第6章

正規行列とJordan の標準形

行列を対角化できれば, 微分方程式を解いたりすることができる. 対称行列であれば直交行列で対角化できるし, n 次正方行列が相異なる n 個の固有値をもてば正則行列で対角化できる. 正規行列はユニタリー行列で対角化することができるので, 初めにこれについて述べる. すべての行列が対角化できるわけではない. 次に, 対角行列に近づけるのことを考える. これによる標準形が Jordan の標準形である. 行列も Polar 分解できるので, 最後にこれについて述べる. この章では単に行列というときは n 次正方行列である.

1　正規行列

行列 $A=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ の固有値は i と $-i$ であり, i に対する固有ベクトル $\begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}$, $-i$ に対する固有ベクトル $\begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix}$ により, $P=\begin{pmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{pmatrix}$ をつくると

$$P^{-1}AP=\begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}$$

と対角行列になる. このように, 行列の固有値は複素数となることもあるので, その成分も複素数のものを考えなければならない. この章では行列 $A=(a_{ij})$ の各成分 a_{ij} は複素数とする. したがって A を線形写像とみるときは, ベクトル空間 $\boldsymbol{C}^n$ 上のものと考える. $\boldsymbol{C}^n$ の二つのベクトル $\boldsymbol{a}=\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$ と $\boldsymbol{b}=\begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$ に対する内積 $(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})$ は

$$(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})=a_1\overline{b_1}+\cdots+a_n\overline{b_n}$$

であるので $\|\boldsymbol{a}\|=\sqrt{|a_1|^2+\cdots+|a_n|^2}$ である.

定義 1.1 (共役行列). 行列 $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$ に対する共役行列 A^* とは

$$A^* = \begin{pmatrix} \overline{a_{11}} & \cdots & \overline{a_{n1}} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \overline{a_{1n}} & \cdots & \overline{a_{nn}} \end{pmatrix}$$

である．すなわち, $A^* = {}^t(\bar{A})$ とかける．転置の性質から $(AB)^* = B^*A^*$ がわかる．

問 1.1. $(A\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = (\boldsymbol{x}, A^*\boldsymbol{y})$ を示せ．

定義 1.2.　行列 A について
(1) $A^*A = AA^*$ をみたすとき「**正規行列**」
(2) $A^*A = AA^* = E$ をみたすとき「**ユニタリー行列**」
(3) $A^* = A$ をみたすとき「**エルミート行列**」
という．

Point: 成分がすべて実数であればユニタリー行列は直交行列のことであり, エルミート行列は対称行列のことである．したがって, A がユニタリー行列であれば, A の逆行列は A^* であることが簡単にわかる．また行列 A が正規行列であれば, 問 1.1 より

$$\|A\boldsymbol{x}\|^2 = (A\boldsymbol{x}, A\boldsymbol{x}) = (A^*A\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) = (AA^*\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) = \|A^*\boldsymbol{x}\|^2$$

であるので $\|A\boldsymbol{x}\| = \|A^*\boldsymbol{x}\|$ をみたすことがわかる．
まず, 次のことは簡単にわかる．

定理 1.3. 行列 $A = (a_{ij})$ で $\boldsymbol{a_1} = \begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{pmatrix}, \cdots, \boldsymbol{a_n} = \begin{pmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{nn} \end{pmatrix}$ とおくと,

$$A\text{: ユニタリー行列} \iff \boldsymbol{a_1}, \cdots, \boldsymbol{a_n}\text{: 正規直交基底.}$$

問 1.2. 行列 A を正規行列とするとき, 次の問に答えよ．
(1) α を複素数とするとき, 行列 $A + \alpha E$ もまた正規行列になることを示せ．
(2) $A\boldsymbol{x} = \alpha\boldsymbol{x}$ ならば $A^*\boldsymbol{x} = \bar{\alpha}\boldsymbol{x}$ を示せ (このことからエルミート行列の固有値は実数であることがわかる)．
(3) α, β を A の相異なる固有値とし $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$ を α, β に対する固有ベクトルとするとき, $\boldsymbol{x} \perp \boldsymbol{y}$ であることを示せ．
(4) A がユニタリー行列であれば, その固有値 α は $|\alpha| = 1$ をみたすことを示せ．

問 1.2 はより一般に α を 正規行列 A の固有値として, α の固有空間を

$$W(\alpha) = \{\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{C}^n;\ (A - \alpha)\boldsymbol{x} = \boldsymbol{o}\}$$

とするとき, $\boldsymbol{y} \in W(\alpha)^\perp \implies A\boldsymbol{y} \in W(\alpha)^\perp$ である. したがって, 定理 1.3 を考えれば, 次の定理を得る.

定理 1.4. 行列 A が正規行列である必要十分条件は, あるユニタリー行列 U で対角化できる.

定理 1.4 を示す為に, 次の補題を示そう.

補題 1.5. M を $\boldsymbol{C}^n$ の部分空間とするとき, $\boldsymbol{C}^n = M \oplus M^\perp$ である. 従って, $\dim(M) = k$ のとき, $\dim(M^\perp) = n - k$ である.

証明. $\dim(M) = k$ として, その正規直交基底を $\boldsymbol{e}_1, \cdots, v\boldsymbol{e}_k$ とする. すなわち $M = L(\boldsymbol{e}_1, \cdots, \boldsymbol{e}_k)$. 任意のベクトル $\boldsymbol{a} \in \boldsymbol{C}^n$ に対して

$$\boldsymbol{b} = (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{e}_1)\boldsymbol{e}_1 + \cdots + (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{e}_k)\boldsymbol{e}_k$$

とおき, さらに $\boldsymbol{c} = \boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}$ とおけば $\boldsymbol{b} \in M$, $\boldsymbol{c} \in M^\perp$ であり, かつ $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{b} + \boldsymbol{c}$ であるので, 補題 1.5 は示された.

定理 1.4 の証明. 帰納法で示す. n 次より小さい次数の正規行列はユニタリー行列で対角化できると仮定する. α を A の固有値とし, その固有空間 $W(\alpha)$ の次元を k とする. $W(\alpha)$ の正規直交基底を $\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_k$ とする. このとき補題 1.5 により直交補空間 $W(\alpha)^\perp$ は $n-k$ 次元であるので $W(\alpha)^\perp$ から $n-k$ 個の正規直交基底 $\boldsymbol{b}_1, \cdots, \boldsymbol{b}_{n-k}$ をとり, 行列 $W = (\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_k, \boldsymbol{b}_1, \cdots, \boldsymbol{b}_{n-k})$ をつくる. $\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_k, \boldsymbol{b}_1, \cdots, \boldsymbol{b}_{n-k}$ は $\boldsymbol{C}^n$ の正規直交基底であるので, 上のことから

$$AW = W \left(\begin{array}{cccc|c} \alpha & 0 & \cdots & 0 & \\ 0 & \alpha & \cdots & 0 & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & \alpha & \\ \hline & & 0 & & B \end{array}\right)$$

このとき B は $n-k$ 次の正規行列となるので, 帰納法の仮定よりユニタリー行列 V で対角化できる. そこで

$$U = W \begin{pmatrix} E_k & 0 \\ 0 & V \end{pmatrix}$$

とすると U はユニタリー行列で, この U で A は対角化される. 逆の証明は明らかであるので, 定理は証明された.

Point: 要するに, 各固有値に対して固有ベクトルを選ぶ, このとき, 正規行列の異なる固有値では, 固有ベクトルは直交している. また, 重解である固有値では, 重複度ぶん互いに直交するように固有ベクトルを選ぶ. そしてそれぞれの長さを 1 にし, 順序よく並べて行列をつくれば, それが A を対角化するユニタリー行列である.

例 1.1. 行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & i \\ -i & 1 \end{pmatrix}$ をユニタリー行列で対角化せよ.

解. $f_A(x) = x(x-2)$ より A の固有値は 0 と 2 である.
0 に対する固有ベクトル $\begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}$ の長さを 1 にして $\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}$, 2 に対する固有ベクトル $\begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix}$ の長さを 1 にして $\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix}$.
そこで

$$U = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{i}{\sqrt{2}} \\ \frac{i}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{pmatrix}$$

とすれば U はユニタリー行列で

$$U^*AU = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

となる. □

2　巾零行列

ある自然数 k に対して $A^k = O$ となる行列 A を**巾零行列**という. 例えば, 対角成分がすべて 0 の上三角行列は巾零行列である. ここでは, この行列の標準形について述べる. これはジョルダンの標準形のために必要である. まず次の性質を持つことはすぐに分かる. 行列 A は n 次正方行列で n 次元ベクトル空間 V 上の線形写像と考える.

