# 第3章

# 行列式

この章では, 正方行列に対して定義される行列式を論ずる. 逆行列の存在条件や, それを直接に求める公式が示される.

## 1　順列

行列式を定義するための準備として，ここでは順列について説明する. 1 から $n$ までの $n$ 個の整数を，任意の順序で 1 列に並べたものを，$n$ 個の数の順列という. $n$ 個の数の順列は, $\langle p_1, p_2, \cdots, p_n \rangle$ のように表す. たとえば, $\langle 3,2,4,1 \rangle$ は 4 個の数の順列である. $n$ 個の数の順列は全部で $n!$ 個ある.
$n$ 個の数の順列 $\langle p_1, p_2, \cdots, p_n \rangle$ において

$$i < j \qquad \text{かつ} \qquad p_i > p_j$$

であるとき，2 数の組 $(p_i, p_j)$ を **転倒** という. たとえば, $\langle 3,2,4,1 \rangle$ の順列には

$$(3,2), \ (3,1), \ (2,1), \ (4,1)$$

の 4 個の転倒が含まれている. $n$ 個の数の順列 $\langle p_1, p_2, \cdots, p_n \rangle$ が偶数個の転倒を含むとき, この順列を**偶順列**といい，奇数個の転倒を含むとき，**奇順列**という. $\langle p_1, p_2, \cdots, p_n \rangle$ が偶順列であるか奇順列であるかに従って，その**符号** $\operatorname{sgn}\langle p_1, ..., p_n \rangle$ を，1 または -1 と定める. たとえば, $\langle 3,2,4,1 \rangle$ は偶順列なので

$$\operatorname{sgn}\langle 3,2,4,1 \rangle = 1$$

である.

**例 1.1.** 5 個の数の順列 $\langle 2,1,5,3,4 \rangle$ に含まれる転倒は

$$(2,1), \ (5,3), \ (5,4)$$

の 3 個であるので

$$\operatorname{sgn}\langle 2,1,5,3,4 \rangle = -1.$$

**問 1.1.** 次の順列の符号を求めよ．

(1) $\langle 3,4,1,2\rangle$　　(2) $\langle 4,5,3,1,2\rangle$

(3) $\langle 1,6,3,4,5,2\rangle$　　(4) $\langle 3,5,7,6,2,1,4\rangle$

$n$ 個の数の順列 $\langle p_1,p_2,\cdots,p_n\rangle$ において，２つの数 $p_i$ と $p_j$ を入れかえることを**互換**といい，$p_i \leftrightarrow p_j$ で表す．たとえば

$$\langle 3,4,1,2\rangle \xrightarrow{3\leftrightarrow 1} \langle 1,4,3,2\rangle \xrightarrow{4\leftrightarrow 2} \langle 1,2,3,4\rangle,$$

$$\langle 2,3,5,1,4\rangle \xrightarrow{2\leftrightarrow 1} <1,3,5,2,4> \xrightarrow{3\leftrightarrow 2} \langle 1,2,5,3,4\rangle \xrightarrow{5\leftrightarrow 3} \langle 1,2,3,5,4\rangle \xrightarrow{5\leftrightarrow 4} \langle 1,2,3,4,5\rangle.$$

この例からも明らかなように，次の定理が成り立つ．

**定理 1.1.** $n$ 個の数の順列 $\langle p_1,...,p_n\rangle$ は，何回かの互換によって，$\langle 1,...,n\rangle$ にすることができる．逆にどのような順列も，$\langle 1,...,n\rangle$ に何回かの互換を行うことにより得られる．

**定理 1.2.** $n$ 個の数の順列 $\langle p_1,...,p_n\rangle$ に，２数 $p_k$ と $p_\ell$　$(k<\ell)$ の互換を行うと，順列の偶・奇が入れかわる．よって

$$\mathrm{sgn}\langle p_1,...,p_\ell,...,p_k,...,p_n\rangle = -\mathrm{sgn}\langle p_1,...,p_k,...,p_\ell,...,p_n\rangle.$$

**証明.** $a=p_k,\ b=p_\ell$ とし，$a$ と $b$ の互換を行ったときの転倒の増減について考える．$a>b$ の場合もほぼ同様に考えられるので，以下では $a<b$ のときのみを考える．$p_i\ (k<i<\ell)$ のうちで，

- $a$ より小さいものは $r$ 個,
- $a$ と $b$ の間にあるものは $s$ 個,
- $b$ より大きいものは $t$ 個

であるとする．すると，$a$ と $b$ の互換による転倒の増減は，次の通りである (ただし，下で $*$ は $a,b$ 以外の数を表す)．

- $(*,a)$ の形の転倒は，$s+t$ 個増える．
- $(a,*)$ の形の転倒は，$r$ 個減る．
- $(*,b)$ の形の転倒は，$t$ 個減る．
- $(b,*)$ の形の転倒は，$r+s$ 個増える．
- $(b,a)$ が増える．

ゆえに，全部で

$$(s+t)-r-t+(r+s)+1=2s+1$$

だけ転倒が増える．$2s+1$ は奇数だから，定理は示された．　□

**定理 1.3.** $n$ 個の数の順列で，偶順列と奇順列の個数は同数で，それぞれ $\dfrac{n!}{2}$ 個である．

**証明.** 偶順列の個数を $a$, 奇順列の個数を $b$ とする．偶順列に，たとえば 1 と 2 の互換を行えば奇順列になるから， $a \leqq b$. 同様に，奇順列に 1 と 2 の互換を行えば偶順列になるから， $a \geqq b$. 従って $a = b$. $a + b = n!$ であるから，定理が示された． □

**例 1.2.** 3 個の数の偶順列は

$$\langle 1,2,3\rangle,\ \langle 2,3,1\rangle,\ \langle 3,1,2\rangle$$

奇順列は

$$\langle 2,1,3\rangle,\ \langle 3,2,1\rangle,\ \langle 1,3,2\rangle$$

で，どちらも $\dfrac{3!}{2} = 3$ だけである．

**定理 1.4.**
(1) 順列 $\langle 1, 2, ..., n\rangle$ に互換を $k$ 回行って，順列 $\langle p_1, p_2, ..., p_n\rangle$ が得られるならば,

$$\mathrm{sgn}\langle p_1, p_2, ..., p_n\rangle = (-1)^k.$$

(2) 順列 $\langle p_1, p_2, ..., p_n\rangle$ に互換を $k$ 回行って，順列 $\langle 1, 2, ..., n\rangle$ が得られるならば,

$$\mathrm{sgn}\langle p_1, p_2, ..., p_n\rangle = (-1)^k.$$

**証明.** (1) 定理 2 により，互換を 1 回行うごとに順列の符号がかわる．よって

$$\mathrm{sgn}\langle p_1, p_2, ..., p_n\rangle = (-1)^k \mathrm{sgn}\langle 1, 2, ..., n\rangle = (-1)^k.$$

(2) も同様． □

**例 1.3.** 5 個の数の順列 $\langle 2, 1, 5, 3, 4\rangle$ の符号を求める．

$$\langle 2,1,5,3,4\rangle \xrightarrow{2\leftrightarrow 1} \langle 1,2,5,3,4\rangle$$

$$\xrightarrow{5\leftrightarrow 3} \langle 1,2,3,5,4\rangle \xrightarrow{5\leftrightarrow 4} \langle 1,2,3,4,5\rangle$$

よって $\mathrm{sgn}\ \langle 1, 2, 5, 3, 4\rangle = (-1)^3 = -1$.

