第2章

行列の基本変形と連立１次方程式

1　行列の基本変形

行列に対して行われる, 次のような操作を**行基本変形**という.

[行 1]　第 i 行を c 倍する $(c \neq 0)$,

[行 2]　第 i 行と第 j 行を交換する $(i \neq j)$,

[行 3]　第 i 行に第 j 行の c 倍を加える $(i \neq j)$.

本書ではこれらをそれぞれ

$$i\,行 \times c, \quad i\,行 \leftrightarrow j\,行, \quad i\,行 + j\,行 \times c$$

と略記する. 同様に, 次のような列に関する操作を, **列基本変形**という.

[列 1] 第 i 列を c 倍する $(c \neq 0)$,

[列 2] 第 i 列と第 j 列を交換する $(i \neq j)$,

[列 3] 第 i 列に第 j 列の c 倍を加える $(i \neq j)$.

これらをそれぞれ

$$i\,列 \times c, \quad i\,列 \leftrightarrow j\,列, \quad i\,列 + j\,列 \times c$$

と略記する.

行基本変形と列基本変形を総称して, 基本変形という.

例 1.1.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \end{pmatrix}$$

のとき

$$A \xrightarrow{2\text{行}\times 3} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 6 & 12 & 18 \end{pmatrix} \qquad A \xrightarrow{3\text{列}\times(-1)} \begin{pmatrix} 1 & 3 & -5 \\ 2 & 4 & -6 \end{pmatrix},$$

$$A \xrightarrow{1\text{行}\leftrightarrow 2\text{行}} \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 1 & 3 & 5 \end{pmatrix} \qquad A \xrightarrow{1\text{列}\leftrightarrow 3\text{列}} \begin{pmatrix} 5 & 3 & 1 \\ 6 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

$$A \xrightarrow{1\text{行}+2\text{行}\times(-2)} \begin{pmatrix} -3 & -5 & -7 \\ 2 & 4 & 6 \end{pmatrix} \qquad A \xrightarrow{3\text{列}+2\text{列}\times 2} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 11 \\ 2 & 4 & 14 \end{pmatrix}$$

単位行列 E_n に基本変形を施して得られる行列を**基本行列**という．次の 3 つのタイプがある．

$$F_n(i;c) = \begin{pmatrix} 1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & \mathbf{0} & \\ & & 1 & & & & \\ & & & c & & & \\ & & & & 1 & & \\ & \mathbf{0} & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix} \cdots (i) \qquad (c \neq 0),$$

$$G_n(i,j) = \begin{pmatrix} 1 & & & & & & & & & \\ & \ddots & & & & & & & \mathbf{0} & \\ & & 1 & & & & & & & \\ & & & 0 & & \cdots & & 1 & & \\ & & & & 1 & & & & & \\ & & & \vdots & & \ddots & & \vdots & & \\ & & & & & & 1 & & & \\ & & & 1 & & \cdots & & 0 & & \\ & & & & & & & & 1 & \\ & \mathbf{0} & & & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & & & & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \\ \cdots (i) \\ \\ \\ \\ \cdots (j) \\ \\ \\ \\ \end{matrix},$$

$$H_n(i,j;c) = \begin{pmatrix} 1 & & & & & & \\ & \ddots & & & \mathbf{0} & & \\ & & 1 & \cdots & c & & \\ & & & \ddots & \vdots & & \\ & & & & 1 & & \\ & \mathbf{0} & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \cdots (i) \\ \\ \cdots (j) \\ \\ \\ \end{matrix}$$

基本変形との関係は次のとおりである:

$$E_n \xrightarrow{i\text{行}\times c} F_n(i;c), \; E_n \xrightarrow{i\text{列}\times c} F_n(i;c),$$

$$E_n \xrightarrow{i\text{行}\leftrightarrow j\text{行}} G_n(i,j), \; E_n \xrightarrow{i\text{列}\leftrightarrow j\text{列}} G_n(i,j),$$

$$E_n \xrightarrow{i\text{ 行}+j\text{ 行}\times c} H_n(i,j;c),\ E_n \xrightarrow{j\text{ 列}+i\text{ 列}\times c} H_n(i,j;c).$$

行列の積の定義を考えれば, 次の定理が成り立つことがわかる.

定理 1.1. A を (m,n) 行列とする.

(1) A に行基本変形 [行 1], [行 2], [行 3] を施した行列はそれぞれ

$$F_m(i;c)A,\ G_m(i,j)A,\ H_m(i,j;c)A$$

である.

(2) A に列基本変形 [列 1], [列 2], [列 3] を施した行列はそれぞれ

$$AF_n(i;c),\ AG_n(i,j),\ AH_n(j,i;c)$$

である.

