第4章

固有値と固有ベクトル

この章では, 自然科学の広い分野で用いられている固有値問題を取り上げる. 正方行列の固有値と固有ベクトルを用いて, 行列の対角化を調べる.

1　1次独立と1次従属

すべての成分が 0 のベクトルを $\mathbf{0}$ とかき, **零ベクトル**と呼んだ.

定義 1.1. $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_k$ を n 次元数ベクトルとし, $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_k$ を実数とする.

(1) ベクトル $\lambda_1\boldsymbol{a}_1 + \lambda_2\boldsymbol{a}_2 + \cdots + \lambda_k\boldsymbol{a}_k$ を $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_k$ の **1次結合** または **線形結合** という.

(2) "$\lambda_1\boldsymbol{a}_1 + \lambda_2\boldsymbol{a}_2 + \cdots + \lambda_k\boldsymbol{a}_k = \mathbf{0}$　ならば　$\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_k = 0$"
が成り立つとき, $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_k$ は**1次独立**または**線形独立**であるという.

(3) $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_k$ が1次独立にならないとき, $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_k$ は**1次従属** または **線形従属** であるという. すなわち, 少なくとも1つは 0 でない $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_k$ に対して

$$\lambda_1\boldsymbol{a}_1 + \lambda_2\boldsymbol{a}_2 + \cdots + \lambda_k\boldsymbol{a}_k = \mathbf{0}$$

が成り立つとき, $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_k$ は1次従属である.

例 1.1. (1) $k = 1$ の場合. ベクトル $\boldsymbol{a}$ が 1 次独立 $\Leftrightarrow$ $\boldsymbol{a} \neq \mathbf{0}$. $\boldsymbol{a}$ が 1 次従属 $\Leftrightarrow$ $\boldsymbol{a} = \mathbf{0}$.
(2) $k = 2$ の場合. $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2$ が 1 次従属 $\Leftrightarrow$ $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2$ の一方が他方のスカラー倍に等しい.
実際 $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2$ が 1 次従属とすれば, ともには 0 にならない $\lambda_1, \lambda_2 \in \boldsymbol{R}$ があって,

$$\lambda_1\boldsymbol{a}_1 + \lambda_2\boldsymbol{a}_2 = \mathbf{0}.$$

$\lambda_1 \neq 0$ ならば, $\boldsymbol{a}_1 = -\dfrac{\lambda_2}{\lambda_1}\boldsymbol{a}_2$, $\lambda_2 \neq 0$ ならば, $\boldsymbol{a}_2 = -\dfrac{\lambda_1}{\lambda_2}\boldsymbol{a}_1$ となる．逆に $\boldsymbol{a}_1$ が $\boldsymbol{a}_2$ のスカラー倍とすれば, $\boldsymbol{a}_1 = \lambda\boldsymbol{a}_2$ だから $1 \cdot \boldsymbol{a}_1 - \lambda\boldsymbol{a}_2 = \boldsymbol{0}$ となるから, $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2$ は 1 次従属である．$\boldsymbol{a}_2$ が $\boldsymbol{a}_1$ のスカラー倍となるときも同様.

例 1.2. $\boldsymbol{R}^3$ のベクトル $\boldsymbol{a}_1 = (-1,0,2)$, $\boldsymbol{a}_2 = (1,2,0)$, $\boldsymbol{a}_3 = (-2,1,1)$ は 1 次独立となるかどうか判定してみる．これを解くために, $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \boldsymbol{R}$ に対して

$$\lambda_1\boldsymbol{a}_1 + \lambda_2\boldsymbol{a}_2 + \lambda_3\boldsymbol{a}_3 = \boldsymbol{0} \tag{4.1}$$

とする．これは, $(-\lambda_1 + \lambda_2 - 2\lambda_3, 2\lambda_2 + \lambda_3, 2\lambda_1 + \lambda_3) = \boldsymbol{0}$ を意味するから, 次の連立方程式が得られる.

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcl} -\lambda_1 & + & \lambda_2 & - & 2\lambda_3 & = & 0 \\ & & 2\lambda_2 & + & \lambda_3 & = & 0 \\ 2\lambda_1 & & & + & \lambda_3 & = & 0 \end{array}\right.$$

これを解けば, $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$. すなわち, (4.1) は $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$ のときのみ成り立つ．これは $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$, $\boldsymbol{a}_3$ が 1 次独立であることを示している.

問 1.1. 上の例題において, $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$ となることを確かめよ.

例 1.3. $\boldsymbol{R}^4$ の 2 つのベクトルを $\boldsymbol{b}_1 = (2,-1,1,-3)$, $\boldsymbol{b}_2 = \left(-1, \dfrac{1}{2}, r, \dfrac{3}{2}\right)$ とする．$r = -\dfrac{1}{2}$ の場合に限り, $\boldsymbol{b}_1$, $\boldsymbol{b}_2$ の一方が他方のスカラー倍となる．これから, $\boldsymbol{b}_1$, $\boldsymbol{b}_2$ は $r = -\dfrac{1}{2}$ のとき 1 次従属であり, $r \neq -\dfrac{1}{2}$ ならば 1 次独立となる.

定理 1.2. $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_k$ をベクトルとする.

(1) $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_k$ の中の少なくとも 1 個が $\boldsymbol{0}$ ならば $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_k$ は 1 次従属である.

(2) $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_k$ が 1 次独立ならば, これらの一部分も 1 次独立である.

(3) $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_k$ が 1 次従属ならば, これに任意の r 個のベクトルを加えた $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_k, \boldsymbol{a}_{k+1}, \cdots, \boldsymbol{a}_{k+r}$ も 1 次従属である.

証明. (1) $\boldsymbol{a}_i = \boldsymbol{0}$ とすれば, $\lambda_i \neq 0$ にとって

$$0\boldsymbol{a}_1 + \cdots + \lambda_i\boldsymbol{a}_i + \cdots + 0\boldsymbol{a}_k = \boldsymbol{0}$$

が成り立つから, $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_k$ は 1 次従属となる.

