

関数の極限と微積分の公式

1 極限の定義と性質

1. $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ とは 任意の $\epsilon > 0$ に対して、ある $\delta > 0$ を定めて、 $0 < |x - a| < \delta$ ならば、 $|f(x) - L| < \epsilon$ とできる.
2. 右側極限とは $\lim_{x \rightarrow a+0} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow a+} f(x)$ と表し、 $x > a$ を満たしつつ近づける. 左側極限とは $\lim_{x \rightarrow a-0} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow a-} f(x)$ と表し、 $x < a$ を満たして近づける.
3. $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L \Leftrightarrow \begin{cases} \lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = L \\ \lim_{x \rightarrow a-0} f(x) = L \end{cases}$
4. $\lim_{x \rightarrow a+0} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow a-0} f(x)$ ならば、極限は存在しない、極限なしという.
5. $\lim_{x \rightarrow a} [cf(x)] = c \lim_{x \rightarrow a} f(x)$ c は定数
6. $\lim_{x \rightarrow a} [f(x) \pm g(x)] = [\lim_{x \rightarrow a} f(x)] \pm [\lim_{x \rightarrow a} g(x)]$
7. $\lim_{x \rightarrow a} [f(x)g(x)] = [\lim_{x \rightarrow a} f(x)] [\lim_{x \rightarrow a} g(x)]$
8. $\lim_{x \rightarrow a} \left[\frac{f(x)}{g(x)} \right] = \frac{\lim_{x \rightarrow a} f(x)}{\lim_{x \rightarrow a} g(x)} \quad (\lim_{x \rightarrow a} g(x) \neq 0)$
9. $\lim_{x \rightarrow a} [f(x)]^n = [\lim_{x \rightarrow a} f(x)]^n$, べき乗との交換

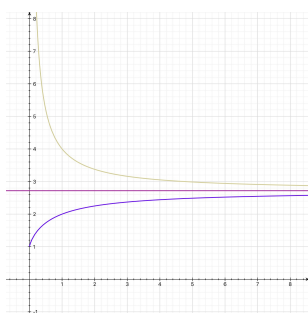
2 関数の値と極限

1. 定数 (自然対数の底)

$$\begin{aligned} & \lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{1/x} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e \approx 2.71828 \dots \end{aligned}$$

単調増加列 ($\uparrow$) と単調減少列 ($\downarrow$):

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{x+1}$$



[補足] $0 < t < 1$ ($1 < t$) に対して、 $x^t > (<) 1 + t(x - 1)$, $x > 0$ をもちいる。もし $\alpha > \beta > 0$ ならば、 $x = 1 + \frac{1}{\beta}$, $t = \beta/\alpha$ とすると、単調増加; $(1 + 1/\beta)^\beta < (1 + 1/\alpha)^\alpha$, 一方 $x = 1 - \frac{1}{\beta+1}$, $t = (\beta+1)/(\alpha+1)$ とすると、単調増加; $(1 + 1/\beta)^\beta > (1 + 1/\alpha)^\alpha$.

2. べき乗と指数関数

正の数 $a > 0$ に対して、 $a^m \times a^n = a^{m+n}$, $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$, $(a^m)^n = a^{m \times n} = a^{mn}$.
 $e^x = \exp(x)$:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} e^x = \infty, \lim_{x \rightarrow 0} e^x = 1, \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0,$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

・オイラー・ドモアブルの定理;

$$e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta, \quad i = \sqrt{-1}$$

3. 常用対数: 正の数 x を真数とよび、10 を底とよぶ。 $y = \log_{10} x \Leftrightarrow x = 10^y$, $\approx$ は近似的な数値の意味;

$$\begin{aligned} & \log_{10} 1 = 0, \log_{10} 2 \approx 0.30103, \log_{10} 3 \approx 0.477121, \log_{10} 5 = \log_{10} \frac{10}{2} = \log_{10} 10 - \log_{10} 2 \approx 1 - 0.30103 \approx 0.69897, \log_{10} 100 = \log_{10} 10^2 = 2 \times \log_{10} 10 = 2, \log_{10} 50 = \log_{10}(5 \times 10) = \log_{10} 5 + \log_{10} 10 \approx 0.69897 + 1 = 1.69897 \text{ (積を和計算に帰着)}, \\ & \log_{10} 1000 = \log_{10} 10^3 = 3, \dots, \log_{10} \frac{1}{2} = \log_{10} 1 - \log_{10} 2 = 0 - \log_{10} 2 \approx -0.30103, \log_{10} \frac{1}{3} = -0.477121, \log_{10} \frac{1}{1000} = \log_{10} 10^{-3} = \log_{10} 0.0001 = \end{aligned}$$

