# 関数の極限と微積分の公式

## 1 極限の定義と性質

1. $\lim_{x\to a} f(x) = L$ とは 任意の $\epsilon > 0$ に対して、ある $\delta > 0$ を定めて、$0 < |x - a| < \delta$ ならば、$|f(x) - L| < \epsilon$ とできる．
2. 右側極限とは $\lim_{x\to a+0} f(x)$, $\lim_{x\to a+} f(x)$ と表し、$x > a$ を満たしつつ近づける．左側極限とは $\lim_{x\to a-0} f(x)$, $\lim_{x\to a-} f(x)$ と表し、$x < a$ を満たして近づける．
3. $\lim_{x\to a} f(x) = L \Leftrightarrow \begin{cases} \lim_{x\to a+0} f(x) = L \\ \lim_{x\to a-0} f(x) = L \end{cases}$
4. $\lim_{x\to a+0} f(x) \neq \lim_{x\to a-0} f(x)$ ならば、極限は存在しない、極限なしという．
5. $\lim_{x\to a}[cf(x)] = c \lim_{x\to a} f(x)$ $c$ は定数
6. $\lim_{x\to a}[f(x) \pm g(x)] = [\lim_{x\to a} f(x)] \pm [\lim_{x\to a} g(x)]$
7. $\lim_{x\to a}[f(x)g(x)] = [\lim_{x\to a} f(x)] [\lim_{x\to a} g(x)]$
8. $\lim_{x\to a}\left[\dfrac{f(x)}{g(x)}\right] = \dfrac{\lim_{x\to a} f(x)}{\lim_{x\to a} g(x)}$ $(\lim_{x\to a} g(x) \neq 0)$
9. $\lim_{x\to a}[f(x)]^n = [\lim_{x\to a} f(x)]^n$, べき乗との交換

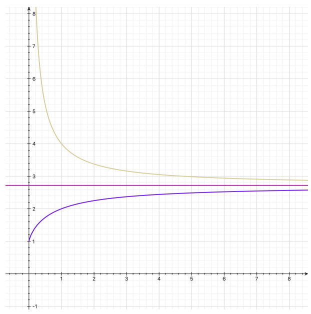
## 2 関数の値と極限

1. 定数（自然対数の底）

$$\lim_{x\to 0}(1+x)^{1/x} = \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e \approx 2.71828\cdots$$

単調増加列 (↑) と単調減少列 (↓):

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e = \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x+1}$$



〔補足〕$0 < t < 1 (1 < t)$ に対して、 $x^t > (<) 1 + t(x-1)$, $x > 0$ をもちいる。もし $\alpha > \beta > 0$ ならば、 $x = 1 + \dfrac{1}{\beta}$, $t = \beta/\alpha$ とすると、単調増加；$(1+1/\beta)^\beta < (1+1/\alpha)^\alpha$,
一方 $x = 1 - \dfrac{1}{\beta+1}$, $t = (\beta+1)/(\alpha+1)$ とすると、単調増加；$(1+1/\beta)^\beta > (1+1/\alpha)^\alpha$.

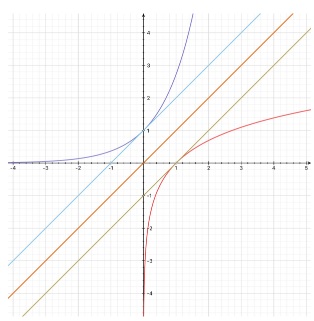
2. 指数関数 $e^x = \exp(x)$

$\lim_{x\to\infty} e^x = \infty$, $\lim_{x\to 0} e^x = 1$, $\lim_{x\to -\infty} e^x = 0$,
$\lim_{x\to 0}\dfrac{e^x - 1}{x} = 1$.