(2) は定義から明らかである.

(3) $\lambda_1\boldsymbol{a}_1 + \cdots + \lambda_k\boldsymbol{a}_k = \boldsymbol{0}$ ならば, $\lambda_1\boldsymbol{a}_1 + \cdots + \lambda_k\boldsymbol{a}_k + 0\boldsymbol{a}_{k+1} + \cdots + 0\boldsymbol{a}_{k+r} = \boldsymbol{0}$ となるから, $\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_{k+r}$ は 1 次従属となる．　□

定理 1.3. ベクトル $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_k$ について

$$\lambda_1 \boldsymbol{a}_1 + \lambda_2 \boldsymbol{a}_2 + \cdots + \lambda_k \boldsymbol{a}_k = \boldsymbol{0}, \quad \lambda_1 \neq 0$$

が成り立つ必要十分条件は, $\boldsymbol{a}_1$ が $\boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_k$ の 1 次結合となることである.

証明. $\lambda_1 \neq 0$ より, $\boldsymbol{a}_1 = -\dfrac{\lambda_2}{\lambda_1}\boldsymbol{a}_2 - \cdots - \dfrac{\lambda_k}{\lambda_1}\boldsymbol{a}_k$, すなわち $\boldsymbol{a}_1$ は $\boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_k$ の 1 次結合である. 逆に, $\boldsymbol{a}_1$ が $\boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_k$ の 1 次結合ならば, $\boldsymbol{a}_1 = \lambda_2 \boldsymbol{a}_2 + \cdots + \lambda_k \boldsymbol{a}_k$ となるから, 書き変えて

$$\lambda_1 \boldsymbol{a}_1 + \lambda_2 \boldsymbol{a}_2 + \cdots + \lambda_k \boldsymbol{a}_k = \boldsymbol{0}, \quad \lambda_1 = -1 \neq 0$$

が得られる. □

系 1.4. ベクトル $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_k$ について

(1) $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_k$ が 1 次独立となる必要十分条件は, この中のどのベクトルも残りのベクトルの 1 次結合とならないことである.

(2) $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_k$ が 1 次従属となる必要十分条件は, この中の少なくとも 1 つが残りのベクトルの 1 次結合で表されることである.

定理 1.5. $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_k$ を 1 次独立とし, これに 1 つのベクトル $\boldsymbol{a}$ を加えた $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_k, \boldsymbol{a}$ が 1 次従属ならば, $\boldsymbol{a}$ は $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_k$ の 1 次結合となる.

証明. $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_k, \boldsymbol{a}$ は 1 次従属 だから,

$$\lambda_1 \boldsymbol{a}_1 + \lambda_2 \boldsymbol{a}_2 + \cdots + \lambda_k \boldsymbol{a}_k + \lambda \boldsymbol{a} = \boldsymbol{0}$$

となり, $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_k, \lambda$ の少なくとも 1 つは 0 でない. もし $\lambda = 0$ ならば, $\lambda_1 \boldsymbol{a}_1 + \lambda_2 \boldsymbol{a}_2 + \cdots + \lambda_k \boldsymbol{a}_k = \boldsymbol{0}$ となり, $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_k$ は 1 次独立であるから, $\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_k = 0$, すなわち, λ_i, λ のすべては 0 となり仮定に反する. これから $\lambda \neq 0$. 定理 1.3 より, $\boldsymbol{a}$ は $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_k$ の 1 次結合となる. □

例 1.4. $\boldsymbol{R}^3$ において, $\boldsymbol{a}_1 = (1, 0, -3)$, $\boldsymbol{a}_2 = \left(\dfrac{1}{2}, -2, \dfrac{3}{2}\right)$, $\boldsymbol{a}_3 = (3, -6, 0)$ の 3 つのベクトルは, $\boldsymbol{a}_2 = -\dfrac{1}{2}\boldsymbol{a}_1 + \dfrac{1}{3}\boldsymbol{a}_3$ となるから, 1 次従属となる.

問 1.2. 次のベクトルは 1 次独立であるか 1 次従属であるかを判定せよ.

(1) $\boldsymbol{a} = (-1, 0)$, $\boldsymbol{b} = (1, 1)$

(2) $\boldsymbol{a} = (0, 1, -2)$, $\boldsymbol{b} = (1, 1, 1)$, $\boldsymbol{c} = (1, 2, -1)$

(3) $\boldsymbol{a} = (3, 7, -3, -9)$, $\boldsymbol{b} = (1, 3, -1, -3)$, $\boldsymbol{c} = (1, 1, 1, 2)$

(4) $\boldsymbol{a} = (1, -1, 2, 0, 5)$, $\boldsymbol{b} = (-2, 0, 1, 1, -1)$, $\boldsymbol{c} = (4, 1, 1, -3, -7)$

2 階数

定義 2.1. $\{\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_k\}$ を n 次元数ベクトルの集合とする. $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_k$ の中の 1 次独立なベクトルの最大の個数 r を $\{\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_k\}$ の **階数** といい,

$$r = \operatorname{rank}\{\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_k\}$$

と表す. すなわち, $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_k$ の中に 1 次独立な r 個のベクトルは存在するが, 任意の $r+1$ 個以上のベクトルは 1 次従属になるということである.

定義より $\operatorname{rank}\{\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_k\} \leqq k$ となる. また $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_k$ が 1 次独立ならば

$$\operatorname{rank}\{\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_k\} = k.$$

例 2.1. $\boldsymbol{R}^2$ のベクトルの集合　$M = \left\{\boldsymbol{0}, (-1, 2), \left(\frac{1}{2}, -1\right)\right\}$ を考える. M の中の任意の 2 つのベクトルは 1 次従属である. 例えば, $(-1, 2) = -2\left(\frac{1}{2}, -1\right)$. ゆえに, $\operatorname{rank} M < 2$. また M は $\boldsymbol{0}$ でないベクトル $(-1, 2)$ を含むから, $\operatorname{rank} M \geqq 1$. よって, $\operatorname{rank} M = 1$ となる.