**問 1.2.** 定理 1.4 にもとづいて，問 1.1 の各順列の符号を求めよ．

次の定理は，正方行列 $A$ について， $A$ の行列式と ${}^tA$ の行列式とが等しいことを示すときに用いる．

**定理 1.5.** $n$ 個の数の順列　$\langle p_1, p_2, ..., p_n\rangle$ が与えられたとし，これらの数の組

$$(1, p_1),\ (2, p_2),\ ...,\ (n, p_n) \tag{1}$$

を作る．これらの数の組を，各組の 2 番目の数が $1, 2, ..., n$ の順になるように並べかえると，

$$(q_1, 1),\ (q_2, 2),\ ...,\ (q_n, n) \tag{2}$$

となるとする．このとき，

$$\mathrm{sgn}\langle p_1, p_2, ..., p_n\rangle = \mathrm{sgn}\langle q_1, q_2, ..., q_n\rangle.$$

**証明.** 順列 $\langle 1, 2, ..., n\rangle$ に互換を $k$ 回行って $\langle q_1, q_2, ..., q_n\rangle$ が得られるとすると，定理 1.4 から

$$\mathrm{sgn}\langle q_1, q_2, ..., q_n\rangle = (-1)^k.$$

いま，$a$ と $b$ を入れかえるという互換に応じて，数の組 $(a, *)$ と $(b, *)$ を入れかえるという操作を順に考えて，$k$ 回の互換に対応するこの操作を順に定理 1.5 の (1) に行えば，(2) が得られる．ゆえに，順列 $\langle p_1, p_2, ..., p_n\rangle$ に $k$ 回の互換を施すと，順列 $\langle 1, 2, ..., n\rangle$ になる．従って定理 1.4 から

$$\mathrm{sgn}\langle p_1, p_2, ..., p_n\rangle = (-1)^k. \quad \square$$

## 2　行列式の定義

$n$ 次の正方行列 $A = (\,a_{ij}\,)$ の行列式について考える．$n$ 個の数の順列 $\langle p_1, p_2, ..., p_n\rangle$ について，

$$\mathrm{sgn}\langle p_1, p_2, ..., p_n\rangle a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n}$$

という量を考える．これは順列の符号と $A$ の $(1, p_1)$ 成分，$(2, p_2)$ 成分,...，$(n, p_n)$ 成分をかけ合わせたものである．この量をすべての順列について考え加えたものを，$A$ の**行列式**といい，$|A|$ あるいは $\det A$ などとかく．すなわち

$$|A| = \sum_{\langle p_1, ..., p_n\rangle} \mathrm{sgn}\langle p_1, ..., p_n\rangle a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n}.$$

$A$ の行列式は

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

とかくこともある．以下，この節では $n = 2, 3, 4$ のときに，定義に従って行列式 $|A|$ について考えてみる．まず，2 次正方行列 $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ の行列式について考える．定義に

より

$$|A| = \sum_{\langle p_1, p_2 \rangle} \mathrm{sgn}\langle p_1, p_2 \rangle a_{1p_1} a_{2p_2}.$$

いま，２個の数の順列は $\langle 1,2 \rangle, \langle 2,1 \rangle$ の２つであるから，

$$\begin{aligned} |A| &= \mathrm{sgn}\langle 1,2 \rangle a_{11}a_{22} + \mathrm{sgn}\langle 2,1 \rangle a_{12}a_{21} \\ &= a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}. \end{aligned}$$

すなわち

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

次に，3 次正方行列 $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ の行列式について．定義により，

$$|A| = \sum_{\langle p_1, p_2, p_3 \rangle} \mathrm{sgn}\langle p_1, p_2, p_3 \rangle a_{1p_1} a_{2p_2} a_{3p_3}.$$

例 1.2 から

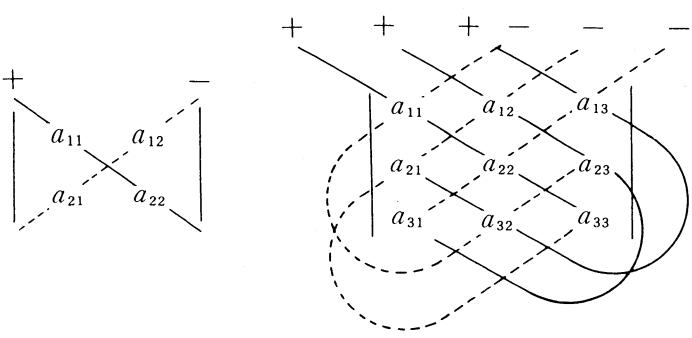
$$\begin{aligned} |A| = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} \\ -a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}. \end{aligned}$$

よって，

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{32}a_{23}.$$

右辺は，下図において，各矢印の上の成分の積をつくり，表示されている符号をつけて加えたものと見ると，憶えやすい (サラスの方法).



**例 2.1.** (1) $\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} = 3\cdot(-2) - 1\cdot 4 = -10.$

(2) $\begin{vmatrix} 2 & 1 & -2 \\ -1 & 5 & 0 \\ 3 & 7 & 1 \end{vmatrix} = 2\cdot5\cdot1 + (-1)\cdot7\cdot(-2) + 3\cdot0\cdot1 - (-2)\cdot5\cdot3 - 1\cdot(-1)\cdot1 - 2\cdot7\cdot0 = 55.$

4次以上の正方行列の行列式については，サラスの方法のような簡明な規則はない．通常は，次節以降で説明する行列式の性質を用いて計算される．ここでは，行列式の定義式に慣れるために，簡単な行列について行列式を計算してみる．

**例 2.2.** $A = (a_{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 5 \\ 6 & 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}$ のときの行列式 $|A|$ を計算してみる．定義から

$$|A| = \sum_{\langle p_1,p_2,p_3,p_4\rangle} \mathrm{sgn}\langle p_1,p_2,p_3,p_4\rangle\ a_{1p_1}a_{2p_2}a_{3p_3}a_{4p_4}.$$

ここで，和は $4! = 24$ 個の順列についての和であるが，$a_{1p_1}a_{2p_2}a_{3p_3}a_{4p_4} \neq 0$ となる順列 $\langle p_1,p_2,p_3,p_4\rangle$ は $\langle 1,2,3,4\rangle, \langle 3,2,4,1\rangle$ の2つのみである．ゆえに，

$$\begin{aligned} |A| &= \mathrm{sgn}\langle 1,2,3,4\rangle a_{11}a_{22}a_{33}a_{44} + \mathrm{sgn}\langle 3,2,4,1\rangle a_{13}a_{22}a_{34}a_{41} \\ &= 1\cdot3\cdot4\cdot7 + 2\cdot3\cdot5\cdot6 = 264. \end{aligned}$$

**問 2.1.** 次の行列式を計算せよ．

(1) $\begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}$　(2) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 5 & 5 & 7 \\ 3 & 4 & 5 \end{vmatrix}$　(3) $\begin{vmatrix} -2 & 4 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \\ -1 & -2 & 3 \end{vmatrix}$

**問 2.2.** $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 1 & 5 \end{pmatrix}$ の行列式 $|A|$ の値を，定義に従って求めよ．

## 3　行列式の性質 (1)

次の定理から始める．

**定理 3.1.** $n$ 次正方行列 $A$ について，$|A| = |{}^tA|$.

**証明.** $A = (a_{ij}), {}^tA = (b_{ij})$ とすると $b_{ij} = a_{ji}$ で，よって

$$\begin{aligned} |{}^tA| &= \sum_{\langle p_1,p_2,\ldots,p_n\rangle} \mathrm{sgn}\langle p_1,\ldots,p_n\rangle\ b_{1p_1}b_{2p_2}\cdots b_{np_n} \\ &= \sum_{\langle p_1,p_2,\ldots,p_n\rangle} \mathrm{sgn}\langle p_1,\ldots,p_n\rangle\ a_{p_11}a_{p_22}\cdots a_{p_nn}. \end{aligned}$$

