3, \quad b = b_1 e_1 + b_2 e_2 + b_3 e_3, \quad c = c_1 e_1 + c_2 e_2 + c_3 e_3$$

ゆえ, (8.5) ~ (8.8) から

$$\begin{aligned} D(a, b, c) &= a_1 b_2 c_3 D(e_1, e_2, e_3) + a_2 b_3 c_1 D(e_2, e_3, e_1) \\ &\quad + a_3 b_1 c_2 D(e_3, e_1, e_2) + a_2 b_1 c_3 D(e_2, e_1, e_3) \\ &\quad + a_1 b_3 c_2 D(e_1, e_3, e_2) + a_3 b_2 c_1 D(e_3, e_2, e_1) \\ &= a_1 b_2 c_3 + a_2 b_3 c_1 + a_3 b_1 c_2 - a_2 b_1 c_3 - a_1 b_3 c_2 - a_3 b_2 c_1 \\ &= \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}. \quad \square \end{aligned}$$

例 2.3. $A(1, -2, 1)$, $B(2, 3, 8)$, $C(3, -3, 4)$, $D(-1, -2, 2)$ とすると,

$$\overrightarrow{AB} = (1, 5, 7), \quad \overrightarrow{AC} = (2, -1, 3), \quad \overrightarrow{AD} = (-2, 0, 1)$$

で,

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 5 & -1 & 0 \\ 7 & 3 & 1 \end{vmatrix} = -55$$

よって, AB, AC, AD を 3 辺とする平行 6 面体の体積は 55 である.

問 2.1. 次のベクトル a, b, c が右手系であるか左手系であるか判定せよ.

- (1) $a = (6, 0, 0)$, $b = (-1, -2, 0)$, $c = (2, 3, 1)$
- (2) $a = (0, 2, 0)$, $b = (3, -1, 0)$, $c = (-2, 0, -4)$
- (3) $a = (1, 3, 1)$, $b = (-2, 0, 0)$, $c = (0, 0, 4)$

3 付録 3: 多項式

定理 3.1. $f_1(x), \dots, f_n(x)$ を 1 次以上の共通な因子をもたない多項式とする (最大公約数が 1). このとき,

$$g_1(x) \cdot f_1(x) + \dots + g_n(x) \cdot f_n(x) = 1$$

となる多項式 $g_1(x), \dots, g_n(x)$ が存在する.

証明. 任意の多項式 $h_1(x), \dots, h_n(x)$ で

$$h_1(x) \cdot f_1(x) + \dots + h_n(x) \cdot f_n(x)$$

と表される多項式全体の集合 M の中で, 次数の最小のものを $f_0(x)$ とする. いま,

$$f_0(x) = g_1(x) \cdot f_1(x) + \dots + g_n(x) \cdot f_n(x)$$

としたとき, M の要素は $f_0(x)$ で割り切れる. なぜならば, 任意の $F(x) \in M$ について,

$$F(x) = p(x) \cdot f_0(x) + r(x), \quad r(x) \text{ の次数} < f_0(x) \text{ の次数}$$

とおくと, M の定義から

$$r(x) = F(x) - p(x) \cdot f_0(x) \in M$$

となるので, $f_0(x)$ が M の要素で次数が最小であることに矛盾する. したがって, M の要素は $f_0(x)$ で割り切れる. ここで,

$$\begin{aligned} f_1(x) &= 1 \cdot f_1(x) + 0 \cdot f_2(x) + \dots + 0 \cdot f_n(x) \\ f_2(x) &= 0 \cdot f_1(x) + 1 \cdot f_2(x) + \dots + 0 \cdot f_n(x) \\ &\dots \quad \dots \quad \dots \\ f_n(x) &= 0 \cdot f_1(x) + 0 \cdot f_2(x) + \dots + 1 \cdot f_n(x) \end{aligned}$$

より, $f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x) \in M$ であるので,

$$f_1(x) = p_1(x) \cdot f_0(x), \quad f_2(x) = p_2(x) \cdot f_0(x), \quad \dots, \quad f_n(x) = p_n(x) \cdot f_0(x)$$

となっている. したがって, $f_0(x)$ は $f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x)$ の公約数である. また, これらの多項式の最大公約数は 1 であるので, $f_0(x) = 1$ すなわち,

$$g_1(x) \cdot f_1(x) + \dots + g_n(x) \cdot f_n(x) = 1.$$

与えられた $f_1(x), \dots, f_n(x)$ に対して, $g_1(x), \dots, g_n(x)$ を見つけるには **Euclid** の互除法による. ここでは, 2 つの多項式の場合で説明しよう.

$$\begin{aligned}f_1(x) &= x^4 + x^2 - 2 = (x+1)(x-1)(x^2+2), \\f_2(x) &= x^3 - x^2 - x - 2 = (x-2)(x^2+x+1)\end{aligned}$$