例 1.2. 例 1.1 の A について,

$$F_2(2;3)A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 6 & 12 & 18 \end{pmatrix},$$

$$G_2(1,2)A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 1 & 3 & 5 \end{pmatrix},$$

$$H_2(1,2;-2)A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & -5 & -7 \\ 2 & 4 & 6 \end{pmatrix},$$

$$AF_3(3;-1) = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -5 \\ 2 & 4 & -6 \end{pmatrix},$$

$$AG_3(1,3) = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 1 \\ 6 & 4 & 2 \end{pmatrix},$$

$$AH_3(2,3;2) = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 11 \\ 2 & 4 & 14 \end{pmatrix}.$$

定理 1.2. 次が成り立つ. 特に基本行列は正則行列である.

(1) $F_n(i;c)F_n(i;1/c) = E_n$,

(2) $G_n(i,j)^2 = E_n$,

(3) $H_n(i,j;c)H_n(i,j;-c) = E_n$.

証明. 定理 1.1 よりわかる．例えば，$F_n(i;c)F_n(i;1/c)$ は $F_n(i;1/c)$ の第 i 行を c 倍した行列ゆえ，E_n に等しい．□

定理 1.3. (m,n) 行列 A に何回かの行基本変形 (列基本変形) を施して行列 B が得られるとき，ある m 次 (n 次) 正則行列 P があって，

$$B = PA \ \ (B = AP)$$

が成り立つ．

証明. 行基本変形により，A が A_1 に，A_1 が A_2 に，$\cdots$，A_{k-2} が A_{k-1} に，A_{k-1} が B に変形されるとすると，m 次の基本行列 M_1，M_2，$\ldots$，M_k があって，

$$B = M_k A_{k-1} = M_k M_{k-1} A_{k-2} = \cdots = M_k \cdots M_1 A.$$

$P = M_k \cdots M_1$ とすれば，P は m 次正則行列で，$B = PA$．列基本変形についても同様．□

例 1.3. 行基本変形により，

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 6 & -8 & 12 \\ 1 & 2 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & -2 & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow{1\text{ 行}\leftrightarrow 3\text{ 行}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 5 \\ 1 & 2 & -3 & 1 \\ 0 & 6 & -8 & 12 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{2\text{ 行}+1\text{ 行}\times(-1)} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 5 \\ 0 & 1 & -1 & -4 \\ 0 & 6 & -8 & 12 \end{pmatrix} \xrightarrow{3\text{ 行}+2\text{ 行}\times(-6)} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 5 \\ 0 & 1 & -1 & -4 \\ 0 & 0 & -2 & 36 \end{pmatrix} = B.$$

したがって，

$$P = H_3(3,2;-6)H_3(2,1;-1)G_3(1,3)$$

とすると

$$B = PA$$

となり

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -6 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & -6 & 6 \end{pmatrix}.$$

2　階段行列への変形

(m,n) 行列 $A = (a_{ij})$ の (p,q) 成分 a_{pq} が 0 でないとき，$m-1$ 個の行基本変形

$$i\text{ 行} + p\text{ 行} \times \left(-\frac{a_{iq}}{a_{pq}}\right) \quad (1 \leqq i \leqq m,\ i \neq p)$$

を行うことにより, A の第 q 列ベクトルを,

$$\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ a_{pq} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \quad \cdots\ (p)$$

とすることができる. この操作を, (p,q) 成分による第 q 列の**掃き出し**という. 同様に $n-1$ 個の列基本変形

$$j\ 列 + q\ 列 \times \left(-\frac{a_{pj}}{a_{pq}}\right) \qquad (1 \leqq j \leqq n,\ j \neq q)$$

により, A の第 p 行ベクトルを

$$\begin{array}{c} (0\ \cdots\ 0\quad a_{pq}\quad 0\ \cdots\ 0) \\ \vdots \\ (q) \end{array}$$

とすることができる (第 p 行の掃き出し).

例 2.1.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 & 4 \\ -2 & 4 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$

の $(1,2)$ 成分で第 2 列を掃き出すと,

$$A \xrightarrow{2\,\text{行}+1\,\text{行}\times(-2),\ 3\,\text{行}+1\,\text{行}\times(-1/2)} \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 & 4 \\ -2 & 0 & -1 & -5 \\ 3 & 0 & -5/2 & -3 \end{pmatrix}.$$

$(2,3)$ 成分で第 2 行を掃き出すと,

$$A \xrightarrow{1\,\text{列}+3\,\text{列}\times 2,\ 2\,\text{列}+3\,\text{列}\times(-4),\ 4\,\text{列}+3\,\text{列}\times(-3)} \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 9 & -2 & 5 \end{pmatrix}.$$

次の形の (m,n) 行列 A を, 階数 r の**階段行列**という.