定理 2.1. $A\boldsymbol{x} = \alpha\boldsymbol{x}$ $(\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0})$ ならば $\alpha = 0$. すなわち巾零行列の固有値は 0 のみ.

証明. $A^k = O$ とすれば $A^k\boldsymbol{x} = \alpha^k\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ であるので $\alpha = 0$. □

従って, A の固有多項式 $f_A(x) = x^n$ である.

定理 2.2. A を巾零行列とすれば, ある正則行列 P で

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 0 & a & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & b & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & \ddots & c \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

とできる. ただし $a, b, \cdots, c$ は 0 または 1 である.

証明. $A^k = O$ とする．A^i の値域を V_i と書くことにする．すなわち $\mathrm{R}(A^i) = V_i$．条件より $\mathrm{R}(A^k) = V_k = \{\mathbf{0}\}$ である．このとき，$A^j\boldsymbol{x} = A^{j-1}(A\boldsymbol{x})$ であることから $V_j \subset V_{j-1}$ が分かる (実際には $V_j = A(V_{j-1})$ であることに注意する.) ここで $\mathrm{R}(A^j) \neq \{\mathbf{0}\}$ でかつ $\mathrm{R}(A^{j+1}) = \{\mathbf{0}\}$ と仮定する．$\mathrm{R}(A^j) \neq \{\mathbf{0}\}$ 　であるので，$\dim(V_j) = n_j$ と仮定すれば V_j の基底を

$$A^j\boldsymbol{a}_1^{(j)}, \cdots, A^j\boldsymbol{a}_{n_j}^{(j)}$$

と選ぶ．すると, 上のベクトルの組に

$$A^{j-1}\boldsymbol{a}_1^{(j)}, \cdots, A^{j-1}\boldsymbol{a}_{n_j}^{(j)}$$

を加えたものはベクトル空間 V_{j-1} の一次独立なベクトルの系である．なぜなら, まず $V_j \subset V_{j-1}$ より $A^j\boldsymbol{x} \in V_{j-1}$ である．そして

$$a_1A^{j-1}\boldsymbol{a}_1^{(j)} + \cdots + a_{n_j}A^{j-1}\boldsymbol{a}_{n_j}^{(j)} + b_1A^j\boldsymbol{a}_1^{(j)} + \cdots + b_{n_j}A^j\boldsymbol{a}_{n_j}^{(j)} = \mathbf{0} \tag{6.1}$$

と仮定する．これに左から A をかけて $A^{j+1} = O$ であるので

$$a_1A^j\boldsymbol{a}_1^{(j)} + \cdots + a_{n_j}A^j\boldsymbol{a}_{n_j}^{(j)} = \mathbf{0}$$

を得る．$A^j\boldsymbol{a}_1^{(j)}, \cdots, A^j\boldsymbol{a}_{n_j}^{(j)}$ は V_j の基底であったので一次独立，従って $a_1 = \cdots = a_{n_j} = 0$. そして, (6.1) に戻ると

$$b_1A^j\boldsymbol{a}_1^{(j)} + \cdots + b_{n_j}A^j\boldsymbol{a}_{n_j}^{(j)} = \mathbf{0}$$

となり, $A^j\boldsymbol{a}_1^{(j)}, \cdots, A^j\boldsymbol{a}_{n_j}^{(j)}$ は基底であったので一次独立，従って $b_1 = \cdots = b_{n_j} = 0$. これで

$$A^{j-1}\boldsymbol{a}_1^{(j)}, \cdots, A^{j-1}\boldsymbol{a}_{n_j}^{(j)}, A^j\boldsymbol{a}_1^{(j)}, \cdots, A^j\boldsymbol{a}_{n_j}^{(j)}$$

はベクトル空間 V_{j-1} の一次独立なベクトルの系であることが分かった．同時に $\dim(V_{j-1}) \geqq 2 \times n_j$ であることが分かったので，$\dim(V_{j-1}) = n_{j-1}$ とする ($n_{j-1} \geqq 2 \times n_j$)．そこでベクトル空間 V_{j-1} の基底を

$$A^{j-1}\boldsymbol{a}_1^{(j)}, \cdots, A^{j-1}\boldsymbol{a}_{n_j}^{(j)}, A^j\boldsymbol{a}_1^{(j)}, \cdots, A^j\boldsymbol{a}_{n_j}^{(j)}$$

と

$$A^{j-1}\boldsymbol{a}_1^{(j-1)}, \cdots, A^{j-1}\boldsymbol{a}_{n_{j-1}-2\times n_j}^{(j-1)}$$

とで取る．このように次々に遡って V_i $(i = 1, ..., j-1)$ の基底を取り，最後に V の基底を取る．V の基底は

$$\begin{gathered} A^j\boldsymbol{a}_1^{(j)}, \cdots, A^j\boldsymbol{a}_{n_j}^{(j)}, \\ A^{j-1}\boldsymbol{a}_1^{(j)}, \cdots, A^{j-1}\boldsymbol{a}_{n_j}^{(j)}, A^{j-1}\boldsymbol{a}_1^{(j-1)}, \cdots, A^{j-1}\boldsymbol{a}_{n_{j-1}-2\times n_j}^{(j-1)}, \\ \cdots\cdots, \\ \boldsymbol{a}_1^{(j)}, \cdots, \boldsymbol{a}_{n_j}^{(j)}, \cdots, \cdots, \boldsymbol{a}_1^{(0)}, \cdots, \boldsymbol{a}_{n_0}^{(0)} \end{gathered}$$

と取る (最後の添え数 n_0 は非常に大きな行列でなければ難しくない)．そこで正則行列 P を

$$P = (A^j\boldsymbol{a}_1^{(j)} \;\; A^{j-1}\boldsymbol{a}_1^{(j)} \;\cdots\; A\boldsymbol{a}_1^{(j)} \;\; \boldsymbol{a}_1^{(j)} \;\; A^j\boldsymbol{a}_2^{(j)} \;\cdots\; \boldsymbol{a}_1^{(0)} \;\cdots\; \boldsymbol{a}_{n_0}^{(0)})$$

とする．このとき

$$\begin{aligned}
AP &= A(A^j\boldsymbol{a}_1^{(j)} \;\; A^{j-1}\boldsymbol{a}_1^{(j)} \;\cdots\; A\boldsymbol{a}_1^{(j)} \;\; \boldsymbol{a}_1^{(j)} \;\; A^j\boldsymbol{a}_2^{(j)} \;\; A^{j-1}\boldsymbol{a}_2^{(j)} \;\cdots\; \boldsymbol{a}_1^{(0)} \;\cdots\; \boldsymbol{a}_{n_0}^{(0)}) \\
&= (\boldsymbol{0} \;\; A^j\boldsymbol{a}_1^{(j)} \;\cdots\; A^2\boldsymbol{a}_1^{(j)} \;\; A\boldsymbol{a}_1^{(j)} \;\; \boldsymbol{0} \;\; A^j\boldsymbol{a}_2^{(j)} \;\cdots\; \boldsymbol{0} \;\cdots\; \boldsymbol{0}) \\
&= P\begin{pmatrix} 0 & a & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & b & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & \ddots & c \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

となることが分かる．ただし $a, b, ..., c$ は 0 か 1. 従って定理は証明された．　□

定理 2.2 の右の行列を，巾零行列 A の**標準形**という．

Point. 一般論では難しくなってしまったが，次数が 3 , 4 くらいであれば各ベクトル空間 V_i の次元は小さい数なので，正則行列 P の作り方 (並べ方) に注意すれば難しくない！

例 2.1. 次の巾零行列の標準形を求めよ．

$$(1) \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad (2) \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

解. (1)

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad A^3 = O \qquad \text{さらに} \qquad A^2\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4z \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

であるので $\dim\mathrm{R}(A^2) = 1$ で,

$$A^2\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \text{とさらに} \quad A\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

となるので，正則行列 P を

$$P = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{として} \qquad P^{-1} = \frac{1}{8}\begin{pmatrix} 2 & -3 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}$$

となるので

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

となる.