のとき, $f_1(x)$ を $f_2(x)$ で割ると,

$$f_1(x) = (x+1)f_2(x) + 3(x^2+x).$$

次に, $f_2(x)$ を x^2+x で割ると

$$f_2(x) = (x-2)(x^2+x) + (x-2).$$

最後に, x^2+x を $x-2$ で割ると,

$$x^2+x = (x+3)(x-2) + 6$$

であるから,

$$\begin{aligned}6 &= (x^2+x) - (x+3)(x-2) \\&= (x^2+x) - (x+3)\{f_2(x) - (x-2)(x^2+x)\} \\&= -(x+3)f_2(x) + \{(x+3)(x-2)+1\}(x^2+x) \\&= -(x+3)f_2(x) + (x^2+x-5)\frac{1}{3}\{f_1(x) - (x+1)f_2(x)\} \\&= \frac{1}{3}(x^3+x-5)f_1(x) + \left\{-(x+3) - \frac{1}{3}(x^2+x-5)(x+1)\right\}f_2(x) \\&= \frac{1}{3}(x^2+x-5)f_1(x) - \frac{1}{3}(3x+9+x^3+2x^2-4x-5)f_2(x)\end{aligned}$$

より,

$$\frac{1}{18}(x^2+x-5)f_1(x) - \frac{1}{18}(x^3+2x^2-x+4)f_2(x) = 1.$$

解答

第1章

問 1.1. $\begin{pmatrix} -3 & -6 & -9 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 5 \end{pmatrix}, (1 \ 3 \ 5).$

問 2.1. (1) $\begin{pmatrix} \pm\sqrt{5} & 0 \\ 0 & \pm 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \pm\sqrt{5} & 0 \\ 0 & \mp 3 \end{pmatrix}$ (2) なし (3) $\pm \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

問 3.1. 略

問 3.2. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

問 3.3 $\begin{pmatrix} 1 & -a & ac-b \\ 0 & 1 & -c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

第1章練習問題

1. (1) $\begin{pmatrix} 0 & 9 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$

(3) $\begin{pmatrix} 7 & 25 \\ 0 & 1 \\ 5 & 20 \end{pmatrix}$

(5) $\begin{pmatrix} 2 & 12 & 9 \\ 5 & 10 & 8 \\ -2 & -2 & 2 \end{pmatrix}$

(7) $\begin{pmatrix} \alpha^n & n\alpha^{n-1} & \frac{n(n-1)}{2}\alpha^{n-2} \\ 0 & \alpha^n & n\alpha^{n-1} \\ 0 & 0 & \alpha^n \end{pmatrix}$

(2) $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -5 & -8 \\ 6 & -15 \end{pmatrix}$

(4) $\begin{pmatrix} 23 & 62 \\ 4 & 34 \end{pmatrix}$

(6) 7

(8) $\begin{pmatrix} \alpha^n & n\alpha^{n-1} & 0 & 0 \\ 0 & \alpha^n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \beta^n & n\beta^{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & \beta^n \end{pmatrix}$

ただし, (7), (8) では $0^{-1} = 0^0 = 1$ と約束する.

2. (1) $a = 1$ (2) $b = 1, -\frac{1}{2}$ (3) $3ab - a - 4b + 2 = 0$ (4) $a = 1$ かつ $b = 1$
 (5) $(a + 2b - 1)(2 - a + b) = 0$ (6) $a = b = 1$

3. $(a_1, a_2, a_3) = (\pm 1/\sqrt{6}, \mp 1/\sqrt{6}, \pm 2/\sqrt{6})$

4. $a = 2, -3$

5. (1) $\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -4 & 3 \end{pmatrix}$ (2) $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 8 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

(3) $\alpha = 0$ のとき逆行列は存在しない. $\alpha \neq 0$ のとき $\begin{pmatrix} \alpha^{-1} & -\alpha^{-2} & \alpha^{-3} \\ 0 & \alpha^{-1} & -\alpha^{-2} \\ 0 & 0 & \alpha^{-1} \end{pmatrix}$

(4) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

6. (1) $A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & ab \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, A^3 = A^4 = A^{10} = O$

(2) $A^2 = A^4 = A^{10} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, A^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

(3) $A^2 = A^4 = A^{10} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, A^3 = \begin{pmatrix} a & 1-a \\ 1+a & -a \end{pmatrix}$

7. 直接計算して $(E_n + B(E_n - AB)^{-1}A)(E_n - BA) = E_n$ を確かめればよい.

第2章

問 2.1. (1) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ (2) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 29 \\ 0 & 1 & -12 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ (3) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 18 & 0 \\ 0 & 1 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

問 3.1. (1) 3 (2) 3

問 4.1. (1) 解なし

(2) 例えば $x_4 = c$ (c は任意の定数) として

$$x_1 = -\frac{7c+2}{3}, x_2 = \frac{5c-5}{3}, x_3 = -\frac{4c+2}{3}, x_4 = c.$$

(3) $x = -6, y = 23/2, z = 17/2.$

問 5.1. 省略

問 5.2. (1) $-a_1 - a_2 + a_3 = 0$ (2) $5a_1 - 3a_2 - a_3 = 0$

問 5.3. (1) 1 つ (2) 2 つ

問 6.1. (1) $\begin{pmatrix} -6 & 2 & -1 \\ 19 & -7 & 2 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ (2) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 3 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$

第2章練習問題

1. (1) 3 (2) 2 (3) 3 (4) 3 (5) 2 (6) 2
 (7) $a = b = 0$ のとき 0, $a = b$ のとき 1. $a = -2b$ のとき 2. それ以外では 3
 (8) $a = b = c$ のとき 1, $a = b$ または $a = c$ もしくは $b = c$ のとき 2, それ以外では 3
 (9) $a = 1$ のとき 2. それ以外では 4