例 2.2. $\boldsymbol{R}^3$ において, $\boldsymbol{a}_1 = (-1, 0, 2), \boldsymbol{a}_2 = (1, 2, 0), \boldsymbol{a}_3 = (-2, 1, 1), \boldsymbol{a}_4 = (2, 1, 1)$ とする. $\boldsymbol{a}_4 = \boldsymbol{a}_1 + \boldsymbol{a}_2 - \boldsymbol{a}_3$ となるから, $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3, \boldsymbol{a}_4$ は 1 次従属. また, $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3$ は 例 1.2 より 1 次独立となる. ゆえに, $\operatorname{rank}\{\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3, \boldsymbol{a}_4\} = 3$ である.

定理 2.2 (階数定理). $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_m$, $\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \cdots, \boldsymbol{b}_k$ を n 次元数ベクトルとする. 各 $j = 1, 2, \cdots, k$ に対して $\boldsymbol{b}_j$ が $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_m$ の 1 次結合となるならば,

$$\operatorname{rank}\{\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_m\} \geqq \operatorname{rank}\{\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \cdots, \boldsymbol{b}_k\}$$

が成り立つ.

証明. $\operatorname{rank}\{\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_m\} = s$ とする. $\operatorname{rank}\{\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \cdots, \boldsymbol{b}_k\} > s$ とした時に, 矛盾が生じることを示せばよい.

$\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_s$ が 1 次独立であると仮定すると, 定理 1.5 により, $s < k$ について $\boldsymbol{a}_k$ は $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_s$ の 1 次結合として表せる. これから, 各 $\boldsymbol{b}_j$ は $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_s$ の 1 次結合となる.

ここで, $\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \cdots, \boldsymbol{b}_s$ が 1 次独立であると仮定する. もし, $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_s$ が $\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \cdots, \boldsymbol{b}_s$ の 1 次結合で表現される事が示されれば, 各 $\boldsymbol{b}_j$ が $\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \cdots, \boldsymbol{b}_s$ の 1 次結合で表現されることが分かり, $\operatorname{rank}\{\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \cdots, \boldsymbol{b}_k\} = s$ となり, $\operatorname{rank}\{\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \cdots, \boldsymbol{b}_k\} > s$ に矛盾することがわかる. よって $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_s$ が $\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \cdots, \boldsymbol{b}_s$ の 1 次結合で表現される事を示せばよい.

いま, $\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \cdots, \boldsymbol{b}_s$ が次のように $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_s$ の1次結合として表されているとする.

$$\begin{aligned} \boldsymbol{b}_1 &= r_{11}\boldsymbol{a}_1 + r_{12}\boldsymbol{a}_2 + \cdots + r_{1s}\boldsymbol{a}_s \\ \boldsymbol{b}_2 &= r_{21}\boldsymbol{a}_1 + r_{22}\boldsymbol{a}_2 + \cdots + r_{2s}\boldsymbol{a}_s \\ \vdots & \quad \vdots \\ \boldsymbol{b}_s &= r_{s1}\boldsymbol{a}_1 + r_{s2}\boldsymbol{a}_2 + \cdots + r_{ss}\boldsymbol{a}_s. \end{aligned} \tag{4.2}$$

(4.2) において, ベクトル $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_s$, $\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \cdots, \boldsymbol{b}_s$ をそれぞれ普通の数として考えれば, (4.2) は次のように書き換える事ができる.

$$\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_{11} & r_{12} & \cdots & r_{1s} \\ r_{21} & r_{22} & \cdots & r_{2s} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ r_{s1} & r_{s2} & \cdots & r_{ss} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_s \end{pmatrix}.$$

ここで, 行列

$$R = \begin{pmatrix} r_{11} & r_{12} & \cdots & r_{1s} \\ r_{21} & r_{22} & \cdots & r_{2s} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ r_{s1} & r_{s2} & \cdots & r_{ss} \end{pmatrix}$$

の行基本変形を考える.

$\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \cdots, \boldsymbol{b}_s$ は1次独立であるので, R にどんな行基本変形を施しても, 全てが 0 となる行はできない. つまり第2章定理 3.2 より R は正則であることが分かる. よって, (4.2) の両辺左側から R^{-1} をかければ,

$$\begin{pmatrix} q_{11} & q_{12} & \cdots & q_{1s} \\ q_{21} & q_{22} & \cdots & q_{2s} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ q_{s1} & q_{s2} & \cdots & q_{ss} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_s \end{pmatrix}.$$

を得る, ここで

$$R^{-1} = \begin{pmatrix} q_{11} & q_{12} & \cdots & q_{1s} \\ q_{21} & q_{22} & \cdots & q_{2s} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ q_{s1} & q_{s2} & \cdots & q_{ss} \end{pmatrix}$$

とした. よって, 各 a_i, b_j をそれぞれベクトル $\boldsymbol{a}_i$, $\boldsymbol{b}_j$ として考えれば

$$\begin{aligned} \boldsymbol{a}_1 &= q_{11}\boldsymbol{b}_1 + q_{12}\boldsymbol{b}_2 + \cdots + q_{1s}\boldsymbol{b}_s \\ \boldsymbol{a}_2 &= q_{21}\boldsymbol{b}_1 + q_{22}\boldsymbol{b}_2 + \cdots + q_{2s}\boldsymbol{b}_s \\ \vdots & \quad \vdots \\ \boldsymbol{a}_s &= q_{s1}\boldsymbol{b}_1 + q_{s2}\boldsymbol{b}_2 + \cdots + q_{ss}\boldsymbol{b}_s. \end{aligned}$$

