

第1章

行列

1 行列とその和・スカラー倍

数を下のように長方形上に並べて括弧でくくったものを行列という:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

行列において、横の並びを行といい、縦の並びを列という。上の行列 A は、行が m 個、列が n 個あるので、 m 行 n 列の行列、または (m, n) 行列という。行列 A の第 i 行と第 j 列の交わりの位置にある数を A の (i, j) 成分という。 (i, j) 成分が a_{ij} である行列を (a_{ij}) と書く。

例 1.1. $a_{ij} = i^2 - j$ であるとき、 $(4, 5)$ 行列 $A = (a_{ij})$ の成分を並べて書き表すと

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -2 & -3 & -4 \\ 3 & 2 & 1 & 0 & -1 \\ 8 & 7 & 6 & 5 & 4 \\ 15 & 14 & 13 & 12 & 11 \end{pmatrix}$$

となる。

$(1, n)$ 行列を n 次元行ベクトル、 $(m, 1)$ 行列を m 次元列ベクトルといい、これらを総称して数ベクトルという。特に、すべての成分が 0 の数ベクトルを零ベクトルといい、 $\mathbf{0}$ とかく。 (m, n) 行列 $A = (a_{ij})$ の第 i 行の成分からできる行ベクトルを A の第 i 行ベクトルといい、 A の第 j 列の成分からできる列ベクトルを A の第 j 列ベクトルという。たとえば、例 1.1 の A について、第 3 行ベクトルは

$$(8 \ 7 \ 6 \ 5 \ 4),$$

4 第1章. 行列

第4列ベクトルは

$$\begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 5 \\ 12 \end{pmatrix}$$

である.

成分がすべて0の行列を**零行列**といい, O で表す. (m, n) 行列であることを明示したいときは $O_{m,n}$ と書く.

2つの (m, n) 行列 $A = (a_{ij})$, $B = (b_{ij})$ について, $A = B$ であるとは,

$$\text{すべての } i, j \text{ について } a_{ij} = b_{ij}$$

となることである.

例 1.2.

$$\begin{pmatrix} 2a - 4b & c + d \\ 3b + c & a - d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 1 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}$$

となるように a, b, c, d を定めよ.

解. 連立方程式

$$2a - 4b = 6, \quad c + d = 1, \quad 3b + c = 7, \quad a - d = 8$$

を解いて,

$$a = 5, \quad b = 1, \quad c = 4, \quad d = -3.$$

2つの (m, n) 行列 $A = (a_{ij})$, $B = (b_{ij})$ について, その和 $A + B$ とその差 $A - B$ を

$$A + B = (a_{ij} + b_{ij}), \quad A - B = (a_{ij} - b_{ij})$$

として定める. また実数 λ について,

$$\lambda A = (\lambda a_{ij})$$

と定める (スカラー倍).

例 1.3.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 3 \\ -1 & 0 & 2 & 4 \\ 4 & -2 & 7 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -4 & 3 & 5 & 1 \\ 2 & 2 & 0 & -1 \\ 3 & 2 & -4 & 5 \end{pmatrix}$$

とするとき,

$$A + B = \begin{pmatrix} -2 & 4 & 5 & 4 \\ 1 & 2 & 2 & 3 \\ 7 & 0 & 3 & 5 \end{pmatrix}, \quad A - B = \begin{pmatrix} 6 & -2 & -5 & 2 \\ -3 & -2 & 2 & 5 \\ 1 & -4 & 11 & -5 \end{pmatrix}.$$

また,

$$3A = \begin{pmatrix} 6 & 3 & 0 & 9 \\ -3 & 0 & 6 & 12 \\ 12 & -6 & 21 & 0 \end{pmatrix}$$

定理 1.1. A, B, C を同じ型の行列, λ, μ を実数とする.