2. (1) $x = \frac{1}{4}, y = -\frac{3}{4}, z = \frac{1}{4}$
 (2) $x = 2, y = 3, z = 0, w = -1$
 (3) 解なし
 (4) $x = 2a - 3b + 2, y = a, z = b$, (a, b は任意の数)
 (5) $x = z = a, y = -a$, (a は任意の数)
 (6) $x = -2a - 4b + 3c, y = a, z = b - c, w = b, u = c$, (a, b, c は任意の数)
 (7) 解なし
 (8) $x = -2a - b + 2, y = a, z = 2b - 2, w = b$, (a, b は任意の数)
 (9) $x = y = z = 1$
 (10) $x = y = z = 0$

3. $2a_1 - a_2 - 2a_3 = 0$

4. $a = 1, b = 2, x = \frac{7}{5} - c + \frac{2}{5}d, y = \frac{3}{5} - c + \frac{3}{5}d, z = c, w = d$, (c, d は任意の数)

5. (1) 2 個 (2) 2 個

6. (1) $\frac{1}{10} \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ (2) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ (3) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$
 (4) $\begin{pmatrix} 4 & 18 & -16 & -3 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & -3 & 0 \\ 1 & 6 & -5 & -1 \end{pmatrix}$ (5) $\begin{pmatrix} ab & -a & 1 \\ -b & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ (6) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -a \\ 0 & 1 & -b & ab \\ 1 & -c & bc & -abc \end{pmatrix}$

第3章

問 1.1. (1) 1 (2) 1 (3) -1 (4) -1 問 1.2 は 問 1.1 に同じ.

問 2.1. (1) -10 (2) 7 (3) 2

問 2.2. 25

問 4.1. $x = 1, 3$

問 4.2. $(a-b)(b-c)(c-a)(a+b+c)$

問 4.3. (1) -12 (2) -10 (3) -3 (4) 0

問 6.1. (1) -307 (2) -272

問 7.1. $-\frac{1}{33} \begin{pmatrix} -5 & 1 & 6 \\ -12 & 9 & -12 \\ -3 & -6 & -3 \end{pmatrix}$

問 7.2. $x=2, y=-1, z=3$

問 7.3. $14/307$

問 8.1. (1) 2 (2) 3

問 7.3. 略

第3章練習問題

1. (1) -1 (2) -1 (3) -1
(4) -1 (5) -1 (6) $n=4k, 4k+1$ のとき 1, $n=4k+2, 4k+3$ のとき -1

2. (1) 98 (2) 1 (3) -272 (4) -307 (5) 0
(6) 0 (7) 128 (8) $1!2!3!4!5!$ (9) $(-1)^{\frac{(n+1)(n+2)}{2}} n!$

3. (1) $(\alpha+\beta+\gamma+\delta)(\alpha+\beta-\gamma-\delta)(\alpha-\beta+\gamma-\delta)(\alpha-\beta-\gamma+\delta)$
(2) $(a-b)(b-c)(c-a)(a^2+b^2+c^2+ab+bc+ca)$
(3) $4a^2b^2c^2$ (4) $(d-a)(e-b)(f-c)$
(5) $-(a+b+c)(a-b)(b-c)(c-a)$
(6) $-(a+b+c)(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)$
(7) $(x-a)(x-b)(x-c)$ (8) $(x+3a)(x-a)^3$ (9) 0
(10) $-(u-v)^4$ (11) a^8+a^4+1 (12) $x^3(x+a+b+c+d)$

4. (1) $\frac{1}{90} \begin{pmatrix} 29 & -19 & 11 \\ -13 & -7 & 23 \\ 4 & 16 & -14 \end{pmatrix}$ (2) $\frac{1}{63} \begin{pmatrix} -7 & 19 & -2 \\ 21 & -3 & -3 \\ -14 & -7 & 14 \end{pmatrix}$ (3) $\begin{pmatrix} 2 & 11 & -9 \\ -2 & -7 & 6 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$
(4) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ (5) $\frac{1}{10} \begin{pmatrix} 4 & 2 & 0 \\ -3 & -4 & 5 \\ -5 & 0 & 5 \end{pmatrix}$ (6) $\frac{1}{11} \begin{pmatrix} -1 & 3 & 10 \\ -2 & 6 & 9 \\ 2 & 5 & 2 \end{pmatrix}$
(7) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ (8) $\begin{pmatrix} ab & -a & 1 \\ -b & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ (9) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -a \\ 0 & 1 & -b & ab \\ 1 & -c & bc & -abc \end{pmatrix}$

5. (1) 省略 (2) 省略 (3) 帰納法による

6. (1) $x=\frac{26}{21}, y=\frac{25}{21}, z=\frac{5}{7}$ (2) $x=-2, y=3, z=1$
(3) $x=-\frac{103}{55}, y=\frac{32}{55}, z=\frac{368}{55}$ (4) $x=3, y=1, z=-2$
(5) $x=7, y=-3, z=1$ (6) $x=5, y=-3, z=-2$
(7) $x=4, y=3, z=-2$ (8) $x=2, y=3, z=4$
(9) $x=\frac{17}{5}, y=-\frac{33}{5}, z=\frac{31}{5}$