$$A = \left(\begin{array}{ccccccccccccccc} 0 & \cdots & 0 & 1 & * & \cdots & * & 0 & * & \cdots & * & 0 & * & \cdots & * \\ & & & 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 & * & \cdots & * & 0 & * & \cdots & * \\ & & & & & & & & & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ & & & & & & & & & & 0 & 1 & * & \cdots & * \\ & & & & \mathbf{0} & & & & & & & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ & & & & & & & & & & & & & & \vdots \\ & & & & & & & & & & & & & & 0 \end{array}\right) \cdots\ (r) \qquad (2.1)$$

正確に述べれば次のようになる:

$$1 \leqq k_1 < k_2 < \cdots < k_r \leqq n$$

である整数 $k_1,\ k_2,\ \ldots,\ k_r$ があって，

$$(A \text{ の第 } i \text{ 行}) = \begin{cases} (0 \cdots 0\ 1\ * \cdots *) & (1 \leqq i \leqq r) \\ \qquad\quad \vdots & \\ \qquad\quad (k_i) & \\ (0 \cdots\cdots\cdots\cdots 0) & (r < i \leqq m). \end{cases}$$

さらに，

$$(A \text{ の第 } k_j \text{ 列}) = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \cdots (j) \quad (1 \leqq j \leqq r).$$

例 2.2.

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

は階数 2 の階段行列．また，

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

は階数 3 の階段行列．

定理 2.1. (m, n) 行列 A は，何回かの行基本変形を施すことによって，階段行列に変形することができる．したがって，PA が階段行列になるような m 次正則行列 P が存在する．

証明. 次の $(i\text{-}1)$〜$(i\text{-}3)$ の操作を，$i = 1,\ 2,\ \ldots$ に対して順に行う．

$(i\text{-}1)$ 行列の第 i 行目以下のみを見て，左から最初の 0 ベクトルでない列を第 m_i 列とする．

$(i\text{-}2)$ 行基本変形により，(i, m_i) 成分を 1 にする．

$(i\text{-}3)$ 第 m_i 列を (i, m_i) 成分で掃き出す．

i 行目以下を見たときに，成分がすべて 0 になっているか，または $i = m$ となれば，階段行列への変形が完了している．□

例 2.3.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \end{pmatrix}$$

を行基本変形により, 階段行列 B に変形せよ. また $B = PA$ となる正則行列 P を求めよ.

解.

$$A \xrightarrow{2\text{行}+1\text{行}\times(-5),\ 3\text{行}+1\text{行}\times(-9)} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -4 & -8 & -12 \\ 0 & -8 & -16 & -24 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{2\text{行}\times(-1/4)} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & -8 & -16 & -24 \end{pmatrix} \xrightarrow{1\text{行}+2\text{行}\times(-2),\ 3\text{行}+2\text{行}\times 8} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = B.$$

したがって,

$$P = H_3(1,2;-2)H_3(3,2;8)F_3(2;-1/4)H_3(2,1;-5)H_3(3,1;-9)$$

とするとき $B = PA$ となる.

$$P = \begin{pmatrix} -3/2 & 1/2 & 0 \\ 5/4 & -1/4 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

である.

問 2.1. 次の行列を階段行列に変形せよ.

$$(1)\ \begin{pmatrix} -1 & 1 & -2 \\ 3 & -2 & 1 \\ -2 & 3 & -9 \end{pmatrix} \quad (2)\ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ -1 & -3 & 7 \\ -4 & -11 & 16 \\ 5 & 12 & 1 \end{pmatrix} \quad (3)\ \begin{pmatrix} 2 & 1 & -7 & 4 \\ 3 & -2 & 7 & -1 \\ 1 & 4 & -21 & 5 \end{pmatrix}$$

3 行列の階数, 標準形

この節の主な目的は, 行列の基本変形に慣れることである.

前節で見たように (m,n) 行列 A は, 何回かの行基本変形によって, 階段行列 B に変形される. 階段行列 B は, 行基本変形の仕方によらず, A のみで定まることが示せる. そこで, B が階数 r の階段行列であるときに, A の**階数**は r であるといい, $\mathrm{rank}\, A = r$ と書くことにする.

例 3.1.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -3 & -2 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 7 & 4 & 2 & 13 \end{pmatrix}$$

のとき,

$$A \xrightarrow{1\text{行}\leftrightarrow 2\text{行}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -3 & -2 \\ 7 & 4 & 2 & 13 \end{pmatrix} \xrightarrow{3\text{行}+1\text{行}\times(-7)} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -3 & -2 \\ 0 & -3 & 9 & 6 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{1\text{行}+2\text{行}\times(-1),\ 3\text{行}+2\text{行}\times 3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ゆえに

$$\operatorname{rank} A = 2.$$

問 3.1. 次の行列の階数を求めよ.

$$(1)\ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -2 & -1 & -2 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad (2)\ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 6 & -9 \\ 1 & 2 & -3 \\ 2 & 2 & -4 \end{pmatrix}$$

基本変形によって与えられた行列を階段行列以外の標準的な形に変形して考える場合もある.