- (1) $A + B = B + A,$
- (2) $(A + B) + C = A + (B + C),$
- (3) $(\lambda\mu)A = \lambda(\mu A),$
- (4) $\lambda(A + B) = \lambda A + \lambda B,$
- (5) $(\lambda + \mu)A = \lambda A + \mu A.$

証明. 証明はどれも容易である. 例えば, (4) は $A = (a_{ij}), B = (b_{ij})$ とすれば,

$$\lambda(A + B) = \lambda(a_{ij} + b_{ij}) = (\lambda(a_{ij} + b_{ij})) = (\lambda a_{ij} + \lambda b_{ij}) = (\lambda a_{ij}) + (\lambda b_{ij}) = \lambda A + \lambda B$$

となって証明される. (2), (4) から $A + B + C, \lambda\mu A$ などと記しても混乱が生じないことになる. □

問 1.1. 3次元ベクトル

$$\begin{pmatrix} -3j \\ j \\ 2j - 1 \end{pmatrix}$$

を第 j 列ベクトルとする $(3, 3)$ 行列 A を書け. また, A の第 3 行ベクトルを書け.

2 行列の積

$A = (a_{ij})$ を (m, n) 行列, $B = (b_{ij})$ を (n, l) 行列とする. 行列 A と B の積 AB は $n = k$ のときに限り定義され, このとき,

$$c_{ij} = \sum_{p=1}^n a_{ip}b_{pj}$$

を (i, j) 成分とする (m, l) 行列 $C = (c_{ij})$ を AB と定める.

例 2.1.

(1)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 6 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 4 & 3 \\ 0 & -1 & 3 & 1 \\ 2 & 7 & 5 & 2 \end{pmatrix}$$

とすると,

$$AB = \begin{pmatrix} 12 & 27 & 30 & 13 \\ 8 & -4 & 26 & 12 \end{pmatrix}.$$

(2)

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$$

とすると,

$$CD = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad DC = \begin{pmatrix} -5 & -5 \\ 5 & 5 \end{pmatrix}.$$

上の例からもわかるように, 行列の積については, 交換法則が成り立たない. また, $A \neq O$, $B \neq O$ でも $AB = O$ となることがある.

例 2.2.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 4 & -5 \\ 3 & k \end{pmatrix}$$

とする. $AB = BA$ となる k があれば求めよ.

解.

$$AB = \begin{pmatrix} 23 & 5k - 10 \\ -9 & k + 15 \end{pmatrix}, \quad BA = \begin{pmatrix} 23 & 15 \\ -3k + 6 & k + 15 \end{pmatrix}$$

であるので, $AB = BA$ となる条件は,

$$\begin{cases} 5k - 10 = 15 \\ -3k + 6 = -9. \end{cases}$$

これを解いて $k = 5$.定理 2.1. A, B, C を行列, λ を実数とする.

$$(1) (AB)C = A(BC),$$

$$(2) (A+B)C = AC + BC, \quad A(B+C) = AB + AC,$$

$$(3) \lambda(AB) = (\lambda A)B = A(\lambda B).$$

証明. (1) のみ示す. $A = (a_{ij})$ を (k, l) 行列, $B = (b_{ij})$ を (l, m) 行列, $C = (c_{ij})$ を (m, n) 行列とする. $AB = (d_{ij})$, $BC = (e_{ij})$ とすると,

$$d_{ij} = \sum_{q=1}^l a_{iq}b_{qj}, \quad e_{ij} = \sum_{p=1}^m b_{ip}c_{pj}$$

となり, $(AB)C$ の (i, j) 成分は

$$\sum_{p=1}^m d_{ip}c_{pj} = \sum_{p=1}^m \left(\sum_{q=1}^l a_{iq}b_{qp} \right) c_{pj} = \sum_{q=1}^l a_{iq} \left(\sum_{p=1}^m b_{qp}c_{pj} \right) = \sum_{q=1}^l a_{iq}e_{qj}.$$

これは $A(BC)$ の (i, j) 成分に等しい. $\square$

(n, n) 行列を n 次正方行列ともいう. n 次正方行列

$$E = E_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

を n 次単位行列という. (m, n) 行列 A について,

$$E_m A = A, \quad A E_n = A$$

が成り立つ.