(2)

$$B^2 = O \quad \text{であり} \quad B\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2z \\ 2z \\ 0 \end{pmatrix}$$

であるので， $\dim R(B) = 1$ で,

$$B\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{とさらに} \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

を取り，正則行列 P を

$$P = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{として} \quad P^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

となるので

$$P^{-1}BP = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

となる.

Point. 対角線のすぐ上の対角線上にいくつかの 1 が並ぶことは、正則行列 P の作り方から了解できたであろう.

問 2.1. 次の巾零行列の標準形を求めよ.

(1) $\begin{pmatrix} -3 & 9 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$ (2) $\begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$

3 Jordan の標準形

$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ のときは,

$$f_A(x) = \begin{vmatrix} x-a & b \\ c & x-d \end{vmatrix} = (x-a)(x-d) - bc = x^2 - (a+d)x + ad - bc$$

より

$$
\begin{aligned}
f_A(A) &= A^2-(a+d)A+(ad-bc)E \\
&= \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^2 - (a+d)\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + (ad-bc)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} a^2+bc & ab+bd \\ ac+cd & bc+d^2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} (a+d)a & (a+d)b \\ (a+d)c & (a+d)d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} ad-bc & 0 \\ 0 & ad-bc \end{pmatrix} = O
\end{aligned}
$$

である.

上の性質を一般化したのが大変有名な Cayley-Hamilton の定理である. この定理は行列の最も基本的な定理であり, いろいろな場面に登場する重要なものである. 初めに種々の定理の証明に利用される準備をする.

補題 3.1. 正方行列 A は適当な正則行列 P で $P^{-1}AP$ が上三角行列とできる.

証明. n 次の行列 A の固有値を $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ として, 次数についての帰納法で示す. 行列 A が 2 次の行列のとき, 固有値 α_1 の固有ベクトルを $\boldsymbol{x}_1$ とする. そして, $\boldsymbol{x}_1$, $\boldsymbol{x}_2$ が $\boldsymbol{C}^2$ の基底になるようにベクトル $\boldsymbol{x}_2$ を選ぶ. ここで, $P=(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2)$ とおくと, P は正則で,

$$
P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \alpha_1 & * \\ 0 & \alpha_2 \end{pmatrix}
$$

となり, $n=2$ の場合は示せた. ここで, $n-1$ 次の場合まで補題 3.1 が成り立つと仮定する.

行列 A が n 次のとき, A の固有値 α_1 に対する固有ベクトルを $\boldsymbol{x}_1$ とし, $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \cdots, \boldsymbol{x}_n$ が $\boldsymbol{C}^n$ の基底となるようにベクトル $\boldsymbol{x}_2, \cdots, \boldsymbol{x}_n$ を選ぶ. ここで, $P_1=(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \cdots, \boldsymbol{x}_n)$ とすると, P_1 は正則で,

$$
P_1^{-1}AP_1 = \begin{pmatrix} \alpha_1 & * \\ 0 & A_{n-1} \end{pmatrix}
$$

を得る. ここで, A_{n-1} は $n-1$ 次行列で, 固有値は $\alpha_2, \cdots, \alpha_n$ であるので, 帰納法の仮定より, ある $n-1$ 次の正則行列 Q で

$$
Q^{-1}AQ = \begin{pmatrix} \alpha_2 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & \alpha_n \end{pmatrix}
$$

とできる. そこで,

$$
P_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & Q \end{pmatrix}
$$

とおくと, P_2 は正則で

$$
P_2^{-1}(P_1^{-1}AP_1)P_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & Q^{-1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha_1 & * \\ 0 & A_{n-1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & Q^{-1} \end{pmatrix}
$$

$$= \begin{pmatrix} \alpha_1 & * \\ 0 & Q^{-1}A_{n-1}Q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1 & & & * \\ & \alpha_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \alpha_n \end{pmatrix}$$

となり, $P = P_1P_2$ とおくことによって, $P^{-1}AP$ は上三角行列になることがわかり, 補題は示せた.

定理 3.2 (Cayley-Hamilton). 行列 $A = (a_{ij})$ に対する固有多項式を $f_A(x)$ とすると,

$$f_A(A) = O.$$

証明. 補題 3.1 によって行列 A は, ある正則行列 P で

$$B = P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \alpha_1 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & \alpha_n \end{pmatrix} \text{（上三角行列）}$$

とできる. したがって, $f_{P^{-1}AP}(x) = f_A(x)$ であるから $f_A(x) = (x-\alpha_1)\cdots(x-\alpha_n)$. したがって

$$\begin{aligned} f_A(A) &= (A-\alpha_1E)\cdots(A-\alpha_nE) \\ &= (PBP^{-1}-\alpha_1E)\cdots(PBP^{-1}-\alpha_nE) \\ &= P(B-\alpha_1E)\cdots(B-\alpha_nE)P^{-1}. \end{aligned}$$

よって

$$P^{-1}f_A(A)P = (B-\alpha_1E)\cdots(B-\alpha_nE).$$

$W_k = L(\boldsymbol{e}_1, \cdots, \boldsymbol{e}_k)$ $(k = 1, 2, \cdots, n)$ とおくと, $\boldsymbol{x}_k \in W_k$ のとき

$$\begin{cases} (B-\alpha_1E)\boldsymbol{x}_1 = \boldsymbol{0} \\ (B-\alpha_kE)\boldsymbol{x}_k \in W_{k-1} \end{cases}$$

となるので, 任意の $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{C}^n = W_n$ に対して

$$\begin{aligned} (B-\alpha_1E)\cdots(B-\alpha_nE)\boldsymbol{x} &= (B-\alpha_1E)\cdots(B-\alpha_{n-1}E)\boldsymbol{x}_{n-1} \\ &\cdots \\ &= (B-\alpha_1E)\boldsymbol{x}_1 = \boldsymbol{0}. \end{aligned}$$

したがって, $(B-\alpha_1E)\cdots(B-\alpha_nE) = O$ であるので定理は示された. □

Point: Cayley-Hamilton の定理はどんな行列でも, 必ず $f(A) = O$ となる多項式 $f(x)$ があることを保証している. また, 行列 A の逆行列は A の多項式で表せることを示している.

定義 3.3. 行列 A とその1つの固有値 α とその重複度 k に対して,

$$(A-\alpha)^k \boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$$

となるベクトル $\boldsymbol{x}$ の全体のつくる固有空間を $\widetilde{W(\alpha)}$ と表し, **広い意味の固有空間**という.

ここで, 次の2つの定義を用意しておく.

定義 3.4 (和空間). ベクトル空間 $\boldsymbol{C}^n$ の部分空間 $W_1, W_2, \cdots, W_k$ に対して,

$$W_1 + W_2 + \cdots + W_k = \{\boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{x}_2 + \cdots + \boldsymbol{x}_k ; \boldsymbol{x}_i \in W_i \ (i = 1, 2, \cdots, k)\}$$

と定義し, これを部分空間 $W_1, W_2, \cdots, W_n$ の **和空間** とよぶ.

問 3.1. ベクトル空間 $\boldsymbol{C}^n$ の部分空間 $W_1, W_2, \cdots, W_k$ の和空間もまた $\boldsymbol{C}^n$ の部分空間になることを示せ.

そして, 特に和空間に関しては次の定義が大事である.

定義 3.5 (直和). ベクトル空間 $\boldsymbol{C}^n$ の部分空間 $W_1, W_2, \cdots, W_k$ に対して, $V = W_1 + W_2 + \cdots + W_k$ としたとき, すべての i $(i = 1, 2, \cdots, k)$ に対して

$$W_i \cap (W_1 + \cdots + W_{i-1} + W_{i+1} + \cdots + W_k) = \{\boldsymbol{0}\}$$

が成り立てば, 部分空間 V は $W_1 + W_2 + \cdots + W_k$ の **直和**であるといい,

$$V = W_1 \oplus W_2 \oplus \cdots \oplus W_k$$

と表す.

問 3.2. ベクトル空間 $W_1, W_2, \cdots, W_k$ を内積空間 V の部分空間とし, $V = W_1 + W_2 + \cdots + W_k$ としたとき, 次の条件は同値であることを示せ.

(1). $V = W_1 \oplus W_2 \oplus \cdots \oplus W_k$.

(2). $\boldsymbol{x}_i \in W_i$, $\boldsymbol{y}_i \in W_i$ $(i = 1, 2, \cdots, k)$ において, $\boldsymbol{x}_1 + \cdots + \boldsymbol{x}_k = \boldsymbol{y}_1 + \cdots + \boldsymbol{y}_k$ ならば, $\boldsymbol{x}_i = \boldsymbol{y}_i$ $(i = 1, 2, \cdots, k)$.