7. 8. 省略

第4章

問 1.1. 省略

問 1.2. (1) 1次独立 (2) 1次従属 (3) 1次独立 (4) 1次独立

問 2.1. (1) 2 (2) 1 (3) 2

問 4.1. (1) 固有値 1, 3 固有ベクトル $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ (2) 固有値 -2, 5 固有ベクトル $\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ (3) 固有値 -1, 1, 2 固有ベクトル $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ (4) 固有値 1, 1, 3 固有ベクトル $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ 問 6.1. (1) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ として, $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ (2) $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ として, $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$ (3) $P = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ -2 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$ として, $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

第4章練習問題

1. (1) 1次独立 (2) 1次従属 (3) 1次従属

2. $m = \frac{3}{7}$

3. (1) 1次従属 (2) 1次従属 (3) 1次独立 (4) 1次独立

4. $\alpha = 2, \beta = 1$ 5. (1) 固有値 1, 2, 固有ベクトル $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ (2) 固有値 $\frac{3 \pm \sqrt{17}}{2}$, 固有ベクトル $\begin{pmatrix} 1 \\ -3 + \sqrt{17} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -3 - \sqrt{17} \end{pmatrix}$ (3) 固有値 $\frac{3 \pm \sqrt{1+4a^2}}{2}$, 固有ベクトル $\frac{1 \pm \sqrt{1+4a^2}}{2} \begin{pmatrix} a \\ -1 \end{pmatrix}$ (4) 固有値 -1, -1, 8, 固有ベクトル $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ (5) 固有値 -1, -1, 5, 固有ベクトル $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$

(6) 固有値 1, 2, 4, 固有ベクトル $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

6. 省略

7. (1) $P = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$
 (2) $P = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$
 (3) 対角化不可能
 (4) $P = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}, P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

第5章

問 1.1. 省略

問 1.2. (1) $(a, b) = 5, \theta = \frac{\pi}{4}$ (2) $(a, b) = 5, \theta = \frac{\pi}{3}$ (3) $(a, b) = 18, \theta = \frac{\pi}{4}$

問 1.3. (1) $\alpha = 2$ (2) $\pm \left(\frac{5}{\sqrt{30}}, -\frac{2}{\sqrt{30}}, \frac{1}{\sqrt{30}} \right)$

問 1.4. (1) (2) 省略 (3) $(a, b \times c) = |a| \cdot |b \times c| \cdot \cos \theta$ より平行六面体の体積である。

問 2.1. 省略

問 3.1. 例えば $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$

問 3.2. (1) $\dim L_1 = 0, \dim L_2 = 1, \dim L_3 = 1, \dim L_4 = 2, \dim L_5 = 2, \dim L_6 = 3$

(2) $L_2 = \{a_2\}, L_3 = \{a_2\}$ または $\{a_3\}, L_4 = \{a_2, a_4\}$ または $\{a_3, a_4\}$, 以下省略

問 4.1. 省略

問 4.2. (1) $R(f) = L\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right), \text{Ker}(f) = L\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$, 次元はどちらも 1,

(2) $R(g) = L\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$, 次元 = 2, $\text{Ker}(g) = L\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$, 次元 = 1

問 5.1. $\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 5 & 5 & 6 \\ 5 & -1 & 4 \end{pmatrix}$

問 6.1. (1) $x, y \in W^\perp, \lambda \in \mathbb{C}$ とすると, 任意の $z \in W$ に対して,

$$(x + y, z) = (x, z) + (y, z) = 0.$$

(2) $x \in W_2^\perp$ とすると, $W_1 \subset W_2$ より, すべての $y \in W_1$ に対して $y \in W_2$ になることがわかり, $(x, y) = 0$ となることから, $x \in W_1^\perp$.

問 6.2. 例えば $\left\{ \begin{pmatrix} \frac{4}{5} \\ 0 \\ \frac{3}{5} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{3}{5} \\ 0 \\ -\frac{4}{5} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$

問 6.3. $\left\{ \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} \\ -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix} \right\}$

問 7.1. 省略

問 8.1. (1) 1, 3, $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ (2) -1, 1, 2, $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$
 (3) 1, 1, 3, $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ (4) -1, 2, 2, $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

問 8.2. 固有ベクトルは $x \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ であるから.

問 8.3. (1) $P = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{10}} & \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{15}} \\ -\frac{2}{\sqrt{10}} & \frac{3}{\sqrt{15}} \end{pmatrix}$, ${}^tPAP = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$
 (2) $P = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}$, ${}^tPAP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$
 (3) $P = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}$, ${}^tPAP = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

問 8.4. (1) $-x^2 + 5y^2$ (2) $-x^2 + 3y^2$ (3) $-x^2 + 2y^2 + 2z^2$

第 5 章練習問題

1. 例えば $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$

2. 省略

3. (1) yes (2) no (3) no (4) no

4. (1) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ (2) $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ (3) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

5. $\begin{pmatrix} -3 & 2 & 0 \\ 9 & -7 & 3 \end{pmatrix}$

6. (1) $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -4 & -2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ (2) $\begin{pmatrix} -2 & 6 \\ 4 & -6 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}$