を得る事ができ，$\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_s$ が $\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \cdots, \boldsymbol{b}_s$ の1次結合で表現されることが示された．
□

系 2.3. $\boldsymbol{R}^n$ における任意のベクトルの集合の階数は n 以下である．

証明．$M = \{\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_m\}$ を $\boldsymbol{R}^n$ のベクトルの集合とする．また，n 個の数ベクトルの集合 B を

$$B = \{\begin{pmatrix}1\\0\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\\\vdots\\0\end{pmatrix}, \cdots, \begin{pmatrix}0\\0\\0\\\vdots\\1\end{pmatrix}\}$$

とする．(これらのベクトルを**基本ベクトル**と呼び，第 i 成分が1で他の成分が0である基本ベクトルを $\boldsymbol{e}_i$ で表す.) $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \cdots, \boldsymbol{e}_n$ は1次独立であるから，rank $B = n$，各 $\boldsymbol{a}_i$，$i = 1, 2, \cdots, m$ は $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \cdots, \boldsymbol{e}_n$ の1次結合であるから，階数定理（定理2.2）より rank $M \leqq n$ となる．□

問 2.1. 次のベクトルの集合の階数を求めよ．

(1) $\{(-1, 1), (0, 1), (1, 1)\}$

(2) $\{(0, 0), (1, -1), (-1, 1)\}$

(3) $\{(1, 1, -1), (2, 2, -1), (-3, -3, 3), (-\sqrt{2}, -\sqrt{2}, \sqrt{2})\}$

3　行列の階数，正則性との関係

この節では第2章3節で学習した行列の階数が，1次独立なベクトルの数で表されることを説明しよう．

定義 3.1. A を (m, n) 行列とする．

(1) A の行ベクトルの集合 $\{\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_m\}$ において，1次独立であるベクトルの最大個数を A の**行階数**といい，r-rank A と書く．

(2) A の列ベクトルの集合 $\{\boldsymbol{a}'_1, \boldsymbol{a}'_2, \cdots, \boldsymbol{a}'_m\}$ において，1次独立であるベクトルの最大個数を A の**列階数**といい，c-rank A と書く．

第2章3節では行列の階数を，階段行列で定義した．階段行列における定義と上で述べた定義との関係を以下示そう．

定理 3.2. A を (m, n) 行列とする．B を n 次正則行列，C を m 次正則行列としたとき，次が成り立つ．

(1) r-rank A = r-rank AB = r-rank CA.

(2) c-rank A = c-rank AB = c-rank CA.

証明. c-rank $A =$ r-rank ${}^tA$ より, (1) だけを示せばよい.

$$A = (a_{ij}) = \begin{pmatrix} \boldsymbol{a}_1 \\ \boldsymbol{a}_2 \\ \vdots \\ \boldsymbol{a}_n \end{pmatrix}, \ \text{r-rank } A = r$$

とする.

(a) r-rank $A =$ r-rank AB を示す.

AB の第 i 行ベクトルは,

$$(a_{i1}, a_{i2}, \cdots, a_{in})B = \boldsymbol{a}_i B.$$

ここで r-rank $A = r$ より $\{\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_r\}$ が 1 次独立であると仮定する.
そして $\{\boldsymbol{a}_1 B, \boldsymbol{a}_2 B, \cdots, \boldsymbol{a}_r B\}$ が 1 次独立であることを示せばよい.

$$\lambda_1 \boldsymbol{a}_1 B + \lambda_2 \boldsymbol{a}_2 B + \cdots + \lambda_r \boldsymbol{a}_r B = \mathbf{0}$$

とすれば, B の正則性より,

$$\begin{aligned} & \lambda_1 \boldsymbol{a}_1 + \lambda_2 \boldsymbol{a}_2 + \cdots + \lambda_r \boldsymbol{a}_r \\ = \ & (\lambda_1 \boldsymbol{a}_1 B + \lambda_2 \boldsymbol{a}_2 B + \cdots + \lambda_r \boldsymbol{a}_r B)B^{-1} = \mathbf{0}. \end{aligned}$$

よって, 仮定より $\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_r = 0$ となるので, $\{\boldsymbol{a}_1 B, \boldsymbol{a}_2 B, \cdots, \boldsymbol{a}_r B\}$ は 1 次独立.
つまり r-rank $A \geqq$ r-rank AB. よって, 任意の n 次正則行列 B に対して

$$\text{r-rank } A \geqq \text{r-rank } AB \geqq \text{r-rank } (AB)B^{-1} = \text{r-rank } A \tag{4.3}$$

となり, r-rank $A =$ r-rank AB が示された.

(b) r-rank $A =$ r-rank CA を示す.

$C = (c_{ij})$ とする. 第 3 章 5 節の定理 16.2 の証明と同様の計算により, CA の第 i 行ベクトルは

$$\sum_{j=1}^{m} c_{ij} \boldsymbol{a}_j$$

となる. よって CA の各行ベクトルが $\{\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_m\}$ の 1 次結合で表されているので, 階数定理より

$$\text{r-rank } A \geqq \text{r-rank } CA.$$

よって, C は正則であるので (4.3) と同様の計算により r-rank $A =$ r-rank CA を得る. □

定理 3.3. 任意の行列 A に対して

$$\text{r-rank } A = \text{c-rank } A = \text{rank } A$$

が成り立つ.

証明. r-rank $A{=}r$ とする. 第２章３節より, ある正則行列 P, Q を用いて

$$PAQ = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & & 0 & \\ & \ddots & & 0 \\ 0 & & 1 & \\ \hline & 0 & & 0 \end{array}\right)$$

とできる. よって定理 3.2 より

$$\begin{aligned} \text{rank } A &= \text{r-rank } PAQ = \text{r-rank } A \\ \text{rank } A &= \text{c-rank } PAQ = \text{c-rank } A \qquad \square \end{aligned}$$

定理 3.3 によって, 1 次独立という言葉を用いて行列 A が正則であるための同値条件を得る.