例 2.3.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}, \quad AB = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 6 & -9 & 3 \end{pmatrix}$$

であるとき, 行列 B を求めよ.

解. B は $(2, 3)$ 行列である.

$$B = \begin{pmatrix} a & c & e \\ b & d & f \end{pmatrix}$$

とすると,

$$AB = \begin{pmatrix} a-2b & c-2d & e-2f \\ -2a+5b & -2c+5d & -2e+5f \end{pmatrix}.$$

よって

$$\begin{cases} a - 2b = -1 \\ -2a + 5b = 6, \end{cases} \quad \begin{cases} c - 2d = 2 \\ -2c + 5d = -9, \end{cases} \quad \begin{cases} e - 2f = -1 \\ -2e + 5f = 3. \end{cases}$$

これから,

$$a = 7, \quad b = 4, \quad c = -8, \quad d = -5, \quad e = 1, \quad f = 1.$$

ゆえに,

$$B = \begin{pmatrix} 7 & -8 & 1 \\ 4 & -5 & 1 \end{pmatrix}$$

問 2.1. 次の各行列を A とするとき, $A = B^2$ となる行列 B をすべて求めよ.

$$(1) \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 9 \end{pmatrix} \quad (2) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (3) \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$$

3 種々の行列

(m, n) 行列 $A = (a_{ij})$ について, A の (j, i) 成分 a_{ji} を (i, j) 成分とする (n, m) 行列を tA と書いて, A の転置行列という. ${}^tA = (b_{ij})$ とすれば, $b_{ij} = a_{ji}$ である.

例 3.1.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ならば,

$${}^tA = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$$

また

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

ならば,

$${}^tA = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

定理 3.1.

- (1) ${}^t({}^tA) = A,$
- (2) ${}^t(A + B) = {}^tA + {}^tB,$
- (3) ${}^t(AB) = {}^tB {}^tA.$

証明. (1), (2) については容易であるので略する. (3) を示す. $A = (a_{ij})$ を (m, n) 行列, $B = (b_{ij})$ を (n, l) 行列とすると,

$$AB = \left(\sum_{p=1}^n a_{ip} b_{pj} \right), \quad {}^t(AB) = \left(\sum_{p=1}^n a_{jp} b_{pi} \right).$$

一方で,

$${}^tB = (b_{ji}), \quad {}^tA = (a_{ji}), \quad {}^tB {}^tA = \left(\sum_{p=1}^n b_{pi} a_{jp} \right).$$

よって,

$${}^t(AB) = {}^tB {}^tA.$$

□

n 次正方行列 A について

$$AX = XA = E_n$$

となるような n 次正方行列 X が存在するとき, A は正則行列であるといい, この X を A の逆行列といって A^{-1} で表す.

例 3.2. 2 次正方行列

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

は $ad - bc \neq 0$ ならば正則で, このとき

$$A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

証明. $D = ad - bc \neq 0$ のとき,

$$X = \frac{1}{D} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

とおくと,

$$AX = XA = E_2$$

となる. よって A は正則で $A^{-1} = X$. $\square$

問 3.1.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$$

は正則行列でないことを示せ.

例 3.3.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 4 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

の逆行列を求めよ.

解. $AX = E$, $X = (x_{ij})$ とすると,

$$AX = \begin{pmatrix} x_{31} & x_{32} & x_{33} \\ 2x_{21} & 2x_{22} & 2x_{23} \\ 4x_{11} & 4x_{12} & 4x_{13} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

よって

$$X = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1/4 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

このとき $XA = E$ となることも確かめられる. ゆえに

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1/4 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

定理 3.2. n 次正方行列 A, B と実数 $\lambda (\neq 0)$ について, 次が成り立つ.