7. (1) $a = -\frac{2}{\sqrt{6}}, b = \frac{1}{\sqrt{3}}, c = \frac{1}{\sqrt{2}}$ (2) $a = \pm 1, b = c = \pm \frac{1}{2}$

8. (1) 例えば $\{a, b\}$ (2) 例えば $\left\{ a = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

9. 例えば, $\left\{ \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} \\ -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{2}{\sqrt{6}} \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

10. 例えば, $\left\{ \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\frac{1}{30} \\ \frac{2}{30} \\ \frac{5}{30} \\ 0 \end{pmatrix} \right\},$

11. (1) $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ (2) $\begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{3}{2} \\ \frac{1}{3} & -1 \end{pmatrix}$

12. (1) $\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ (2) $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{3}{2} & 1 \\ 2 & -3 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

13. (1) 固有値 2, 基底 $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

(2) 固有値 -1, 1, 2, 基底 $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}, \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}, \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

(3) 固有値 1, $1-2a$, $1+2a$, 基底 $\left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}, \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}, \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}, \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

14. (1). (a) ${}^t x \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} x$ (b) $2, 0, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

(c) $P = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}, P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ (d) $2x^2$,

(2). (a) ${}^t x \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 3 & -3 \end{pmatrix} x$ (b) $6, -4, \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}$

(c) $P = \begin{pmatrix} \frac{3}{\sqrt{10}} & \frac{1}{\sqrt{10}} \\ \frac{1}{\sqrt{10}} & -\frac{3}{\sqrt{10}} \end{pmatrix}, P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}$ (d) $6x^2 - 4y^2$

(3). (a) ${}^t x \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} x$ (b) $2 \pm \sqrt{2}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 - \sqrt{2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 + \sqrt{2} \end{pmatrix}$

(c) $P = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2(2-\sqrt{2})}} & \frac{1}{\sqrt{2(2+\sqrt{2})}} \\ \frac{1-\sqrt{2}}{\sqrt{2(2-\sqrt{2})}} & \frac{1+\sqrt{2}}{1+\sqrt{2(2+\sqrt{2})}} \end{pmatrix}, P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 2+\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 2-\sqrt{2} \end{pmatrix}$

(d) $(2+\sqrt{2})x^2 + (2-\sqrt{2})y^2$

$$(4). (a) {}^t\mathbf{x} \begin{pmatrix} 2 & -6 & 0 \\ -6 & 18 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{x} \quad (b) 20, 0, 0, \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$(c) P = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{10}} & \frac{3}{\sqrt{10}} & 0 \\ -\frac{3}{\sqrt{10}} & \frac{1}{\sqrt{10}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 20 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (d) 20x^2$$

$$(5). (a) {}^t\mathbf{x} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{x} \quad (b) 1, 1 + \sqrt{2}, 1 - \sqrt{2}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 + \sqrt{2} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 - \sqrt{2} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$(c) P = \begin{pmatrix} 0 & \frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2(2+\sqrt{2})}} & \frac{1-\sqrt{2}}{\sqrt{2(2-\sqrt{2})}} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2(2+\sqrt{2})}} & \frac{1}{\sqrt{2(2-\sqrt{2})}} \end{pmatrix}, P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 + \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 - \sqrt{2} \end{pmatrix}$$

$$(d) x^2 + (\sqrt{2} + 1)y^2 - (\sqrt{2} - 1)z^2$$

$$(6). (a) {}^t\mathbf{x} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{x} \quad (b) 2, 1, -1, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$(c) P = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & -\frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}, P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$(d) 2x^2 + y^2 - z^3$$

$$(7). (a) {}^t\mathbf{x} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{x} \quad (b) 2, 1, 0, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$(c) P = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (d) 2x^2 + y^2$$

$$(8). (a) {}^t\mathbf{x} \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix} \mathbf{x} \quad (b) 3, 0, -3, \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$(c) P = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}, P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

$$(d) 3x^2 - 3z^2$$

$$(9). (a) {}^t\mathbf{x} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix} \mathbf{x} \quad (b) 3, 1, -4, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$(c) P = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}$$

$$(d) 3x^2 + y^2 - 4z^2$$

$$(10). (a) {}^t\mathbf{x} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \mathbf{x} \quad (b) \sqrt{3}, -\sqrt{3}, -1, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 + \sqrt{3} \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 - \sqrt{3} \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$(c) P = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2(3+\sqrt{3})}} & \frac{1}{\sqrt{2(3-\sqrt{3})}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1+\sqrt{3}}{\sqrt{2(3+\sqrt{3})}} & \frac{1-\sqrt{3}}{\sqrt{2(3-\sqrt{3})}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2(3+\sqrt{3})}} & \frac{1}{\sqrt{2(3-\sqrt{3})}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}, P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \sqrt{3} & 0 & 0 \\ 0 & -\sqrt{3} & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$(d) \sqrt{3}x^2 - \sqrt{3}y^2 - z^2$$

$$(11). (a) {}^t x \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} x$$

$$(b) 3, 1 + \sqrt{2}, 1 - \sqrt{2}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

$$(c) P = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}, P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 + \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 - \sqrt{2} \end{pmatrix}$$

$$(d) 3x^2 + (\sqrt{2} + 1)y^2 - (\sqrt{2} - 1)z^2$$

$$(12). (a) {}^t x \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} x \quad (b) 3, 0, 0$$

$$(c) P = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{2}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}, P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (d) 3x^2$$

第6章

問 1.1. $x = {}^t(x_1, x_2, \dots, x_n), y = {}^t(y_1, y_2, \dots, y_n)$ とすれば $(Ax, y) = \sum_{i=1}^n a_{1i}x_i\overline{y_1} + \dots + \sum_{i=1}^n a_{ni}x_i\overline{y_n}$,

$(x, A^*y) = x_1 \sum_{j=1}^n \overline{a_{j1}y_j} + \dots + x_n \sum_{j=1}^n \overline{a_{nj}y_j}$ より和の取り方を変えればよい.