ここで積の順番をかえて

$$a_{p_1 1}a_{p_2 2}\cdots a_{p_n n} = a_{1q_1}a_{2q_2}\cdots a_{nq_n}$$

とすると，定理 1.5 から，

$$\mathrm{sgn}\langle p_1, ..., p_n\rangle = \mathrm{sgn}\langle q_1, ..., q_n\rangle.$$

また，$\langle p_1, ..., p_n\rangle$ がすべての順列を動くとき，$\langle q_1, ..., q_n\rangle$ もすべての順列を動く．ゆえに，

$$|{}^tA| = \sum_{\langle q_1,...,q_n\rangle} \mathrm{sgn}\langle q_1, ..., q_n\rangle\ a_{1q_1}a_{2q_2}\cdots a_{nq_n} = |A|. \quad \square$$

**定理 3.2.** (1) $A$ の第 $j$ 列ベクトルが 2 つの列ベクトルの和 $\boldsymbol{a}'_j + \boldsymbol{a}''_j$ であれば，$|A|$ は第 $j$ 列ベクトルが $\boldsymbol{a}'_j$ である行列式と $\boldsymbol{a}''_j$ である行列式の和になる．すなわち，

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a'_{1j}+a''_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a'_{nj}+a''_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a'_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a'_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a''_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a''_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

(2) $A$ の 第 $j$ 列を $c$ 倍した行列の行列式は $c\cdot|A|$ に等しい．すなわち，

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & ca_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & ca_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = c \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

(3) $A$ の相異なる 2 つの列を入れ換えた行列の行列式は，$-|A|$ に等しい．すなわち，

$$\begin{array}{c} \begin{array}{ccccccc} \phantom{a_{11}} & & (i) & & (j) & & \phantom{a_{1n}} \end{array} \\ \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1i} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{ni} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \end{array} = - \begin{array}{c} \begin{array}{ccccccc} \phantom{a_{11}} & & (i) & & (j) & & \phantom{a_{1n}} \end{array} \\ \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1i} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{ni} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \end{array}$$

**注意**．上の定理で，「列」であるところをすべて「行」で置き換えても，主張は正しい．
**証明.** 上の注意を踏まえて，証明は「行」について行う．(1) 定義 から

$$|A| = \sum_{\langle p_1,...,p_n\rangle} \mathrm{sgn}\langle p_1, ..., p_n\rangle\ a_{1p_1}\cdots(a'_{jp_j}+a''_{jp_j})\cdots a_{np_n}$$

であることに注意する．

$$(\text{左辺}) = \sum_{\langle p_1,...,p_n\rangle} \mathrm{sgn}\langle p_1, ..., p_n\rangle\ a_{1p_1}\cdots a'_{jp_j}\cdots a_{np_n}$$
$$+ \sum_{\langle p_1,...,p_n\rangle} \mathrm{sgn}\langle p_1, ..., p_n\rangle\ a_{1p_1}\cdots a''_{jp_j}\cdots a_{np_n} = (\text{右辺}).$$

(2) (左辺) $= \displaystyle\sum_{\langle p_1,\ldots,p_n\rangle} \mathrm{sgn}\langle p_1,\ldots,p_n\rangle\, a_{1p_1}\cdots\ (c\cdot a_{jp_j})\cdots a_{np_n}$

$$= c \sum_{\langle p_1,\ldots,p_n\rangle} \mathrm{sgn}\langle p_1,\ldots,p_n\rangle\, a_{1p_1}\cdots a_{jp_j}\cdots a_{np_n} = (\text{右辺}).$$

(3) 順列 $\langle p_1,\ldots,p_n\rangle$ に $p_i$ と $p_j$ の互換を施した順列を $\langle q_1,\ldots,q_n\rangle$ とする．
$\mathrm{sgn}\langle p_1,\ldots,p_n\rangle = -\mathrm{sgn}\langle q_1,\ldots,q_n\rangle$ で，また $\langle p_1,\ldots,p_n\rangle$ がすべての順列を動くとき $\langle q_1,\ldots,q_n\rangle$ もすべての順列を動くから，

$$\begin{aligned}
(\text{左辺}) &= \sum_{\langle p_1,\ldots,p_n\rangle} \mathrm{sgn}\langle p_1,\ldots,p_n\rangle\, a_{1p_1}\cdots a_{ip_j}\cdots a_{jp_i}\cdots a_{np_n} \\
&= -\sum_{\langle q_1,\ldots,q_n\rangle} \mathrm{sgn}\langle q_1,\ldots,q_n\rangle\, a_{1q_1}\cdots a_{iq_i}\cdots a_{jq_j}\cdots a_{nq_n} \\
&= -|A| \qquad \square
\end{aligned}$$

**例 3.1.** 上の定理により，

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 6 & 5 & 4 \\ 7 & 8 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1+5 & 2+3 & 3+1 \\ 7 & 8 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 7 & 8 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 5 & 3 & 1 \\ 7 & 8 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 5 & 3 & 1 \\ 7 & 8 & 0 \end{vmatrix},$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 6 & 5 & 4 \\ 7 & 8 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2\cdot 1 & 2\cdot 2 & 2\cdot 3 \\ 6 & 5 & 4 \\ 7 & 8 & 0 \end{vmatrix} = 2\cdot\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 6 & 5 & 4 \\ 7 & 8 & 0 \end{vmatrix},$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 7 & 8 & 0 \\ 6 & 5 & 4 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 6 & 5 & 4 \\ 7 & 8 & 0 \end{vmatrix}.$$

が成り立つ．これらの等式はサラスの方法によって行列式の値を計算してで確かめることもできる．

**注意.** $n$ 次元列ベクトルとは $(n,1)$ 行列のことであるから，その和は行列の和の特別な場合としてすでに定義されている．すなわち

$$\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}, \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \quad \text{ならば} \quad \boldsymbol{a}+\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} a_1+b_1 \\ a_2+b_2 \\ \vdots \\ a_n+b_n \end{pmatrix}.$$

# 4　行列式の性質 (2)

この節では，前節の定理を再確認してその系を導き，これらの性質の使い方を例で見る．

$(m,n)$ 行列 $A=(a_{ij})$ を表すのに，$A$ の第 $j$ 列ベクトル $\begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix}$ をたとえばひとつの文字 $\boldsymbol{a}_j$ で表して，

$$A=(\boldsymbol{a}_1\ \boldsymbol{a}_2\ \cdots \boldsymbol{a}_n)$$

のようにかくことがある．また，$A$ の第 $i$ 行ベクトル $(a_{i1}\ a_{i2}\ \cdots\ a_{in})$ をたとえばひとつの文字 $\boldsymbol{b}_i$ で表して，

$$A=\begin{pmatrix} \boldsymbol{b}_1 \\ \boldsymbol{b}_2 \\ \vdots \\ \boldsymbol{b}_m \end{pmatrix}$$