定理 3.1. (m,n) 行列 A は, 何回かの行基本変形と列の交換によって, 次の形の行列に変形できる.

$$\begin{pmatrix} E_r & * \\ O & O \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \begin{matrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{matrix} & \Huge{*} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix} \tag{2.2}$$

ここで, $r = \operatorname{rank} A$ である. したがって, PAQ がこの形の行列になるような, m 次正則行列 P と n 次正則行列 Q が存在する.

証明. A を行基本変形によって, (2.1) の形にしたのちに, 列基本変形

$$1\text{列} \leftrightarrow k_1\text{列},\ 2\text{列} \leftrightarrow k_2\text{列}, \dots,\ r\text{列} \leftrightarrow k_r\text{列}$$

を施せばよい. 最後の主張は, 定理 1.3 による. □

例 3.2.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -2 & 2 & 3 \\ -4 & 4 & -2 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

のとき,

$$A \xrightarrow{2\text{ 行}+1\text{ 行}\times 2,\ 3\text{ 行}+1\text{ 行}\times 4,\ 4\text{ 行}+1\text{ 行}\times(-2)} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -6 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{1\text{ 行}+2\text{ 行},\ 3\text{ 行}+2\text{ 行}\times 6,\ 4\text{ 行}+2\text{ 行}\times(-2)} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{2\text{ 列}\leftrightarrow 3\text{ 列}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ゆえに,

$$\begin{aligned} P &= H_4(4,2;-2)H_4(3,2;6)H_4(1,2;1)H_4(4,1;-2)H_4(3,1;4)H_4(2,1;2) \\ &= \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 16 & 6 & 1 & 0 \\ -6 & -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$Q = G_3(2,3) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

とするとき

$$PAQ = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

定理 3.2. (m,n) 行列 A は, 何回かの行および列の基本変形によって,

$$\begin{pmatrix} E_r & O \\ O & O \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \begin{matrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{matrix} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix} \tag{2.3}$$

の形の行列に変形できる. ここで, $r = \operatorname{rank} A$ である. したがって, PAQ が上の形になるような, m 次正則行列 P と n 次正則行列 Q が存在する.

証明. 行および列の基本変形によって, A を (2.2) の形にした後に, さらに列基本変形によって, 第 1 行を $(1,1)$ 成分で, 第 2 行を $(2,2)$ 成分で, $\cdots$, 第 r 行を (r,r) 成分で, それぞれ掃き出せばよい. □

例 3.3. 例 3.2 の A と P, Q について，

$$PAQ = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{3\text{列}+1\text{列}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

よって，

$$Q' = QH_3(3,1;1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

とするとき，

$$PAQ' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

4　連立 1 次方程式の解法

連立 1 次方程式

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \tag{2.4}$$

について考える．(m,n) 行列

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

を (8.8) の**係数行列**といい，$(m,n+1)$ 行列

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}$$

を (8.8) の**拡大係数行列**という．

$$\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} \quad \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

とすれば $\tilde{A} = (A\ \boldsymbol{b})$ で, (2.4) は

$$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$$

となる.

定理 4.1. 連立1次方程式 (2.4) の拡大係数行列を $\tilde{A}$ とする. 何回かの行基本変形で, $\tilde{A}$ が $\tilde{A}'$ に変形されるとき, (2.4) は $\tilde{A}'$ を拡大係数行列とする連立1次方程式と同値である.

証明. $\tilde{A}'$ の第1列から第 n 列までを並べた行列を A', $\tilde{A}'$ の第 $n+1$ 列ベクトルを $\boldsymbol{b}'$ とすると, $\tilde{A}'$ に対応する連立1次方程式は

$$A'\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}'$$

である. いま, 定理 1.3 から, ある正則行列 P があって,

$$\tilde{A}' = P\tilde{A}$$

となっており, よって,

$$A' = PA,\ \boldsymbol{b}' = P\boldsymbol{b}$$

である. したがって

$$A'\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}' \Leftrightarrow PA\boldsymbol{x} = P\boldsymbol{b} \Leftrightarrow A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$$

□

この定理により, 連立1次方程式を解くには, 行基本変形によって, 拡大係数行列を簡単な行列 (たとえば階段行列) に変形して, それに対応する連立1次方程式を解けばよいことになる.

例 4.1. 連立1次方程式

$$\begin{cases} x - y - 2z = 5 \\ x + 2y - z = 1 \\ \quad\ 3y - 4z = 6 \end{cases}$$

を解け.