系 3.4. A を n 次正方行列とし, その列ベクトルを $A = (\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_n)$ とする. 次は同値.

(1) $\{\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_n\}$ が 1 次独立.

(2) rank $A = n$.

(3) A は正則

証明は定理 3.3 と 第２章の定理 6.1 より直ちに得られる.　$\square$

定理 3.3 によって, ベクトルの 1 次独立性を簡単に判別することができる.

例 3.1.

$$\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{c} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

が 1 次独立かどうか調べてみよう.

$$A = (\boldsymbol{a}\ \boldsymbol{b}\ \boldsymbol{c}\ \boldsymbol{0}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 5 & 0 \\ -1 & -1 & -3 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

とおいて rank A を求める.

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 5 & 0 \\ -1 & -1 & -3 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{4 行}+\text{2 行}\times(-2)]{\text{3 行}+\text{2 行}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & -4 & -8 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{1\text{行} \leftrightarrow 2\text{行}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & -4 & -8 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[4\text{行}+2\text{行}\times 4]{3\text{行}+2\text{行}\times(-1)} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

よって, rank $A = 2$ となり, $\{\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}\}$ は 1 次独立ではない.

4 固有値と固有ベクトル (1)

この節では, 行列の固有値と固有ベクトルの定義と具体的な求め方を紹介する.

定義 4.1 (固有値, 固有ベクトル). A を n 次正方行列とする. このとき, 数 α と n 次元数ベクトル $\boldsymbol{x}$ $(\neq \boldsymbol{0})$ があって,

$$A\boldsymbol{x} = \alpha\boldsymbol{x}$$

となるとき, α を A の**固有値**, $\boldsymbol{x}$ を α に対する A の**固有ベクトル**という.

例 4.1. $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ とする. このとき,

$$A\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 3\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

よって, 3 は A の固有値, $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ は 3 に対する A の固有ベクトル. また,

$$A\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

よって, 1 は A の固有値, $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ は 1 に対する A の固有ベクトルである.

定理 4.2. A を n 次正方行列とする. α を A の固有値とし, $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$ を α に対する A の固有ベクトルとする. このとき, 任意の数 a, b に対して, $a\boldsymbol{x} + b\boldsymbol{y}$ も α に対する A の固有ベクトルとなる.

証明. $A(a\boldsymbol{x} + b\boldsymbol{y}) = \alpha(a\boldsymbol{x} + b\boldsymbol{y})$ を示せばよい. $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$ が α に対する A の固有ベクトルなので,

$$A\boldsymbol{x} = \alpha\boldsymbol{x}, \qquad A\boldsymbol{y} = \alpha\boldsymbol{y}.$$

よって,

$$\begin{aligned} A(a\boldsymbol{x} + b\boldsymbol{y}) &= aA\boldsymbol{x} + bA\boldsymbol{y} \\ &= a \cdot \alpha\boldsymbol{x} + b \cdot \alpha\boldsymbol{y} = \alpha(a\boldsymbol{x} + b\boldsymbol{y}). \end{aligned}$$ □

数 α と ベクトル $\boldsymbol{x}$ が行列 A の固有値と固有ベクトルであることを確認することは, 例 4.1 のように定義にしたがって確認すればよい.

次に, 行列 A の固有値, 固有ベクトルを具体的に求める方法を紹介しよう.

定義 4.3. n 次正方行列 A に対して,

$$f_A(x) = |xE - A|$$

を A の**固有多項式**, $f_A(x) = 0$ を A の**固有方程式**という.

定理 4.4. n 次正方行列 A に対して, 方程式

$$f_A(x) = 0$$

の解は A の固有値となる.

証明. $f_A(x) = 0$ の 1 つの解を α とすると,

$$f_A(\alpha) = |\alpha E - A| = 0.$$

よって, 第 3 章, 定理 5.2 より $\alpha E - A$ は正則でないので,

$$(\alpha E - A)\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$$

となる数ベクトル $\boldsymbol{x}$ $(\neq \boldsymbol{0})$ が存在する. つまり

$$A\boldsymbol{x} = \alpha\boldsymbol{x}$$

となり, α は A の固有値である. □

例 4.2. $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ の固有値と固有ベクトルを求めよう.

解答. A の固有多項式 $f_A(x)$ は

$$\begin{aligned} f_A(x) = |xE - A| = \begin{vmatrix} x-1 & -1 & 0 \\ -1 & x & -1 \\ 0 & -1 & x-1 \end{vmatrix} &= x(x-1)^2 - 2(x-1) \\ &= (x-2)(x-1)(x+1). \end{aligned}$$

よって, 定理 4.4 より A の固有値は $f_A(x) = 0$ の解なので $1, -1, 2$.

以下, それぞれの固有値に対する固有ベクトルを求めよう.