とかくことがある．これらの記法によれば，前節の定理 3.2 (1),(2),(3) は次のようになる．

$$\det(\boldsymbol{a}_1 ... \boldsymbol{a}'_j + \boldsymbol{a}''_j ... \boldsymbol{a}_n)$$

$$=\det(\boldsymbol{a}_1 ... \boldsymbol{a}'_j ... \boldsymbol{a}_n)+\det(\boldsymbol{a}_1 ... \boldsymbol{a}''_j ... \boldsymbol{a}_n)$$

$$\det(\boldsymbol{a}_1 ... c\boldsymbol{a}_j ... \boldsymbol{a}_n)=c\cdot\det(\boldsymbol{a}_1 ... \mathbf{a}_j ... \boldsymbol{a}_n)$$

$$(*)\qquad \det(\boldsymbol{a}_1 ... \boldsymbol{a}_j ... \boldsymbol{a}_i ... \boldsymbol{a}_n)$$

$$=-\det(\boldsymbol{a}_1 ... \boldsymbol{a}_i ... \boldsymbol{a}_j ... \boldsymbol{a}_n)$$

ただし，$\boldsymbol{a}_1,...,\boldsymbol{a}_n$ は $n$ 次元列ベクトルである．

**定理 4.1.** 正方行列 $A$ において，2つの列（行）が等しければ，$|A|=0$ である．

**証明.** $A=(\boldsymbol{a}_1,...,\boldsymbol{a}_n)$ とし，$\boldsymbol{a}_i=\boldsymbol{a}_j$ であったとする．$(*)$ から

$$|A|=-|A|,$$

よって，$|A|=0$. 行が等しいときについても同様である．　□

**定理 4.2.** $n$ 次正方行列の 1 つの列 (あるいは行) に，他の列 (あるいは行) の $c$ 倍を加えても，行列式の値は変わらない．すなわち

$$\det(\boldsymbol{a}_1 \cdots \boldsymbol{a}_i + c\boldsymbol{a}_j \cdots \boldsymbol{a}_j \cdots \boldsymbol{a}_n) = \det(\boldsymbol{a}_1 \cdots \boldsymbol{a}_i \cdots \boldsymbol{a}_j \cdots \boldsymbol{a}_n).$$

また

$$\det\begin{pmatrix} \boldsymbol{b}_1 \\ \vdots \\ \boldsymbol{b}_i + c\boldsymbol{b}_j \\ \vdots \\ \boldsymbol{b}_j \\ \vdots \\ \boldsymbol{b}_n \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} \boldsymbol{b}_1 \\ \vdots \\ \boldsymbol{b}_i \\ \vdots \\ \boldsymbol{b}_j \\ \vdots \\ \boldsymbol{b}_n \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \cdots (i) \\ \\ \cdots (j) \\ \\ \\ \end{matrix}$$

ただし，$\boldsymbol{a}_1, \dots, \boldsymbol{a}_n$ は $n$ 次元列ベクトル，$\boldsymbol{b}_1, \dots, \boldsymbol{b}_n$ は $n$ 次元行ベクトルである．

**証明.** 定理 3.2 を順番に使うと

$$\begin{aligned}(\text{左辺}) &= \det(\boldsymbol{a}_1 \cdots \boldsymbol{a}_i \cdots \boldsymbol{a}_j \cdots \boldsymbol{a}_n) + \det(\boldsymbol{a}_1 \cdots c\boldsymbol{a}_j \cdots \boldsymbol{a}_j \cdots \boldsymbol{a}_n) \\ &= \det(\boldsymbol{a}_1 \cdots \boldsymbol{a}_i \cdots \boldsymbol{a}_j \cdots \boldsymbol{a}_n) + c \cdot \det(\boldsymbol{a}_1 \cdots \boldsymbol{a}_j \cdots \boldsymbol{a}_j \cdots \boldsymbol{a}_n) = (\text{右辺}).\end{aligned}$$ □

**例 4.1.**

$$\begin{aligned}\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 0 & b-a & b^2-a^2 \\ 0 & c-a & c^2-a^2 \end{vmatrix} \\ &= (b-a)(c-a)\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 0 & 1 & b+a \\ 0 & 1 & c+a \end{vmatrix} \\ &= (b-a)(c-a)\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 0 & 1 & b+a \\ 0 & 0 & c-b \end{vmatrix} = (b-a)(c-a)(c-b).\end{aligned}$$

**問 4.1.** $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & 1 & 3 \\ x^2 & 1 & 9 \end{vmatrix} = 0$ となる $x$ を求めよ．

**問 4.2.** 行列式 $\begin{vmatrix} 1 & a & a^3 \\ 1 & b & b^3 \\ 1 & c & c^3 \end{vmatrix} = 0$ を例 4.1 と同様に因数分解してみよ．

$n$ 次の正方行列 $A = (a_{ij})$ において

$$i > j \implies a_{ij} = 0$$

であるとき，$A$ を**上三角行列**という．すなわち

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & \text{\huge 0} & \ddots & \vdots \\ & & & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

また

$$i < j \implies a_{ij} = 0$$

であるとき，$A$ を**下三角行列**という．すなわち

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & & & \text{\huge 0} \\ a_{21} & a_{22} & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

**例 4.2.** $A = (a_{ij})$ が上三角行列であるときは

$$|A| = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

$A$ が下三角行列であるときも，同じ式が成り立つ．

**証明.** 行列式の定義から

$$|A| = \sum_{\langle p_1,\dots,p_n\rangle} \mathrm{sgn}\langle p_1,\dots,p_n\rangle \; a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n}.$$

いま，$i > j$ なら $a_{ij} = 0$ となっているから，$a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n} \neq 0$ なら

$$1 \leqq p_1,\ 2 \leqq p_2,\ \cdots, n \leqq p_n$$

で，このとき $\langle p_1, p_2, \dots, p_n\rangle = \langle 1, 2, \dots, n\rangle$ となっている．ゆえに

$$|A| = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}. \quad \square$$

正方行列は行基本変形により上三角行列に変形することができる (正方行列の場合，階段行列も上三角行列の一種であるから)．行列の行基本変形により行列式がどのように影響されるかがわかるので，行列式は行基本変形により行列を上三角行列に変形することにより計算できる (後に，もっと一般的な行列式の計算方法を学ぶ)．

**例 4.3.**

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 3 & -3 & -2 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & -9 & -11 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -11 & -28 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -39 \end{vmatrix} = 39.$$

最初の等号： 4 行 + 1 行 $\times(-3)$, 2番目の等号： 3 行 + 2 行 $\times(-1)$, 4 行 + 2 行 $\times(-3)$, 3番目の等号：4 行 + 4 行 $\times(-11)$, 4番目の等号：4 行 + 4 行 $\times(11)$.

**問 4.3.** 次の行列式を計算せよ.

(1) $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{vmatrix}$ (2) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 3 & 6 \\ 2 & 4 & 2 & 8 \\ 1 & 2 & 4 & 3 \end{vmatrix}$ (3) $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$ (4) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \\ 13 & 14 & 15 & 16 \end{vmatrix}$

## 5 行列式の乗法性

**例 5.1.** 2次正方行列 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} x & y \\ z & u \end{pmatrix}$ について

$$AB = \begin{pmatrix} ax+bz & cx+dz \\ ay+bu & cy+du \end{pmatrix}$$

である. よって,

$$|AB| = (ax+bz)(cy+du) - (ay+bu)(cx+dz)$$

$$= (ad-bc)(xu-yz) = |A||B|.$$

この性質は実は一般の $n$ 次正方行列についても成り立つ. そのことを見るのが, この節の主目的である.