解. 拡大係数行列は

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 & 5 \\ 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & -4 & 6 \end{pmatrix}$$

である. これは次のように階段行列に変形される:

$$\tilde{A} \xrightarrow{2\text{行}+1\text{行}\times(-1)} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 & 4 \\ 0 & 3 & 1 & -4 \\ 0 & 3 & -4 & 6 \end{pmatrix} \xrightarrow{2\text{行}\times 1/3} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 & 5 \\ 0 & 1 & 1/3 & -4/3 \\ 0 & 3 & -4 & 6 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{1\,\text{行}+2\,\text{行},\ 3\,\text{行}+2\,\text{行}\times(-3)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -5/3 & 11/3 \\ 0 & 1 & 1/3 & -4/3 \\ 0 & 0 & -5 & 10 \end{pmatrix} \xrightarrow{3\,\text{行}\times(-1/5)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -5/3 & 11/3 \\ 0 & 1 & 1/3 & -4/3 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{1\,\text{行}+3\,\text{行}\times 5/3,\ 2\,\text{行}+3\,\text{行}\times(-1/3)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1/3 \\ 0 & 1 & 0 & -2/3 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

この階段行列に対応する連立1次方程式は,

$$\begin{cases} x & & & = & 1/3 \\ & y & & = & -2/3 \\ & & z & = & -2. \end{cases}$$

よって, 求める解は,

$$x = 1/3,\ y = -2/3,\ z = -2.$$

上の例では, 係数行列を A とするとき,

$$\mathrm{rank}\ A = \mathrm{rank}\ \tilde{A} = 3$$

である.

連立1次方程式では, 解をもたない場合も, 無数に多くの解をもつ場合もある. もう少し例を見よう.

例 4.2.

$$\begin{cases} 2x - y - z = 1 \\ -x + 2y - z = 1 \\ -x - y + 2z = -2 \end{cases}$$

を解け.

解. 拡大係数行列は次のように変形される:

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 2 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{1\,\text{行}\times 1/2} \begin{pmatrix} 1 & -1/2 & -1/2 & 1/2 \\ -1 & 2 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 2 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{2\,\text{行}+1\,\text{行},\ 3\,\text{行}+1\,\text{行}} \begin{pmatrix} 1 & -1/2 & -1/2 & 1/2 \\ 0 & 3/2 & -3/2 & 3/2 \\ 0 & -3/2 & 3/2 & -3/2 \end{pmatrix} \xrightarrow{2\,\text{行}\times 2/3} \begin{pmatrix} 1 & -1/2 & -1/2 & 1/2 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -3/2 & 3/2 & -3/2 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{1\,\text{行}+2\,\text{行}\times 1/2,\ 3\,\text{行}+2\,\text{行}\times 3/2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

最後の行列に対応する連立 1 次方程式は,

$$\begin{cases} x \qquad -z = 1 \\ \qquad y \ -z = 1. \end{cases}$$

$z=c$ とすれば, 求める解は,

$$x=c+1,\ y=c+1,\ z=c\ \ (c \text{ は任意の定数}).$$

例 4.3.

$$\begin{cases} 2x - y - z = 1 \\ -x + 2y - z = 1 \\ -x - y + 2z = 1 \end{cases}$$

を解け.

解. 係数行列は例 4.2 の場合と同じである. そこで例 4.2 と同様な行基本変形を行うと,

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

となる. 最後の行列に対応する連立 1 次方程式の第 3 式は,

$$0\cdot x+0\cdot y+0\cdot z=3$$

となるから, 連立 1 次方程式は解をもたない.

係数行列を A, 拡大係数行列を $\tilde{A}$ とすると, 例 4.2 では

$$\mathrm{rank}\ A=\mathrm{rank}\ \tilde{A}=2,$$

例 4.3 では

$$\mathrm{rank}\ A=2,\ \mathrm{rank}\ \tilde{A}=3$$

となっていることに注意しておこう.

問 4.1. 次の連立 1 次方程式を解け.

(1) $\begin{cases} 2x - y - z = -5 \\ 4x - 5y - 2z = -1 \\ -2x + 3y + z = 3 \end{cases}$ (2) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_4 = -4 \\ -2x_1 - x_2 + 6x_3 + 5x_4 = -1 \\ 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 + 3x_4 = -10 \end{cases}$

(3) $\begin{cases} x + 2y - 2z = 0 \\ 2x - y + 3z = 2 \\ 3x + 2z = -1 \end{cases}$

5 連立1次方程式の解と係数行列の階数

連立1次方程式において (2.4) の係数行列を A, 拡大係数行列を $\tilde{A} = (A\ \boldsymbol{b})$ とする. rank $A = r$ とすると, $\tilde{A}$ を行基本変形によって階段行列 $\tilde{A}' = (A'\ \boldsymbol{b}')$ に変形すると, A' は (2.1) の形の行列になるので,

$$\boldsymbol{b}' = \begin{pmatrix} b'_1 \\ \vdots \\ b'_r \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{または} \quad \boldsymbol{b}' = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \quad \cdots (r+1)$$