問 3.3. 内積空間 V の部分空間 W_1, W_2 に対して, 次を示せ.

(1). $V = W_1 + W_2$, $W_1 \perp W_2$ ならば, $V = W_1 \oplus W_2$ かつ $W_2 = W_1^{\perp}$.

(2). W_1 が有限次元のとき, $V = W_1 \oplus W_1^{\perp}$.

定理 3.6. 行列 A の固有多項式 $f_A(x)$ を

$$f_A(x) = (x-\alpha_1)^{k_1}\cdots(x-\alpha_j)^{k_j}$$

とおくと,

$$\boldsymbol{C}^n = \widetilde{W(\alpha_1)} \oplus \cdots \oplus \widetilde{W(\alpha_j)}.$$

定理 3.6 を示すために次の補題を用意する.

補題 3.7. m 個の行列 $A_1, A_2, \cdots, A_m$ が次の条件

(1). $A_1 + A_2 + \cdots + A_m = E$,

(2). $A_iA_j = O \quad (i \neq j)$

をみたすならば,

$$\boldsymbol{C}^n = \mathrm{R}(A_1) \oplus \mathrm{R}(A_2) \oplus \cdots \oplus \mathrm{R}(A_m)$$

が成り立つ.

証明. 最初に,

$$\boldsymbol{C}^n = \mathrm{R}(A_1) + \mathrm{R}(A_2) + \cdots + \mathrm{R}(A_m)$$

を示す. $\boldsymbol{C}^n \supseteq \mathrm{R}(A_1) + \mathrm{R}(A_2) + \cdots + \mathrm{R}(A_m)$ は自明であるので,

$$\boldsymbol{C}^n \subseteq \mathrm{R}(A_1) + \mathrm{R}(A_2) + \cdots + \mathrm{R}(A_m) \tag{6.2}$$

を示せばよい. 任意の $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{C}^n$ に対して, 条件 (1) より, $\boldsymbol{x} = A_1\boldsymbol{x} + A_2\boldsymbol{x} + \cdots + A_n\boldsymbol{x}$ が成り立つ. ここで, $\boldsymbol{y}_1 = A_1\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}_2 = A_2\boldsymbol{x}, \cdots, \boldsymbol{y}_n = A_n\boldsymbol{x}$ とおくと, $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y}_1 + \boldsymbol{y}_2 + \cdots + \boldsymbol{y}_m$ かつ $\boldsymbol{y}_i \in \mathrm{R}(A_i)$ $(i = 1, 2, \cdots, m)$ であるから, (6.2) が示せた.

次に直和であることを示す. 直和の定義より,

$$\mathrm{R}(A_i) \cap (\mathrm{R}(A_1) + \cdots + \mathrm{R}(A_{i-1}) + \mathrm{R}(A_{i+1}) + \cdots + \mathrm{R}(A_m)) = \{\boldsymbol{0}\} \ (i = 1, 2, \cdots, m)$$

を示せばよい. まず, 条件 (1), (2) より,

$$A_i = A_i(A_1 + \cdots + A_n) = A_i^2 \tag{6.3}$$

に注意する. $\boldsymbol{y} \in \mathrm{R}(A_i) \cap (\mathrm{R}(A_1) + \cdots + \mathrm{R}(A_{i-1}) + \mathrm{R}(A_{i+1}) + \cdots + \mathrm{R}(A_m))$ とすると, あるベクトル $\boldsymbol{x}_k \in \boldsymbol{C}^n$ $(k = 1, 2, \cdots, m)$, に対して, $\boldsymbol{y} = A_i\boldsymbol{x}_i$, $\boldsymbol{y} = A_1\boldsymbol{x}_1 + \cdots + A_{i-1}\boldsymbol{x}_{i-1} + A_{i+1}\boldsymbol{x}_{i+1} + \cdots + A_m\boldsymbol{x}_m$ が成り立つ. そこで, 条件 (2), (6.3) より,

$$\boldsymbol{y} = A_i\boldsymbol{x}_i = A_i^2\boldsymbol{x}_i = A_i\boldsymbol{y} = A_i(A_1\boldsymbol{x}_1 + \cdots + A_{i-1}\boldsymbol{x}_{i-1} + A_{i+1}\boldsymbol{x}_{i+1} + \cdots + A_m\boldsymbol{x}_m) = \boldsymbol{0}$$

となり, 補題 3.7 が示せた. □

定理 3.6 の証明. Cayley-Hamilton の定理より

$$f_A(A) = (A - \alpha_1E)^{k_1}\cdots(A - \alpha_jE)^{k_j} = O. \tag{6.4}$$

ここで, $f_A(x)$ で因数 $(x-\alpha_i)^{k_i}$ を除いた多項式を $f_i(x)$ とかくことにする. すなわち

$$f_i(x) = (x-\alpha_1)^{k_1}\cdots(x-\alpha_{i-1})^{k_{i-1}}(x-\alpha_{i+1})^{k_{i+1}}\cdots(x-\alpha_j)^{k_j}.$$

j 個の多項式 $f_1(x),\cdots,f_j(x)$ は互いに素な多項式だから（付録 2 を参照）

$$g_1(x)\cdot f_1(x)+\cdots+g_j(x)\cdot f_j(x)=1$$

となる多項式 $g_1,\cdots,g_j(x)$ がある. そこで, $A_i=g_i(A)\cdot f_i(A)$ とおくと

$$A_1+\cdots+A_j=E. \tag{6.5}$$

また, $i\neq t$ に対しては $f_i(x)\cdot f_t(x)$ は $f_A(x)$ で割り切れるので, (6.4) より $f_i(A)\cdot f_t(A)=O$. よって,

$$A_iA_t=O\ \ (i\neq t) \tag{6.6}$$

が成り立つ. よって, (6.5) と (6.6) から各 A_i は補題 3.7 の 2 条件をみたすから,

$$\boldsymbol{C}^n=\mathrm{R}(A_1)\oplus\mathrm{R}(A_2)\oplus\cdots\oplus\mathrm{R}(A_j).$$

が成り立つ. 以下, $\mathrm{R}(A_i)=\widetilde{W(\alpha_i)}$ $(i=1,2,\cdots,j)$ を示せばよい.

最初に $\mathrm{R}(A_i)\subseteq\widetilde{W(\alpha_i)}$ を示す.

$$(x-\alpha_i)^{k_i}f_i(x)=f_A(x)$$

であるから, (6.4) より

$$(A-\alpha_iE)^{k_i}f_i(A)=f_A(A)=O.$$

よって

$$(A_i-\alpha_iE)^{k_i}A_i=(A_i-\alpha_iE)^{k_i}g_i(A)\cdot f_i(A)=g_i(A)\{(A_i-\alpha_iE)^{k_i}f_i(A)\}=O.$$

よって任意の $\boldsymbol{x}\in\boldsymbol{C}^n$ に対して, $A_i\boldsymbol{x}\in\widetilde{W(\alpha_i)}$, すなわち

$$\mathrm{R}(A_i)\subseteq\widetilde{W(\alpha_i)}.$$

次に, $\widetilde{W(\alpha_i)}\subseteq\mathrm{R}(A_i)$ を示す. $\boldsymbol{x}\in\widetilde{W(\alpha_i)}$ とすると, ある自然数 k_i について

$$(A-\alpha_iE)^{k_i}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}.$$

そして, $g_i(x)\cdot f_i(x)$ は因数 $(x-\alpha_i)$ を含まないので, $(x-\alpha_i)^k_i$ と $g_i(x)\cdot f_i(x)$ に対して

$$h_1(x)\cdot(x-\alpha_i)^{k_i}+h_2(x)\cdot g_i(x)\cdot f_i(x)=1$$

となる多項式 $h_1(x)$, $h_2(x)$ がある. したがって,

$$h_1(A)\cdot(A-\alpha_iE)^{k_i}+h_2(A)\cdot g_i(A)\cdot f_i(A)=E.$$

$(A-\alpha_i E)^{k_i}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ より

$$h_2(A)A_i\boldsymbol{x}=h_2(A)\cdot g_i(A)\cdot f_i(A)\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x},$$

$h_2(A)$ と A_i は可換だから

$$A_i h_2(A)\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}.$$

よって, $\boldsymbol{x}\in \mathrm{R}(A_i)$. ゆえに $\widetilde{W(\alpha_i)}\subseteq \mathrm{R}(A_i)$.