**補題 5.1.** $A = (\boldsymbol{a}_1\ \boldsymbol{a}_2\ \cdots\ \boldsymbol{a}_n)$ を $n$ 次正方行列とし, $\langle p_1, p_2, ..., p_n\rangle$ を $n$ 個の数の順列とする. このとき,

$$\det(\boldsymbol{a}_{p_1}\ \boldsymbol{a}_{p_2}\ \cdots\ \boldsymbol{a}_{p_n})$$
$$= \mathrm{sgn}\langle p_1, ..., p_n\rangle \det(\boldsymbol{a}_1\ \boldsymbol{a}_2\ \cdots\ \boldsymbol{a}_n).$$

**証明.** 順列 $\langle 1, ..., n\rangle$ が, $k$ 回の互換によって, 順列 $\langle p_1, ..., p_n\rangle$ になるとすると

$$\mathrm{sgn}\langle p_1, ..., p_n\rangle = (-1)^k.$$

一方

$$\det(\boldsymbol{a}_{p_1}\ \boldsymbol{a}_{p_2}\ \cdots\ \boldsymbol{a}_{p_n}) = (-1)^k \det(\boldsymbol{a}_1\ \boldsymbol{a}_2\ \cdots\ \boldsymbol{a}_n).$$

よって補題 5.1 が成り立つ． □

**注意.** 行ベクトルの並べかえについても，同様に成り立つ．

**定理 5.2.** 2 つの $n$ 次正方行列 $A, B$ について，

$$|AB| = |A| \cdot |B|.$$

**証明.** $A = (a_{ij})$, $B = (b_{ij}) = \begin{pmatrix} \boldsymbol{b}_1 \\ \boldsymbol{b}_2 \\ \vdots \\ \boldsymbol{b}_n \end{pmatrix}$ とする． $AB$ の第 $i$ 行ベクトルは

$$\left(\sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{k1} \ \sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{k2} \ \cdots \sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kn}\right)$$

$$= \sum_{k=1}^{n} a_{ik}(b_{k1} \ b_{k2} \ \cdots b_{kn}) = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}\boldsymbol{b}_k.$$

よって

$$AB = \begin{pmatrix} \sum_{k=1}^{n} a_{1k}\boldsymbol{b}_k \\ \sum_{k=1}^{n} a_{2k}\boldsymbol{b}_k \\ \vdots \\ \sum_{k=1}^{n} a_{nk}\boldsymbol{b}_k \end{pmatrix}$$

であり，

$$|AB| = \sum_{p_1, \dots, p_n = 1}^{n} a_{1p_1} \cdots a_{np_n} \cdot \det \begin{pmatrix} \boldsymbol{b}_{p_1} \\ \boldsymbol{b}_{p_2} \\ \vdots \\ \boldsymbol{b}_{p_n} \end{pmatrix}.$$

ここで，$p_1, \dots, p_n$ の中に同じものがあれば $\det \begin{pmatrix} \boldsymbol{b}_{p_1} \\ \boldsymbol{b}_{p_2} \\ \vdots \\ \boldsymbol{b}_{p_n} \end{pmatrix} = 0$ であるから，和は順列 $\langle p_1, \dots, p_n \rangle$ についての和としてよい．よって補題 5.1 から

$$|AB| = \sum_{\langle p_1, \dots, p_n \rangle} \operatorname{sgn}\langle p_1, \dots, p_n \rangle \ a_{1p_1}a_{2p_2} \cdots a_{np_n}|B| = |A| \cdot |B|.$$

□

**例 5.2.** 行列の等式

$$\begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha a - \beta b & -\alpha b - \beta a \\ \beta a + \alpha b & -\beta b + \alpha a \end{pmatrix}$$

から

$$(\alpha^2 + \beta^2)(a^2 + b^2) = (\alpha a - \beta b)^2 + (\alpha b + \beta a)^2$$

がわかる．

**例 5.3.**

$$A = \begin{pmatrix} a^2 + b^2 & bc & ac \\ bc & a^2 + c^2 & ab \\ ac & ab & b^2 + c^2 \end{pmatrix} = B^2$$

ただし $B = \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ a & 0 & c \\ b & c & 0 \end{pmatrix}$ で

$$|B| = 2abc.$$

ゆえに，

$$|A| = 4a^2b^2c^2.$$

**例 5.4.** ${}^tAA = E$ となる正方行列 $A$ を **直交行列** という．たとえば，

$$A = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

などである．直交行列について，

$$|A| = \pm 1.$$

**例 5.5.** ${}^tA = -A$ となる正方行列 $A$ を **交代行列** という．奇数次の交代行列の行列式は 0 である．

# 6 展開公式

行列式を計算する際に基本的な役割を果たす，展開公式について学ぶ．これは，理論的にも重要である．

**補題 6.1.**

(1) $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n-1} & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n-11} & \cdots & a_{n-1n-1} & a_{n-1n} \\ 0 & \cdots & 0 & a_{nn} \end{pmatrix}$ について，$|A| = a_{nn} \cdot \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n-1} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n-11} & \cdots & a_{n-1n-1} \end{vmatrix}$.

(2) $A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & a_{2n} \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$ について，$|A| = a_{11} \cdot \begin{vmatrix} a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$.

**証明.** (1) 行列式の定義から,

$$|A| = \sum_{\langle p_1,\dots,p_n\rangle} \operatorname{sgn}\langle p_1,\dots,p_n\rangle\, a_{1p_1}\cdots a_{np_n}.$$

いま, $p_n \neq n$ なら $a_{np_n}=0$. ゆえに, 上の和は $\langle p_1,\dots,p_{n-1},n\rangle$ の形の順列についての和としてよい. また転倒の個数を考えて,

$$\operatorname{sgn}\langle p_1,\dots,p_{n-1},n\rangle = \operatorname{sgn}\langle p_1,\dots,p_{n-1}\rangle.$$

よって

$$\begin{aligned}|A| &= \sum_{\langle p_1,\dots,p_{n-1}\rangle} \operatorname{sgn}\langle p_1,\dots,p_{n-1}\rangle\, a_{1p_1}\cdots a_{n-1p_{n-1}}a_{nn} \\ &= a_{nn}\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n-1} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n-11} & \cdots & a_{n-1n-1}\end{vmatrix}.\end{aligned}$$

(2) 行と列の入れかえで (1) の形になる. □

$n$ 次の正方行列 $A=(a_{ij})$ において, 第 $i$ 行と第 $j$ 列を除いて得られる $(n-1)$ 次正方行列

$$A_{ij} = \begin{array}{cc} & \begin{array}{ccccc} \phantom{a_{11}} & \phantom{\cdots} & j & \phantom{\cdots} & \phantom{a_{1n}} \end{array} \\ i & \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & & & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & & & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \end{array}$$

$A_{ij}$ の行列式 $\det A_{ij}$ を $A$ の $(i,j)$ **小行列式**という. さらに

$$\tilde{a}_{ij} = (-1)^{i+j}\det A_{ij}$$

を行列 $A$ の $(i,j)$-**余因子** という.

