第6章

偏微分法

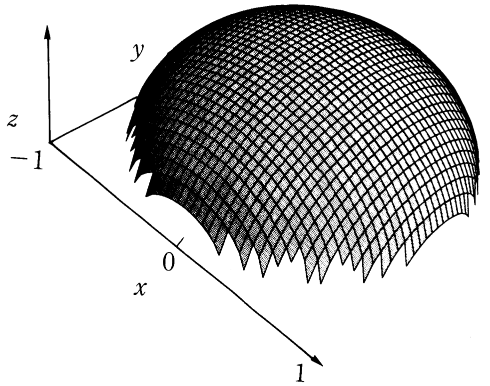
前章までで，1変数関数の微分と積分について学習したが，1変数関数 $y = f(x)$ では表せる曲面は限られたものだけになる（回転面など）．空間の曲面などは，2変数以上の関数が必要となる．そこで，この章では2変数関数の微分について述べる．同様に n 変数関数の微分についても述べなければならないが，本書では，扱わないことにする．

1　2変数関数の極限

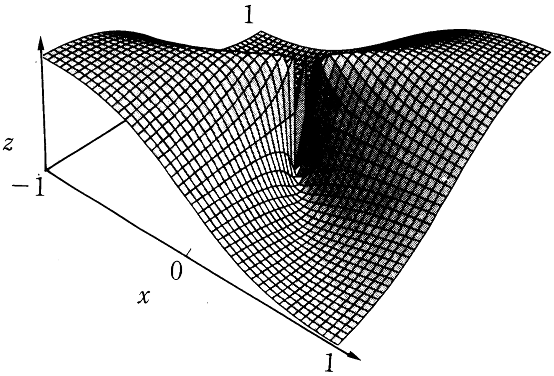
$\mathbf{R}$ を実数全体の集合とし,M を平面 $\mathbf{R}^2 = \{(x, y); x, y \in \mathbf{R}\}$ の部分集合とする．M の各元 (x, y) に対して値 z が一意的に決まるとき，z は M 上で定義された**2変数関数**といい，$\boldsymbol{z = f(x, y)}$ で表す．M を $z = f(x, y)$ の **定義域** という．1変数関数の場合と同様に，具体的な形で与えられた関数については，その形が意味をもつ範囲を定義域とするのがふつうである．

例 1.1. (1) $z = x + y + 1$　　(定義域は平面全体)

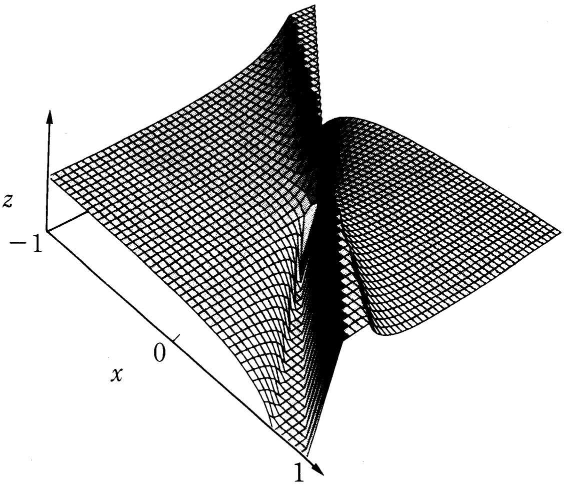
(2) $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$　　(定義域は単位円の周と内部)



(3) $z = \dfrac{xy}{x^2+y^2}$　　（定義域は平面から $(0,0)$ を除いた部分）



(4) $z = \dfrac{x-y}{x+y}$　　（定義域は平面から直線 $x+y=0$ を除いた部分）



1変数関数 $y = f(x)$ のグラフは平面上の曲線であるが，2変数関数 $z = f(x,y)$ のグラフは空間 $\mathbf{R}^3 = \{(x,y,z); x,y,z \in \mathbf{R}\}$ の中の曲面になる．例えば例 1.1 (1) のグラフは空間の中の平面であり，(2) のグラフは単位球面の上半分である．

点 $P(a,b)$ と正の数 ε に対して，平面の部分集合

$$U_\varepsilon(P) = \{(x,y)\ ;\ \sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2} < \varepsilon\}$$

を P の **ε-近傍** とよぶ．$U_\varepsilon(P)$ は P を中心とする半径 ε の円の内部である．ある正の数 ε に対する ε-近傍を以後単に**近傍**とよぶことにする．

関数 $z = f(x,y)$ は点 $P(a,b)$ のある近傍で定義されているとする．点 (x,y) が点 (a,b) に限りなく近づくとき $(x,y) \to (a,b)$ と書き，そのとき $f(x,y)$ が一定値 l に限りなく近づけば，$f(x,y)$ の点 P における極限値は l であるといい

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = l \quad \text{または} \quad f(x,y) \to l \quad ((x,y) \to (a,b))$$

と書く．

(x,y) を (a,b) に限りなく近づけるとき，近づける方向によって $f(x,y)$ の近づく値が異なる場合は，極限値は存在しないと考える．

定理 1.1. $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y)=l,\ \lim_{(x,y)\to(a,b)} g(x,y)=m$ のとき，

(1) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(a,b)}(f(x,y)+g(x,y))=l+m$

(2) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y)g(x,y)=lm$，特に $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(a,b)} cf(x,y)=cl$ （c は定数）