以上のことから $\widetilde{W(\alpha_i)}=\mathrm{R}(A_i)$ がわかり, 定理 3.6 の証明ができた. □

したがって, 次の定理を得る.

定理 3.8. 行列 A の固有多項式を $f_A(x)=(x-\alpha_1)^{n_1}\cdots(x-\alpha_k)^{n_k}$ とするとき,

$$A\sim\begin{pmatrix} A_1 & & & 0\\ & A_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & A_k\end{pmatrix},$$

ただし, 各 A_i は n_i 次正方行列で $A_i=\alpha_i E+N_i$ (N_i は巾零行列) の形である.

証明. 定理 3.6 の (2) より, $\boldsymbol{C}^n=\widetilde{W(\alpha_1)}\oplus\cdots\oplus\widetilde{W(\alpha_k)}$ であるので, $\boldsymbol{C}^n$ の基底として

$$\boldsymbol{a}_1^1,\cdots,\boldsymbol{a}_{n_1}^1\in\widetilde{W(\alpha_1)},\ \boldsymbol{a}_1^2,\cdots,\boldsymbol{a}_{n_2}^2,\cdots,\in\widetilde{W(\alpha_2)},\ \boldsymbol{a}_1^k,\cdots,\boldsymbol{a}_{n_k}^k\in\widetilde{W(\alpha_k)}$$

をとる. そこで,

$$P=(\boldsymbol{a}_1^1,\cdots,\boldsymbol{a}_{n_1}^1,\boldsymbol{a}_1^2,\cdots,\boldsymbol{a}_{n_2}^2,\cdots,\boldsymbol{a}_1^k,\cdots,\boldsymbol{a}_{n_k}^k)$$

として行列をつくると, これは正則行列で $A\widetilde{W(\alpha_i)}\subset\widetilde{W(\alpha_i)}$ であるから

$$AP=P\begin{pmatrix} B_1 & & & 0\\ & B_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & B_k\end{pmatrix}$$

となるので

$$A=P\begin{pmatrix} B_1 & & & 0\\ & B_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & B_k\end{pmatrix}P^{-1}.$$

したがって

$$(A-\alpha_i E)^{n_i}=P\begin{pmatrix} (B_1-\alpha_i E)^{n_i} & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & (B_i-\alpha_i E)^{n_i} & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & (B_k-\alpha_i E)^{n_i}\end{pmatrix}P^{-1}.$$

よって

$$(A-\alpha_i E)^{n_i}P = P\begin{pmatrix} (B_1-\alpha_i E)^{n_i} & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & (B_i-\alpha_i E)^{n_i} & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & (B_k-\alpha_i E)^{n_i} \end{pmatrix}$$

であるが, ベクトル $\boldsymbol{a}_1^i, \cdots, \boldsymbol{a}_{n_i}^i$ については

$$(A-\alpha_i E)^{n_i}\boldsymbol{a}_j^i = 0 \quad (j = 1, 2, \cdots, n_i)$$

であるので,

$$(B_i-\alpha_i E)^{n_i} = O.$$

したがって, $B_i - \alpha_i E = N_i$ とおくと, N_i は巾零行列で,

$$B_i = \alpha_i E + N_i$$

となるので, 定理は示された. □

Point: 行列 A を定理 2.4 の形にしたものを, 行列 A の **Jordan の標準形**という.

例 3.1. $A = \begin{pmatrix} 2 & -8 & 7 \\ 1 & -5 & 5 \\ 1 & -4 & 4 \end{pmatrix}$ の Jordan の標準形を求める.

解. $f_A(x) = (x-1)^2(x+1)$, $(A-E)^2 = \begin{pmatrix} 0 & 12 & -12 \\ 0 & 8 & -8 \\ 0 & 4 & -4 \end{pmatrix}$, $A+E = \begin{pmatrix} 3 & -8 & 7 \\ 1 & -4 & 5 \\ 1 & -4 & 5 \end{pmatrix}$.

$\mathrm{Ker}(A-E)^2$ より $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. $\mathrm{Ker}(A+E)$ より $\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad P^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{aligned} P^{-1}AP &= \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -8 & 7 \\ 1 & -5 & 5 \\ 1 & -4 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 3 & -3 \\ 1 & 2 & -2 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & -3+4 & 3-2-1 \\ 0 & 3-4+2 & -3+4-1 \\ 0 & 0 & -2+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

4　行列の絶対値と不等式

定義 4.1. 行列 A に対して, $(A\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) \geqq 0$ が, すべてのベクトル $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{C}^n$ について成立するとき, A を**正値行列**といい, $A \geqq 0$ で表す.

$A \geqq 0$ の行列は $A^* = A$ かつ固有値もすべて 0 以上であることと同じことである. また, 問 1.1 により $(A^*A\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) = (A\boldsymbol{x}, A\boldsymbol{x}) = \|A\boldsymbol{x}\|^2 \geqq 0$ だから A^*A は正値行列であるしエルミート行列でもあるので, あるユニタリー行列 U で

$$U^*A^*AU = \begin{pmatrix} \alpha_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \alpha_n \end{pmatrix}$$

と対角化できる. ここで, $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$ は A^*A の固有値であるから, 必ず $\alpha_i \geqq 0$ $(i = 1, 2, \cdots, n)$ である. そこで, 行列

$$|A| = U \begin{pmatrix} \sqrt{\alpha_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \sqrt{\alpha_n} \end{pmatrix} U^* \tag{6.7}$$

を **行列の絶対値** と定義する. このため, この章では行列 A の行列式は $\det(A)$ とかく.

$(AU)^*AU = \begin{pmatrix} \alpha_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \alpha_n \end{pmatrix}$ であるので, $AU = (\boldsymbol{a}_1 \ \cdots \ \boldsymbol{a}_n)$ とすると,

$$(\boldsymbol{a}_i, \boldsymbol{a}_j) = \alpha_i \delta_{ij} = \begin{cases} \alpha_i & (i = j \text{ のとき}) \\ 0 & (i \neq j \text{ のとき}) \end{cases} \qquad (\delta_{ij} \text{ はクロネッカーのデルタ})$$

である. ここで, $\alpha_1, \cdots, \alpha_k$ は 0 でなく $\alpha_{k+1} = \cdots = \alpha_n = 0$ とすると,

$$\boldsymbol{a}_{k+1} = \cdots = \boldsymbol{a}_n = \boldsymbol{0}$$

であるので, $\boldsymbol{C}^n$ の正規直交基底として

$$\frac{1}{\sqrt{\alpha_1}}\boldsymbol{a}_1, \cdots, \frac{1}{\sqrt{\alpha_k}}\boldsymbol{a}_k, \boldsymbol{b}_{k+1}, \cdots, \boldsymbol{b}_n$$

をつくり, 行列 V を

$$V = \left(\frac{1}{\sqrt{\alpha_1}}\boldsymbol{a}_1 \ \cdots \ \frac{1}{\sqrt{\alpha_k}}\boldsymbol{a}_k, \boldsymbol{b}_{k+1} \ \cdots \ \boldsymbol{b}_n \right)$$

とすると, V はユニタリー行列で

$$AU = V \begin{pmatrix} \sqrt{\alpha_1} & & & & & \text{\Large 0} \\ & \ddots & & & & \\ & & \sqrt{\alpha_n} & & & \\ & & & 0 & & \\ & & & & \ddots & \\ \text{\Large 0} & & & & & 0 \end{pmatrix}$$

と (6.7) より,

$$A = V \begin{pmatrix} \sqrt{\alpha_1} & & & & & \\ & \ddots & & & \text{\Large 0} & \\ & & \sqrt{\alpha_n} & & & \\ & & & 0 & & \\ & \text{\Large 0} & & & \ddots & \\ & & & & & 0 \end{pmatrix} U^* = VU^*|A|$$

となる. VU^* はユニタリー行列だから, n 次正方行列は必ずユニタリー行列と正値行列の積に分解できる. 以上のことから

定理 4.2 (polar-分解). 行列 A は正値行列 $|A|$ とユニタリー行列 U の積 $A = U|A|$ に分解できる.

Point: 複素数 z は $z = re^{i\theta}$ とかけるが, 行列 A もそのような形でかけることを示している.