**定理 6.2.** (**展開公式**). $A=(a_{ij})$ を $n$ 次正方行列とする.
(1) $i=1,\dots,n$ について

$$\det A = a_{i1}\tilde{a}_{i1} + a_{i2}\tilde{a}_{i2} + \cdots + a_{in}\tilde{a}_{in}.$$

(2) $j=1,\dots,n$ について

$$\det A = a_{1j}\tilde{a}_{1j} + a_{2j}\tilde{a}_{2j} + \cdots + a_{nj}\tilde{a}_{nj}.$$

**証明.** (2) のみを証明する. (1) は (2) と定理3.1から得られる. $j=1$ とする. 定理 3.2 (1) を反復利用して

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \cdots + \begin{vmatrix} 0 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & a_{n-1\,2} & \cdots & a_{n-1\,n} \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

補題 6.1 により

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot \begin{vmatrix} a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

第 $j$ 項はその第 $j$ 行をその上の行と交換して順次に第 1 行に移してから, 上と同様に考えれば $(-1)^{j-1}a_{1j}\det A_{1j} = a_{1j}\tilde{a}_{1j}$ となる. これから $\det A = a_{11}\tilde{a}_{11} + a_{12}\tilde{a}_{12} + \cdots a_{1n}\tilde{a}_{1n}$.
一般の $j$ については

$$\det A = \sum_{k=1}^{n} \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & 0 & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & \cdots & a_{kj} & \cdots & a_{kn} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

として, この和の第 $k$ 項 $\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & 0 & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & \cdots & a_{kj} & \cdots & a_{kn} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$ を計算する. 行の交換を $(k-1)$ 回, 列の交換を $(j-1)$ 回行えば,

$$\text{第}\,k\,\text{項} = (-1)^{k+j} \begin{vmatrix} a_{kj} & 0\cdots0 \\ 0 & \\ \vdots & A_{kj} \\ 0 & \end{vmatrix} = (-1)^{k+j}a_{kj}|A_{kj}| = a_{kj}\tilde{a}_{kj}$$

が得られ, $\det A = \sum_{k=1}^{n} a_{kj}\tilde{a}_{kj}$ が得られる. □

**例 6.1.** $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -3 \\ -2 & 1 & 0 & -2 \\ -2 & -3 & 3 & -1 \end{pmatrix}$ の行列式を第 1 行について展開すると,

$$|A| = 3 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 1 & 0 & -2 \\ -3 & 3 & -1 \end{vmatrix} - 2 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 0 & -3 \\ -2 & 0 & -2 \\ -2 & 3 & -1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 1 & -3 \\ -2 & 1 & -2 \\ -2 & -3 & -1 \end{vmatrix}.$$

サラスの方法により右辺を計算して,

$$|A| = 3 \cdot (-3) - 2 \cdot 18 + (-22) = -67.$$

行列式の実際の計算においては,行列式の性質を用いて行列式を簡単な形にしてから展開公式を用いることが多い.

**例 6.2.**

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & -1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & -1 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = 2.$$

**問 6.1.** 次の行列式を計算せよ.

$$(1) \begin{vmatrix} 1 & 4 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & 3 & 5 \\ 6 & 2 & 3 & 7 \\ 3 & 0 & 9 & 5 \end{vmatrix} \qquad (2) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 8 & 4 \\ 1 & 1 & 4 & -2 \\ -10 & -8 & 0 & -2 \\ 4 & 2 & -6 & 7 \end{vmatrix}$$

# 7 展開公式の応用

前節の展開公式の応用として,余因子を用いた逆行列の表示と連立 1 次方程式に関するクラーメルの公式について説明する.記号 $\delta_{k\ell}$ を,

$$\delta_{k\ell} = \begin{cases} 1 & (k = \ell \text{ のとき}) \\ 0 & (k \neq \ell \text{ のとき}) \end{cases}$$

と定める.$\delta_{k\ell}$ を **クロネッカーのデルタ** という.

**定理 7.1.** $A = (a_{ij})$ を $n$ 次正方行列とし,$\tilde{a}_{ij}$ を $A$ の $(i,j)$ 余因子とする.$k, \ell = 1, 2, \ldots, n$ に対して次の (1), (2) が成り立つ.

(1) $a_{k1}\tilde{a}_{\ell 1} + a_{k2}\tilde{a}_{\ell 2} + \cdots + a_{kn}\tilde{a}_{\ell n} = \delta_{k\ell} \det A.$

(2) $a_{1k}\tilde{a}_{1\ell} + a_{2k}\tilde{a}_{2\ell} + \cdots + a_{nk}\tilde{a}_{n\ell} = \delta_{k\ell} \det A.$

**証明．** (2) も同様であるので，(1) のみ示す．$k=\ell$ ならば前節の展開公式の主張である．$k\neq\ell$ とし，$A$ の第 $\ell$ 行を第 $k$ 行でおきかえた行列 $A'$ を考える．

$$A'=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ \cdots (k) \\ \\ \cdots (l) \\ \\ \\ \end{array}$$

明らかに $|A'|=0$. 一方で，$|A'|$ を第 $\ell$ 行で展開すれば，

$$|A'|=a_{k1}\tilde{a}_{\ell 1}+a_{k2}\tilde{a}_{\ell 2}+\cdots+a_{kn}\tilde{a}_{\ell n}.$$

ゆえに，右辺は 0 に等しい． □

$n$ 次正方行列 $A=(a_{ij})$ に対して，その $(i,j)$ 余因子 $\tilde{a}_{ji}$ を $(i,j)$ 成分とする $\tilde{A}=(\tilde{a}_{ji})$ を，$A$ の**余因子行列**という．

$$\tilde{A}=\begin{pmatrix} \tilde{a}_{11} & \tilde{a}_{21} & \cdots & \tilde{a}_{n1} \\ \tilde{a}_{12} & \tilde{a}_{22} & \cdots & \tilde{a}_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \tilde{a}_{1n} & \tilde{a}_{2n} & \cdots & \tilde{a}_{nn} \end{pmatrix}$$

である．

**例 7.1.** $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ ならば

$$\tilde{a}_{11}=\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}=-1,\quad \tilde{a}_{12}=-\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}=1,\quad \tilde{a}_{13}=\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}=0,$$

$$\tilde{a}_{21}=-\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}=0,\quad \tilde{a}_{22}=\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}=1,\quad \tilde{a}_{23}=-\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}=-1,$$

$$\tilde{a}_{31}=\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}=1,\quad \tilde{a}_{32}=-\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}=-3,\quad \tilde{a}_{33}=\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}=1.$$

よって，

$$\tilde{A}=\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -3 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

**注意.** 余因子行列 $\tilde{A}$ を作るとき，添え字に注意すること.

**定理 7.2.** $n$ 次正方行列 $A$ の余因子行列を $\tilde{A}$ とするとき,

$$A\tilde{A} = \tilde{A}A = (\det A) \cdot E_n.$$

ゆえに，$\det A \neq 0$ なら

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot \tilde{A}.$$

**証明.** $A\tilde{A}$ の $(k, \ell)$ 成分は

$$a_{k1}\tilde{a}_{\ell 1} + a_{k2}\tilde{a}_{\ell 2} + \cdots + a_{kn}\tilde{a}_{\ell n}$$

で，これは $\delta_{k\ell} \cdot \det A$ に等しい．ゆえに，$A\tilde{A} = (\det A) \cdot E_n$. $\tilde{A}A$ についても，同様である．
□

**注意.** 定理 7.2 によって，「$A$ が正則 $\iff |A| \neq 0$」 であることが分かる.

**例 7.2.** 例 7.1 の $A$ について，$|A| = -1$. よって,

$$A^{-1} = \frac{1}{-1}\tilde{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

**問 7.1.** $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 4 \\ -3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ の逆行列を求めよ.

方程式の本数と未知数の個数が等しい連立 1 次方程式

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \quad \vdots \qquad \vdots \qquad\qquad\quad \vdots \qquad \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases} \tag{1}$$

を考える.