(1) 固有値 1 に対する固有ベクトルを $\boldsymbol{x}_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}$ とすると, 定義より

$$A\boldsymbol{x}_1 = \boldsymbol{x}_1.$$

よって,

$$\mathbf{0} = (A - E)\boldsymbol{x}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ x_1 - y_1 + z_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$$

より, $y_1 = 0$, $x_1 + z_1 = 0$. ここで, $x_1 = c$ とおくと, $z_1 = -c$ となり固有値 1 に対する固有ベクトル $\boldsymbol{x}_1$ は

$$\boldsymbol{x}_1 = c \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \qquad (c \neq 0).$$

(2) 固有値 -1 に対する固有ベクトルを $\boldsymbol{x}_2 = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix}$ とすると, 定義より

$$A\boldsymbol{x}_2 = -\boldsymbol{x}_2.$$

よって,

$$\mathbf{0} = (A + E)\boldsymbol{x}_2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x_2 + y_2 \\ x_2 + y_2 + z_2 \\ y_2 + 2z_2 \end{pmatrix}.$$

よって,

$$\begin{cases} 2x_2 + y_2 = 0 \\ x_2 + y_2 + z_2 = 0 \\ y_2 + 2z_2 = 0 \end{cases}.$$

ここで, $x_2 = c$ とおくと, 固有値 1 に対する固有ベクトル $\boldsymbol{x}_2$ は

$$\boldsymbol{x}_2 = c \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad (c \neq 0).$$

(3) 固有値 2 に対する固有ベクトルを $\boldsymbol{x}_3 = \begin{pmatrix} x_3 \\ y_3 \\ z_3 \end{pmatrix}$ とすると, 定義より

$$A\boldsymbol{x}_3 = 2\boldsymbol{x}_3.$$

よって,

$$\mathbf{0} = (A-2E)\boldsymbol{x}_3 = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_3 \\ y_3 \\ z_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x_3 + y_3 \\ x_3 - 2y_3 + z_3 \\ y_3 - z_3 \end{pmatrix}$$

よって,

$$\begin{cases} -x_3 + \ y_3 \qquad = 0 \\ x_3 - 2y_3 + z_3 = 0 \\ \qquad y_3 - z_3 = 0 \end{cases}$$

ここで, $x_3 = c$ とおくと, 固有値 2 に対する固有ベクトル $\boldsymbol{x}_3$ は

$$\boldsymbol{x}_3 = c \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad (c \neq 0).$$

問 4.1. 次の行列の固有値と固有ベクトルを求めよ.

(1) $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$　(2) $\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}$　(3) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$　(4) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

5　固有値と固有ベクトル (2)

この節では, 行列の固有値と固有多項式の性質を紹介しよう.

定義 5.1. n 次正方行列 $A = (a_{ij})$ の対角成分の和

$$a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn}$$

を A の**トレース**といい, $\mathrm{tr}(A)$ で表す.

定理 5.2. n 次正方行列 A の固有多項式 $f_A(x)$ は x^{n-1} の係数が $-\mathrm{tr}(A)$, 定数項が $(-1)^n|A|$ となる.

証明. (i) $f_A(x) = |xE - A|$ より, $f_A(0) = |-A| = (-1)^n|A|$. よって定数項は $(-1)^n|A|$.
(ii) $A = (a_{ij})$ とすると,

$$\begin{aligned} f_A(x) &= \begin{vmatrix} x - a_{11} & -a_{12} & \cdots & -a_{1n} \\ -a_{21} & x - a_{22} & \cdots & -a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_{n1} & -a_{n2} & \cdots & x - a_{nn} \end{vmatrix} \\ &= (x - a_{11})(x - a_{22}) \cdots (x - a_{nn}) + (n-2 \text{ 次以下の多項式}) \\ &= x^n - (a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn})x^{n-1} + (n-2 \text{ 次以下の多項式}) \\ &= x^n - \mathrm{tr}(A)x^{n-1} + (n-2 \text{ 次以下の多項式}). \qquad \square \end{aligned}$$

定義 5.3. 2つの n 次正方行列 A, B に対して, ある正則行列 P が存在して

$$B = P^{-1}AP$$

となるとき, A と B は**相似**であるといい, $A \sim B$ で表す.

例 5.1.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -6 \\ 4 & 9 \end{pmatrix}$$

より, $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -2 & -6 \\ 4 & 9 \end{pmatrix}$.

定理 5.4. 2つの n 次正方行列 A, B に対して, $A \sim B$ ならば $f_A(x) = f_B(x)$. よって, 定理 5.2 より $\mathrm{tr}(A) = \mathrm{tr}(B)$, $|A| = |B|$ が成り立つ.

証明. $A \sim B$ より, ある正則行列 P が存在して

$$B = P^{-1}AP$$

となる. よって,

$$f_B(x) = |xE - B| = |xE - P^{-1}AP| = |P^{-1}(xE - A)P| = |P^{-1}| \cdot |xE - A| \cdot |P| = f_A(x). \qquad \square$$

例 5.2. $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -2 & -6 \\ 4 & 9 \end{pmatrix}$ とすれば, 例 5.1 より $A \sim B$ である. よって,

$$\begin{aligned} f_A(x) = |xE - A| &= \begin{vmatrix} x-2 & -1 \\ -4 & x-5 \end{vmatrix} = (x-2)(x-5) - 4 = x^2 - 7x + 6. \\ f_B(x) = |xE - B| &= \begin{vmatrix} x+2 & 6 \\ -4 & x-0 \end{vmatrix} = (x+2)(x-9) - 24 = x^2 - 7x + 6. \end{aligned}$$

となり, $f_A(x) = f_B(x)$.

6 行列の対角化

前節で述べたように, 行列の固有多項式は相似な行列同士では一致することが分かった. この節では, 行列が対角行列と相似となるような条件を紹介する.

定義 6.1. n 次正方行列 A は, 対角行列に相似となるとき, すなわち n 次正則行列 P を適当にとり

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \alpha_1 & & & 0 \\ & \alpha_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \alpha_n \end{pmatrix} \tag{4.4}$$

とできるとき, **対角化可能** であるという. また, A は P によって **対角化される** という.

対角化可能となる条件を調べてみよう.

定理 6.2. A を n 次正方行列, $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r$ を A の相異なる固有値, $\boldsymbol{x}_i$ を α_i に対する固有ベクトルとする. このとき, $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \cdots, \boldsymbol{x}_r$ は 1 次独立となる.