オイラー・ドモアブルの定理 $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$, $i = \sqrt{-1}$

3. 自然対数 $\ln(x) = \log x (= \log_e x)$ と表す

$\lim_{x\to\infty} \log(x) = \infty$, $\lim_{x\to e} \log x = 1$,
$\lim_{x\to 1} \log x = 0$, $\lim_{x\to -\infty} \log x = -\infty$,
$\lim_{x\to 1}\dfrac{\log(x)}{x-1} = 1$.
5 本の曲線は、$y = e^x = \exp(x)$, $y = x + 1$, $y = x$, $y = x - 1$, $y = \ln(x) = \log(x)$



4. 正弦関数 $\sin x$:

$\pi$ (ラジアン, radian) $= 180^0$(度 ,degree)

$\sin 0 = 0,\ \sin\dfrac{\pi}{2} = 1,\ \sin\pi = 0$, 奇関数; $\sin(-\theta) = -\sin(\theta)$

$\sin\dfrac{\pi}{6} = \dfrac{1}{2},\ \sin\dfrac{\pi}{4} = \dfrac{\sqrt{2}}{2},\ \sin\dfrac{\pi}{3} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x} = 1$

5. 余弦関数:

$\cos x$: $\cos 0 = 1,\ \cos\dfrac{\pi}{2} = 0$ (直交、垂直の角度), $\cos\pi = -1$,

$\cos\dfrac{\pi}{6} = \dfrac{\sqrt{3}}{2},\ \cos\dfrac{\pi}{4} = \dfrac{\sqrt{2}}{2},\ \cos\dfrac{\pi}{3} = \dfrac{1}{2}$

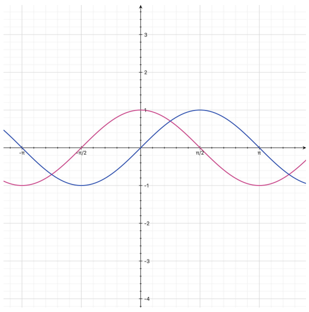
偶関数; $\cos(-\theta) = \cos(\theta)$,

• $\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$ (三平方の定理、勾股弦の定理)

• If $0 \le \alpha \le \pi/2$ then, $0 < \sin\alpha = \cos\left(\dfrac{\pi}{2} - \alpha\right)$, ($\dfrac{\pi}{2}$ だけ左に平行移動)

• $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x - 1}{x^2} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos^2 x - 1}{x^2(\cos x + 1)} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{-\sin^2 x}{x^2(\cos x + 1)} = (-1)\lim\limits_{x\to 0}\left[\dfrac{\sin x}{x}\right]^2 \times \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{\cos x + 1} = -\dfrac{1}{2}$

正弦関数と余弦関数：



6. 正接関数: $\tan x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$, $\tan 0 = 0$, 奇関数；$\tan(-\theta) = -\tan\theta$,

$\tan\dfrac{\pi}{3} = \sqrt{3},\ \tan\dfrac{\pi}{4} = 1,\ \tan\dfrac{\pi}{6} = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$

$\lim\limits_{x\to\pi/2}\tan x = \infty,\ \lim\limits_{x\to-\pi/2}\tan x = -\infty$,

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x}{x} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}\dfrac{1}{\cos x} = 1.$

7. 加法定理

$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$

$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$

和が積の差 (符号に注意)

$\tan(\alpha+\beta) = \dfrac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - \tan\alpha\tan\beta}$

2 倍角 ($\alpha = \beta$), 半角 ( 2 倍角を逆に解く):

$\sin(2\alpha) = 2\sin\alpha\cos\alpha$, $\cos(2\alpha) = 2\cos^2\alpha - 1 = 1 - 2\sin^2\alpha$, $\tan(2\alpha) = \dfrac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}$,

$\tan(\alpha/2) = \sqrt{\dfrac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}\ \ (0 \le \alpha < \pi/2)$

合成:（正弦と余弦の和）$a\sin\theta + b\cos\theta = \sqrt{a^2+b^2}\sin(\theta+\alpha)$, ただし $\alpha = \tan^{-1}\dfrac{b}{a}$,

• $\sin\theta + \cos\theta = \sqrt{2}\sin(\theta + \dfrac{\pi}{4})$ $\because a = 1, b = 1 \to \alpha = \tan^{-1}(1) = \pi/4$

• $\sin\theta - \cos\theta = \sqrt{2}\sin(\theta - \dfrac{\pi}{4})$ $\because a = 1, b = -1 \to \alpha = \tan^{-1}(-1) = -\pi/4$

〔正弦と正弦の和, 余弦と余弦の和〕

$\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\dfrac{\alpha+\beta}{2}\cos\dfrac{\alpha-\beta}{2}$

$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\dfrac{\alpha+\beta}{2}\cos\dfrac{\alpha-\beta}{2}$