**定理 7.3. (クラーメルの公式).** 連立 1 次方程式 (1) の係数行列 $A = (a_{ij})$ について，$|A| \neq 0$ ならば, (1) の解は，各 $j = 1, \ldots, n$ に対して次式で与えられる.

$$x_j = \frac{1}{|A|} \begin{array}{c} \qquad\qquad (j) \qquad\qquad \\ \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & b_1 & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & b_2 & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & b_n & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \end{array} \qquad (j = 1, 2, \cdots, n) \tag{2}$$

ここで，右辺の分子の行列式は, $A$ の第 $j$ 列を $\begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$ でおきかえたものである.

**証明.** (1) は

$$A\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

とかける．$A^{-1} = \dfrac{1}{|A|}\tilde{A}$ であるから，

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \frac{1}{|A|}\tilde{A}\begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = \frac{1}{|A|}\begin{pmatrix} \tilde{a}_{11} & \tilde{a}_{21} & \cdots & \tilde{a}_{n1} \\ \tilde{a}_{12} & \tilde{a}_{22} & \cdots & \tilde{a}_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \tilde{a}_{1n} & \tilde{a}_{2n} & \cdots & \tilde{a}_{nn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}.$$

ゆえに，

$$x_j = \frac{1}{|A|}(\tilde{a}_{1j}b_1 + \tilde{a}_{2j}b_2 + \cdots + \tilde{a}_{nj}b_n).$$

右辺の分子は (2) の右辺の分子の行列式を第 $j$ 列について展開したものである．よって，(2) が成り立つ．　□

**Point.** $j$ 番目の未知数 $x_j$ を求めたいときは，第 $j$ 列を取り替えればよい．

**例 7.3.** 連立 1 次方程式 $\begin{cases} x+2y-2z=0 \\ 2x-y+3z=2 \\ 3x+2z=-1 \end{cases}$ の係数行列は，$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & -1 & 3 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ で，$|A|=2$．ゆえに，方程式の解は

$$x = \frac{1}{|A|}\begin{vmatrix} 0 & 2 & -2 \\ 2 & -1 & 3 \\ -1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = \frac{-12}{2} = -6, y = \frac{1}{|A|}\begin{vmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 2 & 2 & 3 \\ 3 & -1 & 2 \end{vmatrix} = \frac{23}{2}, z = \frac{1}{|A|}\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & -1 \end{vmatrix} = \frac{17}{2}.$$

**問 7.2.** 次の連立 1 次方程式を $\begin{cases} 3x-2y+z=11 \\ 2x+y+3z=12 \\ x+3y+2z=5 \end{cases}$ をクラーメルの公式を用いて解け．

**問 7.3.** 次の連立 1 次方程式をみたす $z$ を求めよ．

$$\begin{cases} x+4y+z+4w=0 \\ 2x+y+3z+5w=0 \\ 6x+2y+3z+7w=3 \\ 3x \qquad +9z+5w=1 \end{cases}$$

# 8 小行列式と行列の階数

行列の階数を行列式によって解釈することもできる．$(m,n)$-行列 $A$ に対して，$A$ の $r$ 個の行と $r$ 個の列を取り出して作った $A$ の $r$ 次正方行列の行列式を，$r$ **次小行列式**という．$A$ の $r$ 次小行列式は全部で ${}_mC_r \cdot {}_nC_r$ 個ある．

**例 8.1.** $A = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 0 & 1 \\ -1 & 12 & -2 & -7 \\ 4 & 3 & -1 & -5 \end{pmatrix}$ の 3 次の小行列式は，

$$\begin{vmatrix} -3 & 2 & 0 \\ -1 & 12 & -2 \\ 4 & 3 & -1 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} -3 & 2 & 1 \\ -1 & 12 & -7 \\ 4 & 3 & -5 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} -3 & 0 & 1 \\ -1 & -2 & -7 \\ 4 & -1 & -5 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 12 & -2 & -7 \\ 3 & -1 & -5 \end{vmatrix}.$$

すべて 0 である．2 次の小行列式は

$$\begin{vmatrix} -3 & 2 \\ -1 & 12 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} -3 & 0 \\ -1 & -2 \end{vmatrix}, \cdots$$

$$\begin{vmatrix} -3 & 2 \\ 4 & 3 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} -3 & 0 \\ 4 & -1 \end{vmatrix}, \cdots$$

$$\begin{vmatrix} -1 & 12 \\ 4 & 3 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} -1 & -2 \\ 4 & -1 \end{vmatrix}, \cdots$$

などで，全部で ${}_3C_2 \cdot {}_4C_2 = 18$ だけある．

$(m,n)$ 行列 $A$ について，$A$ の 0 でない小行列式の次数のうちで最大のものを $s(A)$ で表す．例6.1 の $A$ については $s(A) = 2$ である．

**補題 8.1.** *$A$ が階数 $r$ の階段行列であるとき，$s(A) = r$.*

**証明.** $A$ が (5.1) の形の階段行列であるとする．$A$ の第 1 行から第 $r$ 行と第 $k_1$ 列，第 $k_2$ 列,..., 第 $k_r$ 列を取り出して作った行列は $r$ 次単位行列で，その行列式は 1 であるから，$s(A) \geq r$.
また，$A$ から $r$ 個より多い行ベクトルを取り出せば，行ベクトルのうち少なくとも 1 つは零ベクトルになるから，$A$ の $r$ 次より大きい次数の小行列式はすべて 0 である．よって $s(A) \leq r$. □

**補題 8.2.** *行列 $A$ に基本変形を施して行列 $B$ が得られたとするとき，$s(A) = s(B)$ である.*

**証明.** 基本変形が [行 1],[行 2],[列 1],[列 2] のどれかであるとき，$B$ の $d$ 次小行列式は，$A$ の $d$ 次小行列式の定数倍である．基本変形が [行 3] または [列 3] のときには, $B$ の $d$ 次小行列式は

$$c_1\Delta_1 + c_2\Delta_2$$

($c_1, c_2$ は定数，$\Delta_1, \Delta_2$ は $A$ の $d$ 次小行列式) の形である．
$d > s(A)$ のとき，$A$ の $d$ 次小行列式はすべて 0 であるから，上のことから $B$ の $d$ 次小行列式もすべて 0 となる．よって

$$s(B) \leqq s(A).$$

基本変形によって $B$ を $A$ に変形することもできるから，

$$s(A) \leqq s(B).$$

ゆえに，$s(A) = s(B)$. □

**定理 8.3.** $(m, n)$ 行列 $A$ について，$\operatorname{rank} A = s(A)$. すなわち，$A$ の階数は，$A$ の 0 でない小行列式の最大次数に等しい．

**証明.** 何回かの行基本変形により，$A$ が階段行列 $B$ に変形されたとし，$B$ の階数を $r$ とする．このとき，階数の定義から，

$$\operatorname{rank} A = r.$$

8.1 から，$s(B) = r$. 補題 8.2 から $s(A) = s(B)$. ゆえに，$\operatorname{rank} A = s(A)$. □

**例 8.2.** $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 4 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 2 \\ 3 & 9 & 6 & -5 \\ 3 & 4 & 5 & 1 \end{pmatrix}$ について，

$|A| = 0$, また，$A$ のひとつの 3 次小行列式

$$\begin{vmatrix} 0 & 2 & 4 \\ 1 & -1 & 0 \\ 3 & 9 & 6 \end{vmatrix} = 36 \neq 0.$$

よって， $\operatorname{rank} A = 3$.