証明. $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \cdots, \boldsymbol{x}_r$ が 1 次従属であることを仮定して矛盾を示す. この仮定より,

(i) $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \cdots, \boldsymbol{x}_{k-1}$ が 1 次独立,

(ii) $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \cdots, \boldsymbol{x}_{k-1}, \boldsymbol{x}_k$ が 1 次従属

となる k $(k \leqq r)$ が存在する. 定理 1.5 より

$$\boldsymbol{x}_k = \lambda_1 \boldsymbol{x}_1 + \lambda_2 \boldsymbol{x}_2 + \cdots + \lambda_{k-1} \boldsymbol{x}_{k-1} \tag{4.5}$$

とかける. ここで, (4.5) の両辺の左側から A をかける. $A\boldsymbol{x}_i = \alpha_i \boldsymbol{x}_i$ であることに注意すると,

$$\begin{aligned} & A\boldsymbol{x}_k = \lambda_1 A\boldsymbol{x}_1 + \lambda_2 A\boldsymbol{x}_2 + \cdots + \lambda_{k-1} A\boldsymbol{x}_{k-1} \\ \Longleftrightarrow \quad & \alpha_k \boldsymbol{x}_k = \lambda_1 \alpha_1 \boldsymbol{x}_1 + \lambda_2 \alpha_2 \boldsymbol{x}_2 + \cdots + \lambda_{k-1} \alpha_{k-1} \boldsymbol{x}_{k-1}. \end{aligned} \tag{4.6}$$

一方, (4.5) の両辺に α_k をかければ,

$$\alpha_k \boldsymbol{x}_k = \lambda_1 \alpha_k \boldsymbol{x}_1 + \lambda_2 \alpha_k \boldsymbol{x}_2 + \cdots + \lambda_{k-1} \alpha_k \boldsymbol{x}_{k-1}. \tag{4.7}$$

よって, (4.6)−(4.7) より,

$$\boldsymbol{0} = \lambda_1(\alpha_1 - \alpha_k)\boldsymbol{x}_1 + \lambda_2(\alpha_2 - \alpha_k)\boldsymbol{x}_2 + \cdots + \lambda_{k-1}(\alpha_{k-1} - \alpha_k)\boldsymbol{x}_{k-1}. \tag{4.8}$$

となって, 条件 (i) と α_i が全て異なる実数であることより,

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_{k-1} = 0$$

となり, (4.5) は

$$\boldsymbol{x}_k = \lambda_1 \boldsymbol{x}_1 + \lambda_2 \boldsymbol{x}_2 + \cdots + \lambda_{k-1} \boldsymbol{x}_{k-1} = \boldsymbol{0}.$$

となって, $\boldsymbol{x}_k \neq \boldsymbol{0}$ に矛盾.

よって, $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \cdots, \boldsymbol{x}_r$ は 1 次独立である. $\square$

定理 6.3. n 次正方行列 A が n 個の相異なる固有値 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ をもつとする. そして α_i に対する固有ベクトルを $\boldsymbol{x}_i$ とし,

$$P = (\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \cdots, \boldsymbol{x}_n)$$

とする. このとき, P は正則行列で,

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \alpha_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \alpha_n \end{pmatrix}.$$

証明. 定理 6.2 から, $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \cdots, \boldsymbol{x}_n$ は 1 次独立であるので, 系 3.4 より P は正則となる. また, 各 i に対して, $A\boldsymbol{x}_i = \alpha_i \boldsymbol{x}_i$ であるので,

$$\begin{aligned} AP &= A(\boldsymbol{x}_1\ \boldsymbol{x}_2\ \cdots\ \boldsymbol{x}_n) \\ &= (A\boldsymbol{x}_1\ A\boldsymbol{x}_2\ \cdots\ A\boldsymbol{x}_n) \\ &= (\alpha_1\boldsymbol{x}_1\ \alpha_2\boldsymbol{x}_2\ \cdots\ \alpha_n\boldsymbol{x}_n) \\ &= (\boldsymbol{x}_1\ \boldsymbol{x}_2\ \cdots\ \boldsymbol{x}_n)\begin{pmatrix} \alpha_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \alpha_n \end{pmatrix} \\ &= P\begin{pmatrix} \alpha_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \alpha_n \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

よって,

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \alpha_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \alpha_n \end{pmatrix}. \qquad \square$$

例 6.1. 行列 $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$ の場合は, 異なる 2 個の固有値 -1 と 4 をもつから, 対角化可能である. 具体的には, 属する固有ベクトル $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}$ をとり, $P = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$ とおけば $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$ となる.

定理 6.3 の証明をよく吟味することによって, 行列 A の固有値が全て異なっていなくても対角化できる場合もある事が分かる.

定理 6.4. A を n 次正方行列とする. このとき, 次は同値:

(1) A が n 個の 1 次独立な固有ベクトルをもつ.

(2) $P^{-1}AP$ が対角行列となるような正則行列 P が存在する.

証明. (1) $\Longrightarrow$ (2) の証明. A の n 個の固有値 α_i に対する固有ベクトルを $\boldsymbol{x}_i$ とする (このとき, α_i は全て異なっていなくてもよい). $P = (\boldsymbol{x}_1\ \boldsymbol{x}_2\ \cdots\ \boldsymbol{x}_n)$ とおく. (1) より $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \cdots, \boldsymbol{x}_n$ は1次独立であるので, 系 3.4 より P は正則となる. $P^{-1}AP$ が対角行列になることは系 6.3 の証明と同様.

(2) $\Longrightarrow$ (1) の証明. 条件より

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \alpha_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \alpha_n \end{pmatrix}$$

となる. これにより

$$AP = P\begin{pmatrix} \alpha_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \alpha_n \end{pmatrix} \tag{4.9}$$

となる. ここで,

$$P = (\boldsymbol{x}_1\ \boldsymbol{x}_2\ \cdots\ \boldsymbol{x}_n)$$

とおけば, P は正則なので, 系 3.4 より $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \cdots, \boldsymbol{x}_n$ は1次独立となる. また, (4.9) より $A\boldsymbol{x}_i = \alpha_i\boldsymbol{x}_i$ が成り立つので, $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \cdots, \boldsymbol{x}_n$ は A の固有ベクトルとなる. □

例 6.2. $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -2 & 3 & -2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ の対角化を求めてみよう.