8. 逆三角関数 アークサイン、アークコサイン、アークタンジェント

変数 $\alpha$ は $-1 \le \alpha \le 1$, または $-\infty < \alpha < \infty$ の範囲で、対応する角度 $\theta$ は, $\theta = f^{-1}(\alpha)$ の形： 逆関数であるから、$f(\theta) = \alpha$ を満たす $\theta$ を意味する。ただし角度は各関数によって異なる主値とする。

(a) 逆正弦関数　$\theta = \sin^{-1}(\alpha) = \arcsin(\alpha)$, 主値; $-\dfrac{\pi}{2} \le \theta \le \dfrac{\pi}{2}$,　$\sin(\theta) = \alpha$

〔例〕 区間 $[-\pi/2, \pi/2]$ の主値に限定.

(i) $\sin^{-1}(\dfrac{1}{2}) = \arcsin(\dfrac{1}{2}) = \dfrac{\pi}{6}$,

(ii) $\sin^{-1}(-\dfrac{\sqrt{3}}{2}) = -\dfrac{\pi}{3}$,

(iii) $\sin^{-1}\left(\sin(-\dfrac{2\pi}{3})\right) = \sin^{-1}(-\dfrac{\sqrt{3}}{2}) = -\dfrac{\pi}{3}$, (iv) $\sin^{-1}(\sin\dfrac{4\pi}{5}) = \sin^{-1}(\sin\dfrac{\pi}{5}) = \dfrac{\pi}{5}$.

(b) 逆余弦関数 $\theta = \cos^{-1}(\alpha) = \arccos(\alpha)$, 主値; $0 \le \theta \le \pi$

(c) 逆正接関数 $\theta = \tan^{-1}(\alpha) = \arctan(\alpha)$, 主値; $-\dfrac{\pi}{2} < \theta < \dfrac{\pi}{2}$

〔例〕 $\sin\left(\tan^{-1}(\dfrac{1}{3})\right)$ を求めるには、$\tan^{-1}(\dfrac{1}{3}) = \theta$ とおくと、$\cos^2\theta = 1/(1+\tan^2\theta) = 9/10$ より、$\sin\theta = 1/\sqrt{10}$ を得る。

# 3 ロピタル (L'Hospital) の定理

$\boxed{\text{定理}}$ もし $\displaystyle\lim_{x\to\alpha}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{0}{0}$ あるいは $\displaystyle\lim_{x\to\alpha}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$ などの不定形であるとき、分母と分子をそれぞれ微分した $f'(x)$ と $g'(x)$ について、その極限があるならば、$\displaystyle\lim_{x\to\alpha}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to\alpha}\frac{f'(x)}{g'(x)}$ に等しい。

〔例１〕 $\frac{\infty}{\infty}$ の形：$f(x)=3x^3-4,\ g(x)=5x-2x^3$ であるとき、

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)}\text{を求める。}$$

$x\to\infty$ とすると、不定形であり、ロピタルの定理では $f'(x)=9x^2,\ g'(x)=5-6x^2$, さらに $f''(x)=18x,\ g''(x)=-12x$, したがって

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3x^3-4}{5x-2x^3}\lim_{x\to\infty}\frac{18x}{-12x}=-\frac{3}{2}$$

と計算できる。一方、直接、この式を変形によって

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3x^3-4}{5x-2x^3}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^3\left(3-\dfrac{4}{x^3}\right)}{x^3\left(\dfrac{5}{x^2}-2\right)}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{3-\dfrac{4}{x^3}}{\dfrac{5}{x^2}-2}=\frac{3-0}{0-2}=-\frac{3}{2}$$

としても同じ結果が得られる。

〔例２〕 $\frac{0}{0}$ の形：

$$\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x}=1,\quad \lim_{x\to0}\frac{\cos x-1}{x^2}=\frac{-1}{2},$$

$$\lim_{x\to0}\frac{\sin x-x}{x^3}=\lim_{x\to0}\frac{\cos x-1}{3x^2}=\frac{-1}{6},$$

$$\lim_{x\to0}\frac{\sin x-x+\dfrac{x^3}{6}}{x^5}=\frac{1}{120},$$

〔$e$ の定義式〕 $1^\infty$ の形：$\displaystyle\lim_{x\to0}(x+1)^{1/x}=e$

左辺の対数は、$\dfrac{1}{x}\log(x+1)=\dfrac{\log(x+1)}{x}$ で、この分数式の分母分子を微分すると $\dfrac{1/(1+x)}{1}=\dfrac{1}{1+x}\to1(x\to0),\text{‘}1=\log e'$ である.