**問 8.1.** 次の行列の階数を求めよ．

$$(1)\ \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 4 \\ 2 & 4 & 3 & 5 \\ -1 & -2 & 6 & -7 \end{pmatrix} \qquad (2)\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 3 & 2 \\ 1 & 3 & 4 & 3 & 1 \\ 1 & 4 & 4 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

**問 8.2.** $(m, n)$ 行列 $A$ について，$A$ の $r$ 次小行列式がすべて 0 ならば，$A$ の $r+1$ 次小行列式もすべて 0 であることを示せ．ただし，$r+1 \leqq m$, $r+1 \leqq n$ とする．

## 第 3 章 練 習 問 題

**1.** 次の順列の符号を求めよ．

(1) $\langle 2,3,4,1 \rangle$　(2) $\langle 4,3,1,2 \rangle$　(3) $\langle 4,5,2,1,3 \rangle$

(4) $\langle 2,5,4,3,1 \rangle$　(5) $\langle 2,3,6,1,4,5 \rangle$　(6) $\langle n, n-1, n-2, \cdots, 2, 1 \rangle$

**2.** 次の行列の行列式を計算せよ.

(1) $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 4 & 1 \\ 5 & 9 & 2 & 6 \\ 5 & 3 & 5 & 8 \\ 9 & 7 & 9 & 3 \end{pmatrix}$　(2) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$　(3) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 8 & 4 \\ 1 & 1 & 4 & -2 \\ -10 & -8 & 0 & -2 \\ 4 & 2 & -6 & 7 \end{pmatrix}$

(4) $\begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & 3 & 5 \\ 6 & 2 & 3 & 7 \\ 3 & 0 & 9 & 5 \end{pmatrix}$　(5) $\begin{pmatrix} 3 & 2 & -3 & 1 & -3 \\ 5 & 2 & 7 & -3 & 1 \\ 1 & -3 & 6 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & -1 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$　(6) $\begin{pmatrix} 11 & -12 & 13 & -14 \\ -15 & 16 & -17 & 18 \\ 19 & -20 & 21 & -22 \\ -23 & 24 & -25 & 26 \end{pmatrix}$

(7) $\begin{pmatrix} 7 & 6 & 1 & 1 \\ 3 & 6 & 5 & 1 \\ 3 & -1 & 4 & 1 \\ -5 & 3 & 8 & 1 \end{pmatrix}$　(8) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1^2 & 2^2 & 3^2 & 4^2 & 5^2 \\ 1^3 & 2^3 & 3^3 & 4^3 & 5^3 \\ 1^4 & 2^4 & 3^4 & 4^4 & 5^4 \\ 1^5 & 2^5 & 3^5 & 4^5 & 5^5 \end{pmatrix}$　(9) $\begin{pmatrix} & & 0 & & & 1 \\ & & & & 2 & \\ & & & 3 & & \\ & & \iddots & & & \\ & n-1 & & & 0 & \\ n & & & & & \end{pmatrix}$

**3.** 次の行列の行列式を計算せよ.

(1) $\begin{pmatrix} \alpha & \beta & \gamma & \delta \\ \beta & \alpha & \delta & \gamma \\ \gamma & \delta & \alpha & \beta \\ \delta & \gamma & \beta & \alpha \end{pmatrix}$　(2) $\begin{pmatrix} 1 & a & a^4 \\ 1 & b & b^4 \\ 1 & c & c^4 \end{pmatrix}$　(3) $\begin{pmatrix} a^2+b^2 & ca & bc \\ ca & b^2+c^2 & ab \\ bc & ab & c^2+a^2 \end{pmatrix}$

(4) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & d & d & d \\ a & b & e & e \\ a & b & c & f \end{pmatrix}$　(5) $\begin{pmatrix} a & bc & b+c \\ b & ca & c+a \\ c & ab & a+b \end{pmatrix}$　(6) $\begin{pmatrix} 0 & a^2 & b^2 & 1 \\ a^2 & 0 & c^2 & 1 \\ b^2 & c^2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

(7) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & x & a & a \\ b & b & x & b \\ c & c & c & x \end{pmatrix}$　(8) $\begin{pmatrix} a & a & a & x \\ a & a & x & a \\ a & x & a & a \\ x & a & a & a \end{pmatrix}$

**4.** 定理 7.2 を用いて次の行列の逆行列を求めよ.

(1) $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 1 & 5 & 9 \\ 2 & 6 & 5 \end{pmatrix}$　(2) $\begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \\ 3 & 5 & 6 \end{pmatrix}$　(3) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 7 & 6 \\ 5 & 9 & 8 \end{pmatrix}$

(4) $\begin{pmatrix} -3 & 2 & 2 \\ -2 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}$　(5) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$　(6) $\begin{pmatrix} 3 & -4 & 3 \\ -2 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

(7) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$　(8) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & b \\ 1 & a & 0 \end{pmatrix}$　(9) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & c & 1 \\ 0 & b & 1 & 0 \\ a & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

**5.** 次の等式を証明せよ．

(1) $$\begin{vmatrix} 1+a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1+b & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+c & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1+d \end{vmatrix} = abcd\left(1+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}\right)$$

(2) $$\begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{i>j}(x_i - x_j)$$ （これをヴァンデルモンドの行列式という．）

(3) $$\begin{vmatrix} a_0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ a_1 & x & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ a_2 & 0 & x & \ddots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ a_{n-1} & 0 & 0 & \cdots & x & 1 \\ a_n & 0 & 0 & \cdots & 0 & x \end{vmatrix} = a_0x^n - a_1x^{n-1} + \cdots + (-1)^n a_n$$

**6.** クラーメルの公式を用いて次の連立1次方程式を解け．

(1) $\begin{cases} x+y-2z=1 \\ x-2y-4z=-4 \\ 2x-y+z=2 \end{cases}$　(2) $\begin{cases} x+2y+5z=9 \\ 4x \quad +3z=-5 \\ 2x-3y \quad =-13 \end{cases}$　(3) $\begin{cases} -3x+9y+6z=51 \\ 9y+4z=32 \\ 8x-2y+6z=24 \end{cases}$

(4) $\begin{cases} x+3y+2z=2 \\ 3x+6y+4z=7 \\ 2x+7y+2z=9 \end{cases}$　(5) $\begin{cases} 3x+6y+z=4 \\ 4x+9y+2z=3 \\ 2x+3y+4z=9 \end{cases}$　(6) $\begin{cases} 2x+y+4z=-1 \\ 3x+2y+z=7 \\ 4x+3y+2z=7 \end{cases}$

(7) $\begin{cases} x+y+2z=3 \\ x+2y+3z=4 \\ x+3y+5z=3 \end{cases}$　(8) $\begin{cases} x+2y+3z=20 \\ 2x+7y-3z=13 \\ 3x+8y+2z=38 \end{cases}$　(9) $\begin{cases} \dfrac{x-1}{3}=\dfrac{y+5}{-2}=\dfrac{z-3}{4} \\ x+y+z=3 \end{cases}$

**7.** 平面上の3点 $A(a_1,a_2), B(b_1,b_2), C(c_1,c_2)$ が1直線上にあるための必要十分条件は

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & 1 \\ b_1 & b_2 & 1 \\ c_1 & c_2 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

であることを示せ．

**8.** 平面上の3直線

$$\begin{cases} a_1x+b_1y+c_1=0 \\ a_2x+b_2y+c_2=0 \\ a_3x+b_3y+c_3=0 \end{cases}$$

が1点で交わるか, または平行であるための必要十分条件は

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = 0$$

であることを示せ．