$-3, \lim_{x \rightarrow 0} \log_{10} x = -\infty$. このように対数関数は定義域と値域をまとめると、 $y = \log_{10} x$ では、 $0 < x < \infty$ (真数は必ず正の数)、 $-\infty < y < \infty$ (対数の値は負の無限大から正の無限大の値となる)

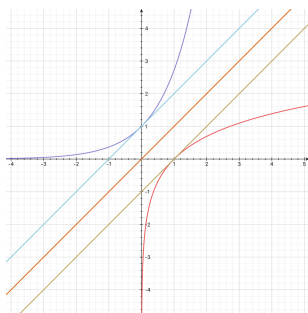
4. 自然対数: ネイピア数 e を底とした対数:

$\ln(x) = \log x (= \log_e x)$ と表す

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \log(x) = \infty, \lim_{x \rightarrow e} \log x = 1, \\ \lim_{x \rightarrow 1} \log x = 0, \lim_{x \rightarrow -\infty} \log x = -\infty,$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\log(x)}{x-1} = 1.$$

5本の曲線は、 $y = e^x = \exp(x)$, $y = x + 1$, $y = x$, $y = x - 1$, $y = \ln(x) = \log(x)$



対数の性質;

(i) $\log(ab) = \log(a \times b) = \log a + \log b$ (“積” ab を対数に対応させると、対数値の “和” で計算できる、これを元にもどす (対数表での逆引きの計算) ことで、求めるべき積が得られる。大きな数の計算では、極めて効率のよい方法であった。

(ii) $\log\left(\frac{a}{b}\right) = \log a - \log b$ (割り算では、差に対応させることができる)

(iii) $e^{\log x} = x$, $e^{\log f(x)} = f(x)$ (微分の計算等によく用いられる)

(iv) 底の変換 $\log_a b = \frac{\log b}{\log a}$

5. 正弦関数 (サイン): $\sin x$

π (ラジアン, radian) = 180° (度, degree)

$\sin 0 = 0$, $\sin \frac{\pi}{2} = 1$, $\sin \pi = 0$, 奇関数;

$\sin(-\theta) = -\sin(\theta)$

$$\sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}, \sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}, \sin \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

6. 余弦関数 (コサイン): $\cos x$

$$\cos 0 = 1, \cos \frac{\pi}{2} = 0 \text{ (直交、垂直の角度),}$$

$$\cos \pi = -1,$$

$$\cos \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}, \cos \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}, \cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$$

偶関数; $\cos(-\theta) = \cos(\theta)$,

• $\cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1$ (三平方の定理、勾股弦の定理)

• If $0 \leq \alpha \leq \pi/2$ then,

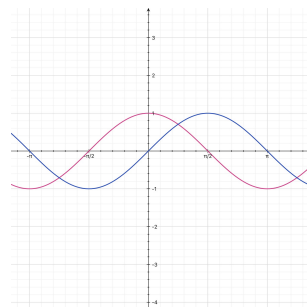
$0 < \sin \alpha = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$, ($\frac{\pi}{2}$ だけ左に平行移動)

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos^2 x - 1}{x^2 (\cos x + 1)} =$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\sin^2 x}{x^2 (\cos x + 1)} = (-1) \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{\sin x}{x} \right]^2 \times$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\cos x + 1} = -\frac{1}{2}$$

正弦関数と余弦関数:



7. 正接関数 (タンジェント): $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$

$\tan 0 = 0$, 奇関数; $\tan(-\theta) = -\tan \theta$,

$$\tan \frac{\pi}{3} = \sqrt{3}, \tan \frac{\pi}{4} = 1, \tan \frac{\pi}{6} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\lim_{x \rightarrow \pi/2} \tan x = \infty, \lim_{x \rightarrow -\pi/2} \tan x = -\infty,$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \frac{1}{\cos x} = 1 \times 1 = 1.$$

8. 加法定理

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$$

和が積の差 (符号に注意)

$$\tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \tan \beta}$$

2倍角 ($\alpha = \beta$), 半角 (2倍角を逆に解く):

$$\sin(2\alpha) = 2 \sin \alpha \cos \alpha,$$

$$\cos(2\alpha) = 2 \cos^2 \alpha - 1 = 1 - 2 \sin^2 \alpha,$$

$$\tan(2\alpha) = \frac{2 \tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha},$$

$$\begin{aligned}\sin \frac{\theta}{2} &= \sqrt{\frac{1 - \cos \theta}{2}} \\ \cos \frac{\theta}{2} &= \sqrt{\frac{1 + \cos \theta}{2}} \\ \tan \frac{\theta}{2} &= \sqrt{\frac{1 - \cos \theta}{1 + \cos \theta}} \\ &= \frac{\sin \theta}{1 + \cos \theta} = \frac{1 - \cos \theta}{\sin \theta} \quad (0 \leq \theta < \pi/2)\end{aligned}$$

あるいは

$$\begin{aligned}\sin^2 \alpha &= \frac{1 - \cos 2\alpha}{2} \\ \cos^2 \alpha &= \frac{1 + \cos 2\alpha}{2} \\ \tan \alpha &= \frac{1 - \cos 2\alpha}{\sin 2\alpha}\end{aligned}$$

積を和に変形する式は $\sin(\alpha \pm \beta)$ と $\cos(\alpha \pm \beta)$ を展開して、和や差をとることで $\sin \alpha \sin \beta$, $\cos \alpha \cos \beta$, $\sin \alpha \cos \beta$ が得られる。これは練習問題としておく。

合成: (正弦と余弦の和)

$a \sin \theta + b \cos \theta = \sqrt{a^2 + b^2} \sin(\theta + \alpha)$, ただし $\alpha = \tan^{-1} \frac{b}{a}$ とする,

$$\begin{aligned}\bullet \sin \theta + \cos \theta &= \sqrt{2} \sin\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right) \\ \therefore a=1, b=1 &\rightarrow \alpha = \tan^{-1}(1) = \pi/4 \\ \bullet \sin \theta - \cos \theta &= \sqrt{2} \sin\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right) \\ \therefore a=1, b=-1 &\rightarrow \alpha = \tan^{-1}(-1) = -\pi/4\end{aligned}$$

[正弦と正弦の和, 余弦と余弦の和]

$$\begin{aligned}\sin \alpha + \sin \beta &= 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2} \\ \cos \alpha + \cos \beta &= 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}\end{aligned}$$

9. 逆三角関数 アークサイン、アークコサイン、アークタンジェント

変数 α は $-1 \leq \alpha \leq 1$, または $-\infty < \alpha < \infty$ の範囲で、対応する角度 θ は, $\theta = f^{-1}(\alpha)$ の形: 逆関数であるから, $f(\theta) = \alpha$ を満たす θ を意味する。ただし角度は各関数によって異なる主値とする。

- (a) 逆正弦関数 $\theta = \sin^{-1}(\alpha) = \arcsin(\alpha)$,
主値; $-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$, $\sin(\theta) = \alpha$
[例] 区間 $[-\pi/2, \pi/2]$ の主値に限定。

$$(i) \sin^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) = \arcsin\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{6},$$

$$(ii) \sin^{-1}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -\frac{\pi}{3},$$

$$(iii) \sin^{-1}\left(\sin\left(-\frac{2\pi}{3}\right)\right) = \sin^{-1}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -\frac{\pi}{3},$$

$$(iv) \sin^{-1}\left(\sin\frac{4\pi}{5}\right) = \sin^{-1}\left(\sin\frac{\pi}{5}\right) = \frac{\pi}{5}.$$