でなければならない. 後者のとき, rank $\tilde{A} = r+1$ で, $\tilde{A}'$ に対応する連立1次方程式の第 $r+1$ 番目の式は,

$$0 \cdot x_1 + \cdots + 0 \cdot x_n = 1$$

となるので, 方程式は解をもたない. 前者のとき, rank $\tilde{A} = r$ であって, $A' = (a'_{ij})$ とすれば $\tilde{A}'$ に対応する連立1次方程式は,

$$\left\{\begin{array}{r} x_{k_1} + \cdots + a'_{1,k_2-1}x_{k_2-1} + \ 0\ + a'_{1,k_2+1}x_{k_2+1} + \cdots + a'_{1,k_r-1}x_{k_r-1} + \ 0\ + a'_{1,k_r+1}x_{k_r+1} + \cdots = b'_1 \\ x_{k_2} + a'_{2,k_2+1}x_{k_2+1} + \cdots + a'_{2,k_r-1}x_{k_r-1} + \ 0\ + a'_{2,k_r+1}x_{k_r+1} + \cdots = b'_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_{k_r} + a'_{r,k_r+1}x_{k_r+1} + \cdots = b'_r \end{array}\right.$$

の形で, これは解をもつ. 実際,

$$x_i = c_i \ \ (1 \leqq i \leqq n, \ \ i \neq k_1, \ldots, k_r)$$

とすれば, 連立1次方程式の解は,

$$\left\{\begin{array}{l} x_{k_1} = b'_1 - a'_{1,k_1+1}c_{k_1+1} - \cdots \\ x_{k_2} = b'_2 - a'_{2,k_2+1}c_{k_2+1} - \cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_{k_r} = b'_r - a'_{r,k_r+1}c_{k_r+1} - \cdots \end{array}\right.$$

により与えられる. 以上により, 次のことがわかった.

定理 5.1. 連立1次方程式 (2.4) の係数行列を A, 拡大係数行列を $\tilde{A}$ とする.

(1) (2.4) が解をもつための条件は, rank $A =$ rank $\tilde{A}$ である.

(2) (2.4) が解をもつとき, $r =$ rank A とおけば解は $n-r$ 個の任意定数を含む. 特に, $n = r$ ならば, 解はただ1つである.

問 5.1. 前節の例 4.1 〜 4.3 を，上の定理 5.1 に即して再検討してみよ．

例 5.1. 連立１次方程式

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcl} 2x & + & y & + & 3z & = & a_1 \\ 2x & & & + & 2z & = & a_2 \\ x & + & y & + & 2z & = & a_3 \end{array}\right.$$

が解をもつためには，定数 a_1，a_2，a_3 の間にどのような関係があればよいか．

解. 拡大係数行列 $\tilde{A} = (A\ \boldsymbol{b})$ は行基本変形により次のように変形される．

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & a_1 \\ 2 & 0 & 2 & a_2 \\ 1 & 1 & 2 & a_3 \end{pmatrix} \xrightarrow{1\text{ 行}\leftrightarrow 3\text{ 行}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & a_3 \\ 2 & 0 & 2 & a_2 \\ 2 & 1 & 3 & a_1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{2\text{ 行}+1\text{ 行}\times(-2),\ 3\text{ 行}+1\text{ 行}\times(-2)} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & a_3 \\ 0 & -2 & -2 & a_2 - 2a_3 \\ 0 & -1 & -1 & a_1 - 2a_3 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{3\text{ 行}+2\text{ 行}\times(-1/2)} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & a_3 \\ 0 & -2 & -2 & a_2 - 2a_3 \\ 0 & 0 & 0 & a_1 - a_2/2 - a_3 \end{pmatrix}$$

ゆえに，$\operatorname{rank} A = 2$ で，

$$\operatorname{rank} \tilde{A} = \left\{\begin{array}{ll} 2 & (a_1 - a_2/2 - a_3 = 0) \\ 3 & (a_1 - a_2/2 - a_3 \neq 0). \end{array}\right.$$

したがって与えられた連立１次方程式が解をもつための条件は，

$$a_1 - a_2/2 - a_3 = 0$$

である．

例 5.2.

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcr} 2x & + & y & - & z & + & 3w & = & 1 \\ 4x & + & 2y & - & 4z & + & 5w & = & 3 \\ -2x & - & y & + & 3z & - & 2w & = & -2 \\ 2x & + & y & + & z & + & 4w & = & 0 \end{array}\right.$$

の解に含まれる任意定数の個数を求めよ．

解. 拡大係数行列 $\tilde{A} = (A\ \boldsymbol{b})$ は次のように変形される．

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 3 & 1 \\ 4 & 2 & -4 & 5 & 3 \\ -2 & -1 & 3 & -2 & -2 \\ 2 & 1 & 1 & 4 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{2\text{ 行}+1\text{ 行}\times(-2),\ 3\text{ 行}+1\text{ 行},\ 4\text{ 行}+1\text{ 行}\times(-1)} \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{3\text{行}+2\text{行},\ 4\text{行}+2\text{行}} \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

よって $\mathrm{rank}\ A = \mathrm{rank}\ \tilde{A} = 2$. いま, 変数の個数は 4 であるから, 連立 1 次方程式の解に含まれる任意定数の個数は $4 - 2 = 2$ である.