〔いろいろと〕 高次の微分によって、展開式が表れることを理解する：

- $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{\log(x+1)}{x}=1,$
  $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{\log(x+1)-x}{x^2}=\frac{1}{2}$
  $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{1}{x^3}\{\log(x+1)-x-\frac{1}{2}x^2\}=-\frac{1}{3}$
- $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{e^x-1}{x}=1,\quad \lim_{x\to0}\frac{e^x-1-x}{x^2}=\frac{1}{2!},$
  $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{1}{x^3}\{e^x-1-x-\frac{1}{2!}x^2\}=\frac{1}{3!},$
  $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{1}{x^4}\{e^x-1-x-\frac{1}{2!}x^2-\frac{1}{3!}x^3\}=\frac{1}{4!}.$

# 4 微分の公式

1. $(ax+b)'=a$
2. $(ax^2+bx+c)'=2ax+b$
3. $(x^a)'=ax^{a-1}$
4. $(a^x)'=a^x\ln(a)$
5. $(e^x)'=e^x$
6. $(\ln(x))'=\dfrac{1}{x},\ (x>0)$
7. $(\ln(|x|))'=\dfrac{1}{x},\ (x\neq0)$
8. $(\log_a(x))'=\dfrac{1}{x\ \ln a}$
9. $(\sin x)'=\cos x$
10. $(\cos x)'=-\sin x$
11. $(\tan x)'=\sec^2 x$ $=\dfrac{1}{\cos^2 x}$
12. $(\sec x)'=(\dfrac{1}{\cos x})'$ $=\sec x\tan x=\dfrac{\sin x}{\cos^2 x}$
13. $(\csc x)'=(\dfrac{1}{\sin x})'$ $=-\csc x\cot x$ $=-\dfrac{\cos x}{\sin^2 x}$
14. $(\cot x)'=(\dfrac{1}{\tan x})'$ $=-\csc^2 x=-\dfrac{1}{\sin^2 x}$
15. $(\sin^{-1}x)'=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
16. $(\cos^{-1}x)'=\dfrac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$
17. $(\tan^{-1}x)'=\dfrac{1}{1+x^2}$

## 5　微分の一般公式

1. $([f(x)]^n)' = n[f(x)]^{n-1}\, f'(x)$
2. $(e^{f[x]})' = e^{[}f(x)]f'(x)$
3. $(\ln[f(x)])' = \dfrac{f'(x)}{f(x)}$
4. $(\sin[f(x)])' = \cos[f(x)]\, f'(x)$
5. $(\cos[f(x)])' = -\sin[f(x)]\, f'(x)$
6. $(\tan[f(x)])' = \sec^2[f(x)]\, f'(x)$
7. $(\tan^{-1}[f(x)])' = \dfrac{f'(x)}{1+[f(x)]^2}$

## 6　関数の増加／減少

曲線を表す関数式が適当な区間のなかで微分できることを、一般にその区間内で˝滑らか (smooth)”という。ある点で折れ曲がったり、ジャンプをして、左右の近づけ方に“飛び離れ（ギャップ)”がいる、ジグザグしているならば、それらの点、区間では微分可能ではない。もし滑らかに変化しているならば、関数の増減が微分により調べられる。

1. $x = c$ で $f'(c) = 0$ ならば、極値か変曲点となる。2 階微分の符号を調べて、最大最小に分かれる。もし 2 階微分がゼロならば、変曲点であり、さらに高階の微係数を調べていく。
2. $I = \{x \,|\, a < x < b\}$ で $x \in I,\ f'(x) > 0$ ならば、接線の傾き（微分係数）は増加状態（右上がり）
3. $x \in I$ で $f'(x) < 0$ ならば、接線の傾き（微分係数）は増加状態（右上がり）
4. $I \in$ で $f'(x) = 0$ ならば、接線の傾きはゼロ、平たんで、関数の値は定数で変化なし。
5. 2 階微分 $x \in I,\ f''(x) > 0$ ならば、その区間では、“接線の傾きが増加状態”であり、これを凸（とつ, convex）という。
6. 逆に $x \in I,\ f''(x) < 0$ ならば、その区間では、“接線の傾きが減少状態”であり、これをおう（凹, concave）, 上向きに凸（上に凸）ともいう。