正値行列はエルミート行列でなので, あるユニタリー行列 U で

$$U^*AU = \begin{pmatrix} \alpha_1 & & \text{\Large 0} \\ & \ddots & \\ \text{\Large 0} & & \alpha_n \end{pmatrix} \quad (\alpha_i \geqq 0)$$

とできるので, $p > 0$ に対して

$$A^p = U \begin{pmatrix} \alpha_1^p & & \text{\Large 0} \\ & \ddots & \\ \text{\Large 0} & & \alpha_n^p \end{pmatrix} U^*$$

と定義する. たとえば,

$$A^{\frac{1}{2}} = U \begin{pmatrix} \sqrt{\alpha_1} & & \text{\Large 0} \\ & \ddots & \\ \text{\Large 0} & & \sqrt{\alpha_n} \end{pmatrix} U^*$$

である.

2つの正値行列 $A, B \geqq 0$ に対して, $A \geqq B$ とは $A - B \geqq 0$ のときとする. すなわち, $A - B$ の固有値がすべて 0 以上のとき, $A \geqq B$ である. このとき, $A \geqq B$ でも $A^2 \geqq B^2$ は一般に成立しない.

例 4.1. $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ とすると, $A - B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ になる. $A - B$ の固有値は 2, 0 より, $A \geqq B$ がわかる. 一方,

$$A^2 - B^2 = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$$

となり, A^2-B^2 の固有値は　$3+\sqrt{10}>0,\ 3-\sqrt{10}<0$ となり, $3-\sqrt{10}$ の固有ベクトルを $\boldsymbol{x}$ とすると $((A^2-B^2)\boldsymbol{x},\boldsymbol{x})=(3-\sqrt{10})|\boldsymbol{x}|^2$ となるので, 負となり $A^2\ngeq B^2$ である.

Point: 行列 A の固有値を $\alpha_1,\cdots,\alpha_n$ (重複度ぶん繰り返している) とすると

$$\det(A)=\alpha_1\cdots\alpha_n$$

となるので, 2 次の行列 A の場合, $\det(A)<0$ ならば, 固有値は正と負である. すなわち $A\ngeq 0$ である.

しかし $0\leqq p\leqq 1$ に対しては, 次の Löwner-Heinz の不等式が成り立つ.

定理 4.3 (Löwner-Heinz の不等式). 正値行列 $A,\ B$ に対して, $A\geqq B\geqq 0$ ならばすべての $0\leqq p\leqq 1$ に対して $A^p\geqq B^p$ が成り立つ.

定理 4.3 は指数 p が $0\leqq p\leqq 1$ の場合, 正値行列は一般の正の数と同じように両辺 p 乗しても順序が変わらないということをいっているが, 行列の場合は上の例 4.1 でもわかるように正の数と同じように 2 乗や 3 乗では順序は保存されない. このことに対して次の定理が成り立つ.

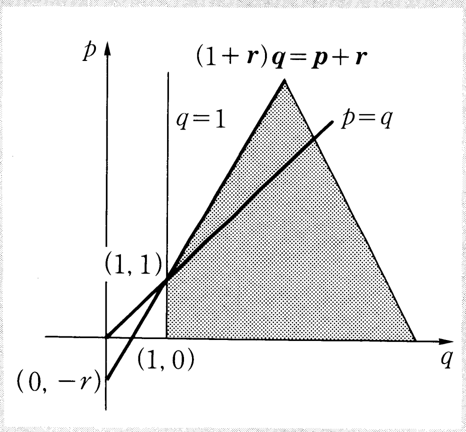
定理 4.4 (古田不等式).

正値行列 $A,\ B$ が $A\geqq B\geqq 0$ であれば,
任意の $r\geqq 0$ に対して,

(1)　$(B^{\frac{r}{2}}A^pB^{\frac{r}{2}})^{\frac{1}{q}}\geqq(B^{\frac{r}{2}}B^pB^{\frac{r}{2}})^{\frac{1}{q}}$

(2)　$(A^{\frac{r}{2}}A^pA^{\frac{r}{2}})^{\frac{1}{q}}\geqq(A^{\frac{r}{2}}B^pA^{\frac{r}{2}})^{\frac{1}{q}}$

がすべての $p\geqq 0,\ q\geqq 1,\ (1+r)q\geqq p+r$ について成り立つ.



定理 4.4 は 3 変数 p,q,r を使って不等式をつくっているが, これらの変数の取る範囲を図に表したのが, 上の図である.

例 4.2. 例 4.1 と同様に, $A=\begin{pmatrix}2&1\\1&1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}$ とおくと, 例 4.1 では, $A\geqq B\geqq 0$ かつ $A^2\ngeq B^2$ であったが, 定理 4.4 において $p=r=q=2$ とおくと,

$$(BA^2B)^{\frac{1}{2}}\geqq B^2 \tag{6.8}$$

が成り立つことがわかる. 実際,

$$\begin{aligned}(BA^2B)^{\frac{1}{2}} - B^2 &= \left\{\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}5 & 3\\3 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 0\end{pmatrix}\right\}^{\frac{1}{2}} - \begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 0\end{pmatrix}\\ &= \begin{pmatrix}5 & 0\\0 & 0\end{pmatrix}^{\frac{1}{2}} - \begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\sqrt{5}-1 & 0\\0 & 0\end{pmatrix} \geqq 0\end{aligned}$$

となり, (6.8) が成り立つことがわかる.

Löwner-Heinz と古田不等式を証明するために, 少し準備をする.

$f(x)$ を x の多項式とする. x に A を代入した行列 $f(A)$ を考える. ただし定数項には E をかける. たとえば $f(x) = 3x^2 - 2x - 5$ であれば 行列 $f(A)$ とは

$$f(A) = 3A^2 - 2A - 5E$$

である. また, 行列 A のすべての固有値の集合を $\sigma(A)$ とかく. このとき次の定理が成り立つ.

定理 4.5 (Frobenius の定理). n 次正方行列 A と多項式 $f(x)$ に対して $\sigma(f(A)) = f(\sigma(A))$ である.

証明. 行列 A は, 補題 3.1 によってある正則行列 P で

$$B = P^{-1}AP = \begin{pmatrix}\alpha_1 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & \alpha_n\end{pmatrix}$$

とできる. ここで,

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n = \sum_{i=0}^{n} a_ix^i$$

とすれば,

$$f(B) = \sum_{i=0}^{n}\begin{pmatrix}a_i\alpha_1^i & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & a_i\alpha_n^i\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}f(\alpha_1) & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & f(\alpha_n)\end{pmatrix}$$

となり, $f(A)$ の固有多項式は

$$\begin{aligned}|xE - f(A)| &= |xE - P^{-1}f(A)P| = |xE - f(P^{-1}AP)|\\ &= |xE - f(B)| = (x - f(\alpha_1))\cdots(x - f(\alpha_n))\end{aligned}$$

であるから, $f(A)$ の固有値は $f(\alpha_1), \cdots, f(\alpha_n)$ であることがわかる.

Point: 上のことから A^n の固有値は A^n を計算する必要はなく, A の固有値を n 乗すればよい.

定理 4.6. 二つの n 次正方行列 A, B について $\sigma(AB) = \sigma(BA)$ である.

証明. まず,

$$\begin{aligned} 0 \in \sigma(AB) &\iff |AB| = 0 \iff |A||B| = 0 \\ &\iff |B||A| = 0 \iff |BA| = 0 \iff 0 \in \sigma(BA) \end{aligned}$$

であるので, $\alpha\ (\neq 0)$ に対して $\alpha \notin \sigma(AB) \iff \alpha \notin \sigma(BA)$ を示せばよい. この関係は

$$(BA - \alpha E)^{-1} = \frac{1}{\alpha}\{B(AB - \alpha E)^{-1}A - E\}$$

であることからわかる. なぜなら, $\alpha \notin \sigma(AB)$ とすると, $AB - \alpha E$ は正則である. ここで, $R = \dfrac{1}{\alpha}\{B(AB - \alpha E)^{-1}A - E\}$ とおく. このとき

$$\begin{aligned} (BA - \alpha E)R &= (BA - \alpha E) \cdot \frac{1}{\alpha}\{B(AB - \alpha E)^{-1}A - E\} \\ &= \frac{1}{\alpha}\{BAB(AB - \alpha E)^{-1}A - \alpha B(AB - \alpha E)^{-1}A - BA + \alpha E\} \\ &= \frac{1}{\alpha}\{B(AB - \alpha E)(AB - \alpha E)^{-1}A - BA + \alpha E\} = E. \end{aligned}$$

同様に, $R(BA - \alpha E) = E$ となるので, $R = (BA - \alpha E)^{-1}$ である. すなわち $\alpha \notin \sigma(BA)$ を得る. 以上のことから $\sigma(AB) = \sigma(BA)$ は示された.