- (b) 逆余弦関数 $\theta = \cos^{-1}(\alpha) = \arccos(\alpha)$,
主値; $0 \leq \theta \leq \pi$

- (c) 逆正接関数 $\theta = \tan^{-1}(\alpha) = \arctan(\alpha)$,
主値; $-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$

[例] $\sin\left(\tan^{-1}\left(\frac{1}{3}\right)\right)$ を求めるには,
 $\tan^{-1}\left(\frac{1}{3}\right) = \theta$ とおくと, $\cos^2 \theta = 1/(1 + \tan^2 \theta) = 9/10$ より, $\sin \theta = 1/\sqrt{10}$ を得る。

$$10. \text{双曲線関数 (ハイパボリック) } \sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \tanh(x) = \frac{\sinh(x)}{\cosh(x)},$$

三角関数が円 ($x^2 + y^2 = 1$) における角度とその上の三角形の長さの関係を表していたが、双曲線関数では双曲線 $x^2 - y^2 = 1$ あるいは $x^2 - y^2 = -1$ における焦点とその曲線上の点との長さなどを関係づける。

性質: $\cosh^2(x) - \sinh^2(x) = 1$ (ピタゴラスの関係とは異なり、マイナスの係数で、双曲線が負の係数をもつことに由来する)

微分では (変数の $()$ を省略している)
 $(\cosh x)' = \sinh x$, $(\sinh x)' = \cosh x$,
 $(\tanh x)' = \frac{1}{\cosh^2 x}$ と三角関数との違いに注意する。

逆関数については $y = \sinh x$ の逆関数は $y = \log(x + \sqrt{1 + x^2})$, $y = \cosh x$ の逆関数は $y = \log(x + \sqrt{x^2 - 1})$ (ここでは第 1 象限に限定した)。

3 ロピタル (L'Hospital) の定理

定理 もし $\lim_{x \rightarrow \alpha} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{0}{0}$ あるいは $\lim_{x \rightarrow \alpha} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\pm\infty}{\pm\infty}$ などの不定形であるとき、分母と分子をそれぞれ微分した $f'(x)$ と $g'(x)$ について、その極限があるならば、 $\lim_{x \rightarrow \alpha} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow \alpha} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ に等しい。

【例1】 $\frac{\infty}{\infty}$ の形: $f(x) = 3x^3 - 4$, $g(x) = 5x - 2x^3$ であるとき、

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} \text{ を求める。}$$

$x \rightarrow \infty$ とすると、不定形であり、ロピタルの定理では $f'(x) = 9x^2$, $g'(x) = 5 - 6x^2$, さらに $f''(x) = 18x$, $g''(x) = -12x$, したがって

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^3 - 4}{5x - 2x^3} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{18x}{-12x} = -\frac{3}{2}$$

と計算できる。一方、直接、この式を変形によって

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^3 - 4}{5x - 2x^3} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 \left(3 - \frac{4}{x^3}\right)}{x^3 \left(\frac{5}{x^2} - 2\right)} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3 - \frac{4}{x^3}}{\frac{5}{x^2} - 2} = \frac{3 - 0}{0 - 2} = -\frac{3}{2} \end{aligned}$$

としても同じ結果が得られる。

【例2】 $\frac{0}{0}$ の形:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} &= 1, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{x^2} = \frac{-1}{2}, \\ \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x}{x^3} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{3x^2} = \frac{-1}{6}, \\ \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x + \frac{x^3}{6}}{x^5} &= \frac{1}{120}, \end{aligned}$$

【e の定義式】 1^∞ の形: $\lim_{x \rightarrow 0} (x+1)^{1/x} = e$

左辺の対数は、 $\frac{1}{x} \log(x+1) = \frac{\log(x+1)}{x}$ で、この分数式の分母分子を微分すると $\frac{1/(1+x)}{1} = \frac{1}{1+x} \rightarrow 1 (x \rightarrow 0)$, $1 = \log e'$ である。