問 1.2. (1) $(A + \alpha E)^* = A^* + \overline{\alpha}E$ より掛ければよい.

(2) $A - \alpha E$ が正規行列なので $\|(A - \alpha E)x\| = \|(A - \alpha E)^*x\|$ から.

(3) $\alpha(x, y) = (Ax, y) = (x, A^*y) = (x, \overline{\beta}y) = \beta(x, y)$ より.

問 2.1.

$$(1) P = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \quad P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$(2) P = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

問 3.1. 省略.

問 3.2. (1) $\Rightarrow$ (2) を示す. V の部分空間として, $U_i = W_1 + \cdots + W_{i-1} + W_{i+1} + \cdots + W_k$ とする. もちろん, (1) より $V = W_i \oplus U_i$ である. 一方, $\mathbf{x}_i \in W_i$, $\mathbf{y}_i \in U_i$ ($i = 1, 2, \dots, k$) として, $\mathbf{x}_1 + \cdots + \mathbf{x}_k = \mathbf{y}_1 + \cdots + \mathbf{y}_k$ が成り立つと仮定すると,

$$\mathbf{x}_i - \mathbf{y}_i = \sum_{j \neq i} \mathbf{x}_j - \sum_{j \neq i} \mathbf{y}_j \in W_i \cap U_i$$

が成り立つが, $V = W_i \oplus U_i$ より, $\mathbf{x}_i = \mathbf{y}_i$.

(2) $\Rightarrow$ (1) を示す. $\mathbf{x}_i \in W_i \cap U_i$ とすると, U_i の定義より $\mathbf{x}_i = \mathbf{x}_1 + \cdots + \mathbf{x}_{i-1} + \mathbf{x}_{i+1} + \cdots + \mathbf{x}_k$ と表すことができる. すると, (3) より, すべての $i = 1, 2, \dots, k$ に対して $\mathbf{x}_i = \mathbf{0}$ がわかり, (1) が示せた.

問 3.3. (1) 省略. (2) W_1 の正規直交基底を $\{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_r\}$ とすると, 任意の $\mathbf{x} \in V$ に対して

$$\mathbf{x}_1 = \sum_{k=1}^r (\mathbf{x}, \mathbf{e}_k) \mathbf{e}_k, \quad \mathbf{x}_2 = \mathbf{x} - \mathbf{x}_1$$

とおくと, $(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) = 0$ であるから, $\mathbf{x}_2 \in W_1^\perp$ であり, $V = W_1 + W_1^\perp$ であることがわかるので, (1) より $V = W_1 \oplus W_1^\perp$.

問 4.1. (1) シュワルツの不等式より, $\|A\mathbf{x}\|^2 = (A A^* \mathbf{x}, \mathbf{x}) \leq \|A A^* \mathbf{x}\| \|\mathbf{x}\|$ が成り立つ. よって, 行列ノルムの定義より $\|A\|^2 \leq \|A A^*\| \leq \|A\| \|A^*\|$ が成り立ち, $\|A\| \leq \|A^*\|$. 逆も同様.

(2) (1) の証明と (1) より, $\|A\|^2 \leq \|A A^*\| \leq \|A\| \|A^*\| = \|A\|^2$.

問 4.2. まず, $X \geq 0$ で正則のとき $E \geq X$ であれば $X^{-1} \geq E$ である. なぜなら $E \geq X$ の両側から $X^{-\frac{1}{2}}$ で挟むと $X^{-\frac{1}{2}} E X^{-\frac{1}{2}} \geq E$ となるので. したがって, $A \geq B$ の両側から $A^{-\frac{1}{2}}$ で挟むと $E \geq A^{-\frac{1}{2}} B A^{-\frac{1}{2}}$ となり, 上のことより, 逆行列をとればよい.

第6章練習問題

すべて与えられた行列は A と書き, ユニタリー行列は U と書く.