- (1) $(A^{-1})^{-1} = A,$
- (2) $(\lambda A)^{-1} = \lambda^{-1} A^{-1},$
- (3) $({}^t A)^{-1} = {}^t(A^{-1}),$
- (4) $(AB)^{-1} = B^{-1} A^{-1}.$

証明. (4) のみ示す. A, B が正則であるとき, $X = B^{-1} A^{-1}$ とすれば

$$(AB)X = ABB^{-1}A^{-1} = AEA^{-1} = E,$$

$$X(AB) = B^{-1}A^{-1}AB = B^{-1}EB = E.$$

よって AB も正則で $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$. $\square$

問 3.2.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

の逆行列を求めよ.

n 次正方行列 $A = (a_{ij})$ において

$$i > j \text{ ならば } a_{ij} = 0$$

となっているとき, A を上三角行列という. また,

$$i < j \text{ ならば } a_{ij} = 0$$

となっているとき, A を下三角行列という. $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}$ を A の対角成分という. 対角成分以外の成分がすべて 0 であるとき, A を対角行列という.

例 3.4.

- (1) 上三角行列の積は上三角行列である,
 (2) 下三角行列の積は下三角行列である,
 (3) 対角行列の積は対角行列である.

証明. (1) のみ示す. $A = (a_{ij})$, $B = (b_{ij})$ を n 次の上三角行列とする. $AB = (c_{ij})$ とすると,

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik} b_{kj}.$$

$i > j$ ならば,

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^j a_{ik} b_{kj} + \sum_{k=j+1}^n a_{ik} b_{kj} = \sum_{k=1}^j 0 \cdot b_{kj} + \sum_{k=j+1}^n a_{ik} \cdot 0 = 0.$$

よって, AB も上三角行列である. $\square$

問 3.3. 上三角行列

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

の逆行列を求めよ.

第 1 章 練習問題

1. 次の計算をなさい.

$$(1) \begin{pmatrix} 1 & 7 & 3 \\ 2 & 0 & 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 6 & 0 & 6 \end{pmatrix} \quad (2) 2 \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} - 5 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$(3) \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \\ 5 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 7 \end{pmatrix} \quad (4) \begin{pmatrix} 1 & 7 & 3 \\ 2 & 0 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 6 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}$$

$$(5) \begin{pmatrix} 2 & -3 & 5 \\ 5 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad (6) (2 \ 3 \ -1) \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$(7) \begin{pmatrix} \alpha & 1 & 0 \\ 0 & \alpha & 1 \\ 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix}^n \quad (8) \begin{pmatrix} \alpha & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \beta & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \beta \end{pmatrix}^n$$

2. $A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & a \\ 2-a & 1 \end{pmatrix}$, $B = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 & -1+2b \\ b & -1 \end{pmatrix}$ のとき, 次の関係式が成り立つような実数 a, b の値または関係式を求めよ.

$$(1) A^2 = A \quad (2) B^2 = -B \quad (3) AB = BA \quad (4) AB = -BA$$

$$(5) (A+B)^2 = O \quad (6) (A-B)^2 = E_2.$$

3. $A = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{3} & a_1 \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{3} & a_2 \\ 0 & 1/\sqrt{3} & a_3 \end{pmatrix}$ とするとき, ${}^tAA = E_3$ の成り立つ a_1, a_2, a_3 を求めよ.

4. 行列 $A = \begin{pmatrix} a & -a+3 \\ a+4 & a+1 \end{pmatrix}$ が逆行列をもたないように a の値を定めよ.

5. 次の行列の逆行列を求めよ

$$(1) \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \quad (2) \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (3) \begin{pmatrix} \alpha & 1 & 0 \\ 0 & \alpha & 1 \\ 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix} \quad (4) \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

6. 次の行列 A について, A^2, A^3, A^4 および A^{10} を計算せよ.

$$(1) \begin{pmatrix} 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & b \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (2) \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (3) \begin{pmatrix} a & 1-a \\ 1+a & -a \end{pmatrix}$$

7. n 次正方行列 A, B に対して, $E_n - AB$ が正則ならば $E_n - BA$ も正則で

$$(E_n - BA)^{-1} = E_n + B(E_n - AB)^{-1}A$$

となることを証明せよ.