行列 A は $\boldsymbol{C}^n$ 上の写像と考えられるので, A のノルム $\|A\|$ を

$$\|A\| = \sup_{\|\boldsymbol{x}\|=1} \|A\boldsymbol{x}\| \tag{6.9}$$

と定義する. 定義から $\|AB\| \leqq \|A\| \cdot \|B\|$ が成り立つことがわかる. もし, 行列 A が対角行列

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \alpha_n \end{pmatrix}$$

であれば

$$\|A\| = \max\{|\alpha_1|, \cdots, |\alpha_n|\}$$

であることが了解できるであろう. したがって, このことは $\|A\|$ は固有値の絶対値の最大数である. 同様に A が正規行列であれば, あるユニタリー行列 U で

$$U^*AU = \begin{pmatrix} \alpha_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \alpha_n \end{pmatrix}$$

と対角化できる. ユニタリー行列 U はベクトルの長さを変えないので, このときも

$$\|A\| = \max\{|\alpha_1|, \cdots, |\alpha_n|\}$$

である. $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$ は行列 A の固有値であるが, 一般に

$$r_s(A) = \max\{|\alpha_1|, \cdots, |\alpha_n|\}$$

とかき, A の「**スペクトル半径**」という. 定理 4.6 より $\sigma(AB) = \sigma(BA)$ であるから $r_s(AB) = r_s(BA)$ である.

Point: スペクトル半径のときは A と B を交換してよい.

α を A の固有値とし, その固有ベクトルを $\boldsymbol{x}$ とする. $\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0}$ であるので $\boldsymbol{y} = \dfrac{1}{\|\boldsymbol{x}\|}\boldsymbol{x}$ とすると $\|\boldsymbol{y}\| = 1$ であり, さらに $A\boldsymbol{y} = \alpha\boldsymbol{y}$ であるので, 行列のノルムの定義 (6.9) より, $|\alpha| \leqq \|A\|$ であるから, 一般には

$$r_s(A) \leqq \|A\|$$

であるが, 正規行列などは $r_s(A) = \|A\|$ となっている.

問 4.1. 次を示せ.
(1) $\|A^*\| = \|A\|$.　　　(2) $\|A^*A\| = \|A\|^2$.

正値行列 A に対しては, 次の補題が成り立つ.

補題 4.7. 行列 A を正値行列とすると, $E \geqq A \Longleftrightarrow 1 \geqq r_s(A)\ (= \|A\|)$ である.

証明. Frobenius の定理より

$$\sigma(E - A) = \{1 - \alpha\ :\ \alpha \in \sigma(A)\}$$

が成り立つので, 補題 4.7 は示される. □

正値行列 A が正則のとき, 任意のベクトル $\boldsymbol{x}$ に対して $\boldsymbol{x} = A\boldsymbol{y}$ と取ると $(A^{-1}\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) = (A^{-1}A\boldsymbol{y}, A\boldsymbol{y}) = (\boldsymbol{y}, A\boldsymbol{y}) = (A\boldsymbol{y}, \boldsymbol{y}) \geqq 0$ より A^{-1} も正値である.

問 4.2. A, B を正則な正値行列とするとき, $A \geqq B$ ならば $A^{-1} \leqq B^{-1}$ を示せ.

Löwner-Heinz の不等式の証明. $\varepsilon > 0$ を任意の数として, 行列 $A + \varepsilon E$ と $B + \varepsilon E$ をつくると $A + \varepsilon E \geqq B + \varepsilon E$ であり, どちらも Frobenius の定理より正則な行列である. これらの行列に対して不等式を示せば $\varepsilon \to 0$ として, 目的の不等式を得ることができるので, A, B は正則な行列であると仮定してよい. $0 \leqq p, t \leqq 1$ に対して $A^p \geqq B^p$ と $A^t \geqq B^t$ が成り

立つとする．このとき $A^{\frac{p+t}{2}} \geqq B^{\frac{p+t}{2}}$ が成り立つことを示す．ただし $A^0 = B^0 = E$ と定義する． $A^p \geqq B^p$ より $A^{-\frac{p}{2}}$ を両方から挟むと $E \geqq A^{-\frac{p}{2}}B^pA^{-\frac{p}{2}} = (B^{\frac{p}{2}}A^{-\frac{p}{2}})^*B^{\frac{p}{2}}A^{-\frac{p}{2}}$ であるので, 補題 3.5 と問 4.1 (2) より $1 \geqq \|(B^{\frac{p}{2}}A^{-\frac{p}{2}})^*(B^{\frac{p}{2}}A^{-\frac{p}{2}})\| = \|B^{\frac{p}{2}}A^{-\frac{p}{2}}\|^2$ が成り立つ．同様に $1 \geqq \|B^{\frac{t}{2}}A^{-\frac{t}{2}}\|$ も成り立つ．したがって

$$
\begin{aligned}
r_s(A^{-\frac{p+t}{4}}B^{\frac{p+t}{2}}A^{-\frac{p+t}{4}}) &= r_s(EA^{-\frac{p+t}{4}}B^{\frac{p+t}{2}}A^{-\frac{p+t}{4}}) \\
&= r_s(A^{\frac{t-p}{4}}A^{\frac{p-t}{4}}A^{-\frac{p+t}{4}}B^{\frac{p+t}{2}}A^{-\frac{p+t}{4}}) \ \ (E = A^{\frac{t-p}{4}}A^{\frac{p-t}{4}}) \\
&= r_s(A^{\frac{p-t}{4}}A^{-\frac{p+t}{4}}B^{\frac{p+t}{2}}A^{-\frac{p+t}{4}}A^{\frac{t-p}{4}}) \ \ (r_s(CD) = r_s(DC) \text{ を利用}) \\
&= r_s(A^{-\frac{t}{2}}B^{\frac{t}{2}}B^{\frac{p}{2}}A^{-\frac{p}{2}}) \leqq \|A^{-\frac{t}{2}}B^{\frac{t}{2}}B^{\frac{p}{2}}A^{-\frac{p}{2}}\| \\
&\leqq \|A^{-\frac{t}{2}}B^{\frac{t}{2}}\| \cdot \|B^{\frac{p}{2}}A^{-\frac{p}{2}}\| \leqq 1
\end{aligned}
$$

$A^{-\frac{p+t}{4}}B^{\frac{p+t}{2}}A^{-\frac{p+t}{4}}$ は正値行列だから, 補題 4.7 により

$$
A^{-\frac{p+t}{4}}B^{\frac{p+t}{2}}A^{-\frac{p+t}{4}} \leqq E
$$

である．したがって $A^{\frac{p+t}{4}}$ を両側から挟むと

$$
B^{\frac{p+t}{2}} \leqq A^{\frac{p+t}{2}}
$$

を得る．以上のことから, $p = 1, t = 0$ とすると, $\dfrac{1}{2}$ にも不等式は成り立つ．さらに $p = 1, t = \dfrac{1}{2}$ とすると $\dfrac{3}{4}$ にも成り立つ．このことをくり返せば $0 \leqq p \leqq 1$ のすべての p に対して成り立つ．これで定理は示された．□

古田不等式の証明． Löwner-Heinz の不等式の証明と同様に, 古田不等式の証明においても, 行列 A, B を正則と仮定してよい．まず $p \geqq 1, r \geqq 0$ に対して

$$
A \geqq B \geqq 0 \Longrightarrow (B^{\frac{r}{2}}A^pB^{\frac{r}{2}})^{\frac{1+r}{p+r}} \geqq B^{1+r}
$$