1.

$$(1) U = \begin{pmatrix} \frac{1+i}{2} & \frac{1+i}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \quad U^* A U = \begin{pmatrix} 1 - \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 1 + \sqrt{2} \end{pmatrix}$$

$$(2) U = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & i & 1-i \\ \sqrt{2}i & \sqrt{2} & 0 \\ 1 & i & -1+i \end{pmatrix}, \quad U^* A U = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 8i \end{pmatrix}$$

$$(3) U = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} \sqrt{3}i & 1 & \sqrt{2} \\ \sqrt{3} & i & \sqrt{2}i \\ 0 & 2 & -\sqrt{2} \end{pmatrix}, \quad U^* A U = \begin{pmatrix} 3+i & 0 & 0 \\ 0 & 3+i & 0 \\ 0 & 0 & i \end{pmatrix} \quad \text{II}$$

$$(4) U = \begin{pmatrix} \frac{i}{2} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{i}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{i}{\sqrt{2}} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}, \quad U^* A U = \begin{pmatrix} -\sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix}$$

$$(5) U = \begin{pmatrix} 0 & \frac{\sqrt{2}i}{2} & -\frac{\sqrt{2}i}{2} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{i}{\sqrt{2}} & -\frac{i}{2} & -\frac{i}{2} \end{pmatrix}, \quad U^* A U = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 - \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 + \sqrt{2} \end{pmatrix}$$

$$(6) U = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} -\sqrt{2} & \sqrt{3} & \sqrt{3}i \\ -\sqrt{2}i & 0 & \sqrt{3} \\ \sqrt{2} & \sqrt{3} & 0 \end{pmatrix}, \quad U^*AU = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$(7) U = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ \sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad U^*AU = \begin{pmatrix} 1+i & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2-2i \end{pmatrix}$$

$$(8) U = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \sqrt{2} & i & -i \\ \sqrt{2} & -i & i \\ 0 & \sqrt{2} & \sqrt{2} \end{pmatrix}, \quad U^*AU = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1-2\sqrt{2}i & 0 \\ 0 & 0 & 1+2\sqrt{2}i \end{pmatrix}$$

$$(9) U = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 4 & -1-3i & -1+3i \\ -4 & 1-3i & 1+3i \\ 2 & 4 & 4 \end{pmatrix}, \quad U^*AU = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3i & 0 \\ 0 & 0 & 3i \end{pmatrix}$$

$$2. (1) P = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad P^{-1} = -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 4 & -2 & 4 \\ -2 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

(2)

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \quad P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$3. \text{ 省略} \quad 4. (1) P = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} \quad (2) P = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 29 \\ 0 & 1 & 12 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix},$$

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \quad (3) P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & \frac{1}{2} \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (4) P =$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad (5) P = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$(6) P = \begin{pmatrix} 0 & -1 & \frac{1}{2} \\ 3 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \quad P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$5. (1) U = \frac{1}{\sqrt{10}} \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}, \quad |A| = \frac{\sqrt{10}}{5} \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$(2) U = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad |A| = \begin{pmatrix} \sqrt{5} & \sqrt{5} \\ \sqrt{5} & \sqrt{5} \end{pmatrix}$$

$$(3) U = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -4 & 3 \end{pmatrix}, \quad |A| = \begin{pmatrix} 10 & 5 \\ 5 & 10 \end{pmatrix} \quad \text{II}$$

$$(4) U = \begin{pmatrix} 0 & \frac{-i}{\sqrt{2}} & \frac{i}{\sqrt{2}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -i & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad |A| = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix}$$

$$(5) U = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad |A| = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

$$(6) U = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & -1+\sqrt{3} & 1+\sqrt{3} \\ -1-\sqrt{3} & 1 & -1+\sqrt{3} \\ 1-\sqrt{3} & -1-\sqrt{3} & 1 \end{pmatrix}, \quad |A| = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 5 & 1 & -1 \\ 1 & 5 & 1 \\ -1 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

Point: 3. においては解答は一通りではないことに注意しておく.

6.

$$(1) \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \quad (2) \begin{pmatrix} 4\sqrt{\frac{2}{5}} & 2\sqrt{\frac{2}{5}} \\ 2\sqrt{\frac{2}{5}} & \sqrt{\frac{2}{5}} \end{pmatrix} \quad (3) \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$(4) \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix} \quad (5) \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix} \quad (6) \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -2 \\ -1 & -2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$(7) \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & i & -2 \\ -i & 5 & i \\ -2 & -i & 2 \end{pmatrix} \quad (8) \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 5 & i & 1 \\ -i & 5 & i \\ 1 & -i & 5 \end{pmatrix}$$

$$(9) \begin{pmatrix} 3 & 1 & \sqrt{2} \\ 1 & 3 & -\sqrt{2} \\ \sqrt{2} & -\sqrt{2} & 2 \end{pmatrix} \quad (10) \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 4 & -4 & 2 \\ -4 & 4 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$7. \quad (1) 2^n \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} + 3^n \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} + n2^{n-1} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$(2) 3^n \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + n3^{n-1} \begin{pmatrix} -4 & -2 & 8 \\ -9 & -6 & 18 \\ -5 & -3 & 10 \end{pmatrix} + \frac{n(n-1)}{2} 3^{n-2} \begin{pmatrix} -6 & -4 & 12 \\ 0 & 0 & 0 \\ -3 & -2 & 6 \end{pmatrix}$$

$$8. \quad (1) \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (2) \frac{e^2}{2} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 2 & 4 & 0 \\ -1 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

第7章

問1.1. $A(t)$: n 行 n 列, $B(t)$: n 行 m 列, $C(t)$: l 行 n 列, $D(t)$: l 行 m 列.