問 5.2. 次の連立 1 次方程式が解をもつためには, a_1, a_2, a_3 の間にどのような関係式が成り立っていればよいか.

(1) $\begin{cases} 2x + y - z = a_1 \\ x + y = a_2 \\ 3x + 2y - z = a_3 \end{cases}$　(2) $\begin{cases} 2x + 3y + 4z = a_1 \\ 3x + 4y + 7z = a_2 \\ x + 3y - z = a_3 \end{cases}$

問 5.3. 次の連立 1 次方程式の解は任意定数をいくつ含むか.

(1) $\begin{cases} 3x + 6y + 9z = 12 \\ 2x + y + 3z = 2 \\ 2x - 3y - z = -6 \end{cases}$　(2) $\begin{cases} 2x + y - z + 3w = 1 \\ 4x + 2y - 4z + 5w = 3 \\ -2x - y + 3z - 2w = -2 \\ 2x + y + z + 4w = 0 \end{cases}$

6　逆行列

n 次正方行列 A の逆行列の求め方について考える. まず, A が逆行列をもつための条件を整理しておく.

定理 6.1. n 次正方行列 A について, 次の条件はすべて同値である.

(1) A は正則行列である,

(2) $\mathrm{rank}\ A = n$,

(3) A は行基本変形により, 単位行列 E_n に変形される,

(4) A は基本行列の積として表される.

証明. (1) $\Rightarrow$ (2) A を行基本変形により階段行列 B に変形したとする. 定理 1.3 から,

$$B = PA \tag{2.5}$$

となる正則行列がある. A が正則ならば B も正則でなければならず, よって B の階数は n となる. ゆえに $\mathrm{rank}\ A = n$.

(2) $\Rightarrow$ (3) $\mathrm{rank}\ A = n$ なら, A は行基本変形により階数 n の階段行列 B に変形される. ここで, n 次正方行列 B が階数 n の階段行列ならば, $B = E_n$ でなければならない. よって (3) が成り立つ.

(3) ⇒ (4) 定理 1.1 (1) による.
(4) ⇒ (1) 定理 1.2 による. □

例 6.1. 次の行列は正則であるか?:

$$(1)\ A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix} \qquad (2)\ B = \begin{pmatrix} -2 & 0 & -4 \\ 1 & -2 & 3 \\ 1 & -4 & 4 \end{pmatrix}.$$

解. (1) 行基本変形により,

$$A \xrightarrow{3\,行+1\,行} \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow{1\,行+2\,行\times 2,\ 3\,行+2\,行\times 2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{1\,行+3\,行\times(-3),\ 2\,行+3\,行\times(-2)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

よって rank $A = 3$ で, A は正則である.

(2) についても同様に行基本変形により rank $B = 2$ がわかるので B は正則でない.

定理 6.2. n 次正方行列 A が何回かの行基本変形によって単位行列 E_n に変形されるとするとする. このとき, 同じ行基本変形によって E_n は逆行列 A^{-1} に変形される.

証明. 行基本変形が k 回行われたとし, i 回目の行基本変形に定理 1.1 (1) によって対応する基本行列を M_i とする $(i = 1, \ldots, k)$. また, これらの行基本変形により E_n が B に変形されるとする. このとき,

$$E_n = M_k \cdots M_1 A,$$

$$B = M_k \cdots M_1 E_n = M_k \cdots M_1.$$

よって,

$$BA = E_n.$$

前定理により A は正則行列である. よって上の式の両辺に右から A^{-1} をかけて,

$$B = A^{-1}.$$

□

例 6.2. 例 6.1 (1) の A について, それに対する解で行った行基本変形を E_3 に対し行うと, 次のようになる:

$$E_3 \xrightarrow{3\,行+1\,行} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{1\,行+2\,行\times 2,\ 3\,行+2\,行\times 2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{1\text{行}+3\text{行}\times(-3),\ 2\text{行}+3\text{行}\times(-2)} \begin{pmatrix} -2 & -4 & -3 \\ -2 & -3 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

ゆえに,

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & -4 & -3 \\ -2 & -3 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

実際に逆行列を求めるには, A と E_n を並べた $(n, 2n)$ 行列 $(A\ E_n)$ に行基本変形を施して, A を E_n に変形してみればよい.

例 6.3.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

の逆行列を求めてみる.

$$(A\ E_3) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{2\text{行}+1\text{行}\times(-1),\ 3\text{行}+1\text{行}\times(-2)} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{2\text{行}\leftrightarrow 3\text{行}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{2\text{行}\times(-1)} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{1\text{行}+2\text{行}\times(-1)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{2\text{行}+3\text{行}\times(-1)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

これから,

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

問 6.1. 次の逆行列を求めよ.

$$(1) \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & 2 & 7 \\ -5 & -2 & -4 \end{pmatrix} \qquad (2) \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -2 \\ -2 & -2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & -1 & -2 \\ 0 & -3 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

第 2 章 練 習 問 題

1. 次の行列の階数を求めよ.