が成り立つことを示す．

Step 1. $0 \leqq r \leqq 1$ のとき不等式が成り立つことを示す．定理 3.2 より, ユニタリー行列 U で $B^{\frac{r}{2}}A^{\frac{p}{2}} = U|B^{\frac{r}{2}}A^{\frac{p}{2}}|$ と polar-分解する．よって,

$$
\begin{aligned}
(B^{\frac{r}{2}}A^pB^{\frac{r}{2}})^{\frac{1+r}{p+r}} &= \left\{B^{\frac{r}{2}}A^{\frac{p}{2}}(B^{\frac{r}{2}}A^{\frac{p}{2}})^*\right\}^{\frac{1+r}{p+r}} = \left\{U|B^{\frac{r}{2}}A^{\frac{p}{2}}|(U|B^{\frac{r}{2}}A^{\frac{p}{2}}|)^*\right\}^{\frac{1+r}{p+r}} \\
&= (U|B^{\frac{r}{2}}A^{\frac{p}{2}}|^2U^*)^{\frac{1+r}{p+r}} = U|B^{\frac{r}{2}}A^{\frac{p}{2}}|^{2\frac{1+r}{p+r}}U^* \ (U \text{ はユニタリーだから}) \\
&= U|B^{\frac{r}{2}}A^{\frac{p}{2}}| \cdot |B^{\frac{r}{2}}A^{\frac{p}{2}}|^{2\frac{1-p}{p+r}} \cdot |B^{\frac{r}{2}}A^{\frac{p}{2}}|U^* \\
&= B^{\frac{r}{2}}A^{\frac{p}{2}}(A^{\frac{p}{2}}\underline{B^r}A^{\frac{p}{2}})^{\frac{1-p}{p+r}}(B^{\frac{r}{2}}A^{\frac{p}{2}})^* \\
&\geqq B^{\frac{r}{2}}A^{\frac{p}{2}}(A^{\frac{p}{2}}\underline{A^r}A^{\frac{p}{2}})^{\frac{1-p}{p+r}}(B^{\frac{r}{2}}A^{\frac{p}{2}})^* \ \left(-1 \leqq \frac{1-p}{p+r} \leqq 0 \leqq r \leqq 1 \text{ と定理 4.3 から}\right) \\
&= B^{\frac{r}{2}}A^{\frac{p}{2}}(A^{\frac{p}{2}}A^rA^{\frac{p}{2}})^{\frac{1-p}{p+r}}A^{\frac{p}{2}}B^{\frac{r}{2}} = B^{\frac{r}{2}}AB^{\frac{r}{2}} \geqq B^{1+r}
\end{aligned}
$$

よって, $0 \leqq r \leqq 1$ の場合は証明できた.

Step 2. $1 \leqq r \leqq 3$ のとき不等式が成り立つことを示す. $p \geqq 1, 0 \leqq r_1 \leqq 1$ として $A_1 = (B^{\frac{r_1}{2}} A^p B^{\frac{r_1}{2}})^{\frac{1+r_1}{p+r_1}}$, $B_1 = B^{1+r_1}$ とおくと, Step 1 より, $A_1 \geqq B_1 \geqq 0$ がいえる. これにもう一度 Step 1 を適用すると,

$$(B_1^{\frac{r_2}{2}} A_1^{p_2} B_1^{\frac{r_2}{2}})^{\frac{1+r_2}{p_2+r_2}} \geqq B_1^{1+r_2}$$

がすべての $p_2 \geqq 1, 0 \leqq r_2 \leqq 1$ で成り立つことがわかる. つまり,

$$\left\{B^{\frac{(1+r_1)r_2}{2}} (B^{\frac{r_1}{2}} A^p B^{\frac{r_1}{2}})^{\frac{(1+r_1)p_2}{p+r_1}} B^{\frac{(1+r_1)r_2}{2}}\right\}^{\frac{1+r_2}{p_2+r_2}} \geqq B^{(1+r_1)(1+r_2)}.$$

ここで, p_2 を $p_2 \cdot \dfrac{1+r_1}{p+r_1} = 1$ にとり $r_2 = 1$ とおくと, この式は

$$(B^{\frac{1+2r_1}{2}} A^p B^{\frac{1+2r_1}{2}})^{\frac{2(1+r_1)}{p+1+2r_1}} \geqq B^{2(1+r_1)}.$$

さらに, $r = 1 + 2r_1$ とおくと $1 \leqq r \leqq 3$ で,

$$(B^{\frac{r}{2}} A^p B^{\frac{r}{2}})^{\frac{1+r}{p+r}} \geqq B^{1+r}.$$

となり, これは step 1 で得られたものと全く同じ式になるが, r の範囲が広がっていることがわかる. このことを繰り返すことによって, まさに実数版の帰納法的にすべての $0 \leqq r$ に対して古田不等式が成り立つことがわかる. □

第 6 章 練 習 問 題

1. 次の行列が正規行列であることを確かめ, ユニタリー行列で対角化せよ.

(1) $\begin{pmatrix} 0 & 1+i \\ 1-i & 0 \end{pmatrix}$ (2) $\begin{pmatrix} 2+4i & 0 & 2-4i \\ 0 & 4 & 0 \\ 2-4i & 0 & 2+4i \end{pmatrix}$ (3) $\begin{pmatrix} 2+i & i & 1 \\ -i & 2+i & i \\ 1 & -i & 2+i \end{pmatrix}$

(4) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & 1 \\ -i & 1 & 0 \end{pmatrix}$ (5) $\begin{pmatrix} 0 & -i & 1 \\ i & 0 & i \\ 1 & -i & 0 \end{pmatrix}$ (6) $\begin{pmatrix} 1 & i & 1 \\ -i & 1 & i \\ 1 & -i & 1 \end{pmatrix}$

(7) $\begin{pmatrix} 2-i & 0 & i \\ 0 & 1+i & 0 \\ i & 0 & 2-i \end{pmatrix}$ (8) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -2 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ (9) $\begin{pmatrix} 0 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & -2 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$

2. 次の巾零行列の標準形を求めよ.

(1) $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ -4 & 2 & -4 \\ -4 & 2 & -4 \end{pmatrix}$ (2) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & -3 & -2 \end{pmatrix}$

3. $A \neq O$ なる巾零行列 A は対角化不可能であることを示せ.

4. 次の行列の Jordan 標準形を求めよ.

(1) $\begin{pmatrix} 2 & 9 \\ -1 & 8 \end{pmatrix}$　(2) $\begin{pmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 0 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$　(3) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

(4) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$　(5) $\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$　(6) $\begin{pmatrix} 3 & 1 & -3 \\ -4 & -2 & 6 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$

5. 次の行列の Polar 分解を求めよ.

(1) $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$　(2) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$　(3) $\begin{pmatrix} 2 & 11 \\ -5 & 10 \end{pmatrix}$

(4) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & 1 \\ -i & 0 & 0 \end{pmatrix}$　(5) $\begin{pmatrix} -3 & -2 & -1 \\ 1 & 1 & 4 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$　(6) $\dfrac{1}{6}\begin{pmatrix} 2 & -2+4\sqrt{3} & 2+4\sqrt{3} \\ -2-4\sqrt{3} & 2 & -2+4\sqrt{3} \\ 2-4\sqrt{3} & -2-4\sqrt{3} & 2 \end{pmatrix}$

6. 次の行列の $\dfrac{1}{2}$ 乗を求めよ.

(1) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$　(2) $\begin{pmatrix} 8 & 4 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$　(3) $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$

(4) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ (5) $\begin{pmatrix} 14 & 13 & 9 \\ 13 & 14 & 9 \\ 9 & 9 & 18 \end{pmatrix}$　(6) $\begin{pmatrix} 6 & -3 & -3 \\ -3 & 14 & -11 \\ -3 & -11 & 14 \end{pmatrix}$　(7) $\begin{pmatrix} 1 & i & -1 \\ -i & 3 & i \\ -1 & -i & 1 \end{pmatrix}$

(8) $\begin{pmatrix} 3 & i & 1 \\ -i & 3 & i \\ 1 & -i & 3 \end{pmatrix}$　(9) $\begin{pmatrix} 3 & 1 & \sqrt{2} \\ 1 & 3 & -\sqrt{2} \\ \sqrt{2} & -\sqrt{2} & 2 \end{pmatrix}$

(10) $\begin{pmatrix} 4 & -4 & 2 \\ -4 & 4 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$

7. 次の行列 A の Jordan 標準形を求め, それを利用することによって A^n を求めよ.

(1) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ -2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$　(2) $\begin{pmatrix} -1 & -2 & 8 \\ -9 & -3 & 18 \\ -5 & -3 & 13 \end{pmatrix}$

8. 行列 A に対して e^A を

$$e^A = E + A + \frac{A^2}{2!} + \frac{A^3}{3!} + \cdots + \frac{A^n}{n!} + \cdots$$

で定義する．このとき $AB = BA$ ならば $e^A e^B = e^{A+B}$ が成り立つことが知られている．これを踏まえて，次の行列 A に対して e^A を求めよ．

(1) $\begin{pmatrix} 6 & -1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$　　(2) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$