問2.1.

$$e^O = e^{tO} = E + t \cdot O + \frac{1}{2!} t^2 \cdot O + \cdots = E.$$

$$\begin{aligned} e^{tA} \cdot e^{sA} &= (E + tA + \frac{1}{2!} t^2 A^2 + \cdots)(E + sA + \frac{1}{2!} s^2 A^2 + \cdots) \\ &= E + (t+s)A + \left\{ \frac{1}{2!} t^2 + (t+s) + \frac{1}{2!} s^2 \right\} A^2 \\ &\quad + \left\{ \frac{1}{3!} t^3 + \left(\frac{1}{2!} t^2 s + \frac{1}{2!} t s^2 \right) + \frac{1}{3!} s^3 \right\} A^3 + \cdots \\ &= E + (t+s)A + \frac{1}{2!} (t+s)^2 A^2 + \frac{1}{3!} (t+s)^3 A^3 + \cdots \\ &= e^{(t+s)A}. \end{aligned}$$

$$e^{tA} \cdot (e^{-tA}) = e^{(t-t)A} = e^0 = E \text{ だから, } (e^{tA})^{-1} = e^{-tA}.$$

問 2.2. $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$ だから, $P^{-1}A^kP = \begin{pmatrix} \lambda_1^k & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n^k \end{pmatrix}$ ($k = 1, 2, \dots$). よって,

$$\begin{aligned} P^{-1}e^{tA}P &= E + t(P^{-1}AP) + \frac{1}{2!}t^2(P^{-1}AP)^2 + \dots \\ &= E + t(P^{-1}AP) + \frac{1}{2!}t^2(P^{-1}A^2P) + \dots \\ &= \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} + \frac{1}{2!}t^2 \begin{pmatrix} \lambda_1^2 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n^2 \end{pmatrix} + \dots \\ &= \begin{pmatrix} 1 + \lambda_1 t + \frac{1}{2!}\lambda_1^2 t^2 \dots & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 + \lambda_n t + \frac{1}{2!}\lambda_n^2 t^2 \dots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & e^{\lambda_n t} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

問 2.3. (1) 固有値は $\pm i$. $P = \begin{pmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{pmatrix}$ とすると,

$$\begin{aligned} e^A &= \begin{pmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^i & 0 \\ 0 & e^{-i} \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -i \\ -i & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} e^i & ie^{-i} \\ ie^i & e^{-i} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -i \\ -i & 1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} e^i + e^{-i} & -ie^i + ie^{-i} \\ ie^i - ie^{-i} & e^i + e^{-i} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

(2) 固有値は $-1, 5$. $P = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ とすると,

$$\begin{aligned} e^A &= \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^5 & 0 \\ 0 & e^{-1} \end{pmatrix} \cdot \left\{ \frac{-1}{3} \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \right\} - \frac{1}{3} \begin{pmatrix} e^5 & 2e^{-1} \\ e^5 & -e^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2e^{-1} - e^5 & 2e^5 - 2e^{-1} \\ e^5 - e^{-1} & 2e^5 + e^{-1} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

問 4.1. (1) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ の固有値は $-1, \pm 2$ だから, 第5章で考えた方法で

$$x^2 + 2y^2 - 2z^2.$$

他の1つは, 例えば $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ とすると,

$${}^tPAP = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 2 \\ -2 & 4 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -12 \end{pmatrix}.$$

したがって,

$$3x^2 + 4y^2 - 12z^2.$$

(2) $A = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{-1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{-1}{2} \\ \frac{-1}{2} & \frac{-1}{2} & 0 \end{pmatrix}$ の固有値は $1, \frac{-1}{2}$ (重解) だから,

$$x^2 - \frac{1}{2}y^2 - \frac{1}{2}z^2.$$

他の 1 つは, 例えば $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \frac{-1}{2} \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ とすると,

$$\begin{aligned} {}^tPAP &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ \frac{-1}{2} & 1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{-1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{-1}{2} \\ \frac{-1}{2} & \frac{-1}{2} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & \frac{-1}{2} \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ \frac{-1}{2} & 0 & \frac{-1}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{-1}{2} & \frac{-1}{4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & \frac{-1}{2} \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{-3}{4} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

したがって,

$$3x^2 - y^2 - \frac{3}{4}z^2.$$

問 4.2.

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} 2 & \frac{-1}{2} & 0 & \frac{-1}{2} \\ \frac{-1}{2} & 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{-1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 1 \end{vmatrix} &= \frac{1}{2} > 0, & \begin{vmatrix} 2 & \frac{-1}{2} & 0 \\ \frac{-1}{2} & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & 1 \end{vmatrix} &= \frac{4}{5} > 0, \\ \begin{vmatrix} 2 & \frac{-1}{2} \\ \frac{-1}{2} & 1 \end{vmatrix} &= \frac{3}{4} > 0, & |2| &= 2 > 0. \end{aligned}$$

ゆえに, 定理 4.3. から正定値である.

問 4.3. A は対称行列だから, ${}^tAx_0 = {}^tx_0Ax$. ゆえに,

$$\begin{aligned} & {}^t(x - x_0)A(x - x_0) + 2{}^tx_0A(x - x_0) \\ &= {}^tAx - {}^tAx_0 - {}^tx_0Ax + {}^tx_0Ax_0 + 2{}^tx_0Ax - 2{}^tx_0Ax_0 \\ &= {}^tAx - {}^tx_0Ax_0. \end{aligned}$$

付録: 問 2.1. (1) 左手系 (2) 右手系 (3) 右手系