(A) A の固有値は 1 (重解) と 5 である.

(1) 1 に属する固有ベクトルとしては, $c_1\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, c_2\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ $(c_1, c_2 \neq 0)$.

(2) 5 に属する固有ベクトルは $c\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ $(c \neq 0)$.

ここで, $c_1 = c_2 = c = 1$ とおいて得られる固有ベクトル

$$\boldsymbol{p}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \boldsymbol{p}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \boldsymbol{p}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

は1次独立となる. これは $P = (\boldsymbol{p}_1\ \boldsymbol{p}_2\ \boldsymbol{p}_3) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ とおくと, $|P| = 4 \neq 0$ となるからである. よって, 定理 6.4 により A は対角化可能となる. 実際に計算すれば,

$$P^{-1} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{4} & \frac{1}{4} & \frac{-1}{4} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{-1}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

だから

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}.$$

(B) B の固有値 1, 2（重解）をもち, 固有ベクトルは

$$\boldsymbol{u} = c\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}, \boldsymbol{v} = c'\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} \ (c, c' \neq 0)$$

である. c と c' の任意の値について, $\boldsymbol{u}$ と $\boldsymbol{v}$ の形のベクトルは, 3 個の 1 次独立のベクトルとならないから, B は対角化可能ではない.

問 6.1. 次の行列を A とするとき, 適当な正則行列 P を求めて, $P^{-1}AP$ が対角行列となるようにせよ.

$$(1)\ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad (2)\ \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \qquad (3)\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & \frac{3}{2} \\ 2 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

行列を対角化をすることによって, 行列の n 乗を計算する事ができる.

例 6.3. 例 6.2 の行列 $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -2 & 3 & -2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ に対して, A^n を求めてみよう.

例 6.2 より正則行列 P を

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

とすれば

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{3}{4} & \frac{1}{4} & \frac{-1}{4} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{-1}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix} \quad \text{であり,} \quad P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

となる. ここで,

$$(P^{-1}AP)^n = P^{-1}AP \cdot P^{-1}AP \cdot P^{-1}AP \cdots P^{-1}AP = P^{-1}A^nP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 5^n \end{pmatrix}.$$

よって,

$$A^n = P(P^{-1}A^nP)P^{-1} = P\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 5^n \end{pmatrix}P^{-1} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 3+5^n & 1-5^n & -1+5^n \\ 2-2\cdot 5^n & 2+2\cdot 5^n & 2-2\cdot 5^n \\ -1+5^n & 1-5^n & 3+5^n \end{pmatrix}.$$

第 4 章 練 習 問 題

1. 次のベクトルが 1 次独立であるか調べよ．

(1) $\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$　(2) $\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\1\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3\\1\\5\end{pmatrix}$　(3) $\begin{pmatrix}4\\1\\7\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}7\\2\\12\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$

2. 次のベクトルの組が一次従属になるように m の値を求めよ．

$$\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\3\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}m\\1\\2\end{pmatrix}$$

3. ベクトル $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}, \boldsymbol{d}$ が 1 次独立のとき, 次のベクトルの組は 1 次独立か.

(a) $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}, \boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}, \boldsymbol{c}+\boldsymbol{d}, \boldsymbol{d}+\boldsymbol{a}$

(b) $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}, \boldsymbol{b}-\boldsymbol{c}, \boldsymbol{c}-\boldsymbol{d}, \boldsymbol{d}-\boldsymbol{a}$

(c) $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}, \boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}+\boldsymbol{d}, \boldsymbol{c}+\boldsymbol{d}+\boldsymbol{a}, \boldsymbol{d}+\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$

(d) $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}-\boldsymbol{d}, \boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c}+\boldsymbol{d}, \boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}+\boldsymbol{d}, -\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}+\boldsymbol{d}$

4. ベクトルの集合 $\left\{\begin{pmatrix}-1\\2\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\-4\\\alpha\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}\beta\\-2\\1\end{pmatrix}\right\}$ の階数が 1 のとき, α と β を求めよ.

5. 次の行列の固有値と固有ベクトルを求めよ．

(1) $\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 2\end{pmatrix}$　(2) $\begin{pmatrix}3 & 1\\2 & 0\end{pmatrix}$　(3) $\begin{pmatrix}2 & a\\a & 1\end{pmatrix}$,　$(a \neq 0)$

(4) $\begin{pmatrix}3 & 2 & 4\\2 & 0 & 2\\4 & 2 & 3\end{pmatrix}$　(5) $\begin{pmatrix}1 & 3 & 4\\2 & 1 & 3\\0 & 2 & 1\end{pmatrix}$　(6) $\begin{pmatrix}2 & 0 & 1\\0 & 2 & 1\\1 & 1 & 3\end{pmatrix}$

6. 正方行列 A が $A^2 = A$ をみたすとき, A の固有値は 0 と 1 であることを示せ.

7. 次の行列 A は正則行列 P を用いて対角化可能か？もし可能ならば, $P^{-1}AP$ と P を求めよ.

(1) $\begin{pmatrix}3 & 2\\1 & 4\end{pmatrix}$　(2) $\begin{pmatrix}6 & -3 & -7\\-1 & 2 & 1\\5 & -3 & -6\end{pmatrix}$　(3) $\begin{pmatrix}2 & -1 & 1\\0 & 1 & 1\\-1 & 1 & 1\end{pmatrix}$　(4) $\begin{pmatrix}1 & 2 & 1\\-1 & 4 & 1\\2 & -4 & 0\end{pmatrix}$