【いろいろと】 高次の微分によって、展開式が表

れることを理解する:

$$\begin{aligned} \bullet \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(x+1)}{x} &= 1, \\ \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(x+1) - x}{x^2} &= \frac{1}{2} \\ \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^3} \left\{ \log(x+1) - x - \frac{1}{2}x^2 \right\} &= -\frac{1}{3} \\ \bullet \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} &= 1, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1 - x}{x^2} = \frac{1}{2!}, \\ \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^3} \left\{ e^x - 1 - x - \frac{1}{2!}x^2 \right\} &= \frac{1}{3!}, \\ \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^4} \left\{ e^x - 1 - x - \frac{1}{2!}x^2 - \frac{1}{3!}x^3 \right\} &= \frac{1}{4!}. \end{aligned}$$

4 微分の公式

1. $(ax + b)' = a$
2. $(ax^2 + bx + c)' = 2ax + b$
3. $(x^a)' = ax^{a-1}$
4. $(a^x)' = a^x \ln(a)$
5. $(e^x)' = e^x$
6. $(\ln(x))' = \frac{1}{x}, (x > 0)$
7. $(\ln(|x|))' = \frac{1}{x}, (x \neq 0)$
8. $(\log_a(x))' = \frac{1}{x \ln a}$

9. $(\sin x)' = \cos x$
10. $(\cos x)' = -\sin x$
11. $(\tan x)' = \sec^2 x$
 $= \frac{1}{\cos^2 x}$
12. $(\sec x)' = \left(\frac{1}{\cos x}\right)'$
 $= \sec x \tan x = \frac{\sin x}{\cos^2 x}$
13. $(\csc x)' = \left(\frac{1}{\sin x}\right)'$
 $= -\csc x \cot x$

- $= -\frac{\cos x}{\sin^2 x}$
14. $(\cot x)' = \left(\frac{1}{\tan x}\right)'$
 $= -\csc^2 x = -\frac{1}{\sin^2 x}$
15. $(\sin^{-1} x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
16. $(\cos^{-1} x)' = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$
17. $(\tan^{-1} x)' = \frac{1}{1+x^2}$

5 微分の一般公式

1. $([f(x)]^n)' = n[f(x)]^{n-1} f'(x)$
2. $(e^{f(x)})' = e^{f(x)} f'(x)$
3. $(\ln[f(x)])' = \frac{f'(x)}{f(x)}$
4. $(\sin[f(x)])' = \cos[f(x)] f'(x)$

5. $(\cos[f(x)])' = -\sin[f(x)] f'(x)$
6. $(\tan[f(x)])' = \sec^2[f(x)] f'(x)$
7. $(\tan^{-1}[f(x)])' = \frac{f'(x)}{1 + [f(x)]^2}$

6 関数の増加／減少

曲線を表す関数式が適当な区間のなかで微分できることを、一般にその区間内で “滑らか (smooth)” という。ある点で折れ曲がったり、ジャンプをして、左右の近づけ方に “飛び離れ (ギャップ)” がある、ジグザグしているならば、それらの点、区間では微分可能ではない。もし滑らかに変化しているならば、関数の増減が微分により調べられる。

1. $x = c$ で $f'(c) = 0$ ならば、極値か変曲点となる。2 階微分の符号を調べて、最大最小に分かれる。もし 2 階微分がゼロならば、変曲点であり、さらに高階の微係数を調べていく。
2. $I = \{x \mid a < x < b\}$ で $x \in I, f'(x) > 0$ ならば、接線の傾き (微分係数) は増加状態 (右上がり)
3. $x \in I$ で $f'(x) < 0$ ならば、接線の傾き (微分係数) は増加状態 (右上がり)

4. $I \in$ で $f'(x) = 0$ ならば、接線の傾きはゼロ、平たんで、関数の値は定数で変化なし。
5. 2 階微分 $x \in I, f''(x) > 0$ ならば、その区間では、“接線の傾きが増加状態” であり、これを凸 (とつ, convex) という。
6. 逆に $x \in I, f''(x) < 0$ ならば、その区間では、“接線の傾きが減少状態” であり、これをおう (凹, concave), 上向きに凸 (上に凸) ともいう。