(1) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \\ 5 & 3 & 7 \end{pmatrix}$ (2) $\begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 & 6 \\ 2 & 4 & 1 & 8 \\ 3 & 7 & 2 & 15 \end{pmatrix}$ (3) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 4 & 0 & 2 \\ -1 & 3 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

(4) $\begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 & -1 & -4 \\ 3 & 3 & 2 & 1 & -1 \\ 5 & 1 & 4 & 3 & 5 \\ 11 & 1 & 9 & 6 & 13 \end{pmatrix}$ (5) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$ (6) $\begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 & 1 & -3 \\ 1 & 1 & -6 & -2 & -4 \\ -2 & 1 & 7 & 3 & 1 \end{pmatrix}$

(7) $\begin{pmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{pmatrix}$ (8) $\begin{pmatrix} 1 & a & bc \\ 1 & b & ca \\ 1 & c & ab \end{pmatrix}$ (9) $\begin{pmatrix} a+2 & 1 & 2 & -1 \\ -5 & a-3 & -4 & 1 \\ -1 & 0 & a-1 & 1 \\ 3 & 1 & 2 & a-2 \end{pmatrix}$

2. 次の連立 1 次方程式を解け.

(1) $\begin{cases} 2x - y - z = 1 \\ -x - 2y - z = 1 \\ -x - y + 2z = 1 \end{cases}$ (2) $\begin{cases} -2x + 2y - z - w = 3 \\ 2x + y + 3z + w = 6 \\ x + 3y + z + 2w = 9 \\ -3x - y + 4z - 3w = -6 \end{cases}$

(3) $\begin{cases} x - y + z = 2 \\ -x + 2y - 3z = 1 \\ 2y + 4z = -2 \\ x + y + 2z = 0 \end{cases}$ (4) $\begin{cases} 3x - 6y + 9z = 6 \\ x - 2y + 3z = 2 \\ -2x + 4y - 6z = -4 \end{cases}$

(5) $\begin{cases} 2x + 3y + z = 0 \\ -4x + y + 5z = 0 \\ -x + 2y + 3z = 0 \end{cases}$ (6) $\begin{cases} x + 2y + 2z + 2w - u = 0 \\ 3x + 6y + 3z + 9w - 6u = 0 \\ 2x + 4y + 7z + w + u = 0 \end{cases}$

(7) $\begin{cases} 3x + 6y + 9z = 12 \\ 2x + y + 3z = 0 \\ 2x - 3y - z = -1 \end{cases}$ (8) $\begin{cases} x + 2y + 2z - 3w = -2 \\ 2x + 4y + z = 2 \\ 3x + 6y + z + w = 4 \\ 4x + 8y + 3z - 2w = 2 \end{cases}$

(9) $\begin{cases} 2y + 3z = 5 \\ 2x + 4y + 2z = 8 \\ x + 2y + 3z = 6 \\ 3x + 3y + z = 7 \end{cases}$ (10) $\begin{cases} x + 2y + 3z = 0 \\ 2x + 5y + 3z = 0 \\ x + 8z = 0 \end{cases}$

3. 次の連立 1 次方程式が解をもつために a_1, a_2, a_3 の間に成り立つ関係式を求めよ．

$$\begin{cases} 2x + y + 3z = a_1 \\ 2x + 2z = a_2 \\ x + y + 2z = a_3 \end{cases}$$

4. 次の連立 1 次方程式が解をもつように a, b を定め, 解を求めよ．

$$\begin{cases} 2x - 3y - z + w = a \\ x - 9y - 8z + 5w = -4 \\ 4x - 11y - 7z + 5w = -1 \\ x + y + 2z - w = b \end{cases}$$

5. 次の連立一次方程式の解に含まれる任意定数の個数を調べよ．

(1) $\begin{cases} x + 3y + z + w = 0 \\ x + 5y - z - w = 0 \end{cases}$　　(2) $\begin{cases} 9x - 3y - 3z = 0 \\ -3x + y + z = 0 \\ 6x - 2y - 2z = 0 \end{cases}$

6. 次の行列の逆行列を求めよ

(1) $\begin{pmatrix} -3 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$　(2) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$　(3) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$

(4) $\begin{pmatrix} 3 & 3 & -5 & -6 \\ 1 & 2 & -3 & -1 \\ 2 & 3 & -5 & -3 \\ -1 & 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$　(5) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & b \\ 1 & a & 0 \end{pmatrix}$　(6) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & c & 1 \\ 0 & b & 1 & 0 \\ a & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$