(3) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(a,b)}\frac{f(x,y)}{g(x,y)}=\frac{l}{m}$ （ただし，$m\neq 0$）

例 1.2. 次の極限値を求めよ．

(1) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(1,-1)}\frac{x^2-y^2}{x+y}$　(2) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$　(3) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{xy}{x^2+y^2}$

解 (1) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(1,-1)}\frac{x^2-y^2}{x+y}=\lim_{(x,y)\to(1,-1)}\frac{(x+y)(x-y)}{x+y}=\lim_{(x,y)\to(1,-1)}(x-y)=2$

(2) $f(x,y)=\dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$ とおく．(x,y) を極座標 $x=r\cos\theta, y=r\sin\theta$ で表す．このとき

$$|f(x,y)|=r|\sin\theta\cos\theta|\leqq r$$

であり，$(x,y)\to(0,0)$ のとき $r=\sqrt{x^2+y^2}\to 0$ であるから，$\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=0$

(3) $f(x,y)=\dfrac{xy}{x^2+y^2}$ とおく．点 (x,y) が直線 $y=mx$ 上にあるとき

$$f(x,y)=f(x,mx)=\frac{mx^2}{x^2+m^2x^2}=\frac{m}{1+m^2}.$$

よって (x,y) が直線 $y=mx$ に沿って $(0,0)$ に近づくとき，m の値により異なる値に近づくから $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ は存在しない．□

$f(x,y)$ は点 (a,b) のある近傍で定義されていて

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y)=f(a,b)$$

が成り立つとき，$f(x,y)$ は点 (a,b) で連続であるという．集合 M の各点で連続であるとき，M で連続であるという．

1変数関数の場合と同様に，2変数の連続関数の定数倍，和，積，商，合成関数も連続関数になる．また，次の定理も同様に成り立つ．

定理 1.2. 関数 $f(x,y)$ が点 (a,b) で連続で，$f(a,b) \neq 0$ ならば，(a,b) のある近傍内で $f(x,y)$ は常に $f(a,b)$ と同符号である．

集合 M を平面の部分集合とする．M が原点を中心とした十分大きな円に含まれるとき，M は有界であるという．また M の任意の点 (x,y) に対し，(x,y) のある近傍が M に含まれるとき，M を**開集合**とよび，開集合の補集合を**閉集合**とよぶ．

定理 1.3. 有界な閉集合 M で定義された連続関数 $f(x,y)$ は M で最大値と最小値をもつ．

問 1.1.　次の極限値を求めよ．

(1) $\displaystyle \lim_{(x,y)\to(2,3)} \frac{x+y+1}{x^2-y^2}$　　(2) $\displaystyle \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2+y^2}{xy+(x-y)^2}$

(3) $\displaystyle \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y}{x^4+y^2}$　　(4) $\displaystyle \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy^2}{x^2+y^2+y^4}$

問 1.2. $f(x,y) = \dfrac{x^2y}{x^2+y^2}$, $(x,y) \neq (0,0)$, $f(0,0)=0$ は点 $(0,0)$ で連続であることを示せ．

2　偏導関数

2 変数関数 $z=f(x,y)$ の変数 y を固定して定数と考えたとき，$f(x,y)$ は x についての 1 変数関数と考えられる．このように考えたとき，$f(x,y)$ が x について微分可能，すなわち極限

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h,y)-f(x,y)}{h}$$

が存在するとき，$z=f(x,y)$ は点 (x,y) において x について**偏微分可能**といい，上の極限を点 (x,y) における x についての**偏微分係数**という．また，上の極限を x と y の関数とみるときには，x についての**偏導関数**とよび，

$$\frac{\partial z}{\partial x}, \quad \frac{\partial}{\partial x}f(x,y), \quad f_x(x,y), \quad f_x, \quad z_x$$

などで表す．

y についても同様に，偏微分可能，偏微分係数，偏導関数（$\dfrac{\partial z}{\partial y}$, $\dfrac{\partial}{\partial y}f(x.y)$, $f_y(x,y)$, f_y, z_y などで表す）を考える．

x（または y）について偏導関数を求めることを x（または y）で**偏微分**するという．

偏導関数は本質的には 1 変数関数の導関数であるから，x, y の一方を定数と考えて他方の変数について 1 変数関数の微分の公式を適用すればよい．

例 2.1. 次の関数を x および y について偏微分せよ.

(1) $z = x^4y + xy^2$　　(2) $z = \tan^{-1}\dfrac{x}{y}$

解 (1) $\dfrac{\partial z}{\partial x} = \dfrac{\partial}{\partial x}(x^4y) + \dfrac{\partial}{\partial x}(xy^2) = 4x^3y + y^2$,　同様に $\dfrac{\partial z}{\partial y} = x^4 + 2xy$

(2) $$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{1+\left(\frac{x}{y}\right)^2}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{y}\right) = \frac{1}{1+\left(\frac{x}{y}\right)^2}\frac{1}{y} = \frac{y}{x^2+y^2} ,$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{1+\left(\frac{x}{y}\right)^2}\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{x}{y}\right) = \frac{1}{1+\left(\frac{x}{y}\right)^2}\left(-\frac{x}{y^2}\right) = -\frac{x}{x^2+y^2} .\ \square$$

問 2.1. 次の関数を x および y について偏微分せよ.

(1) $z = 3x^2y + 5x^2y^3$　　(2) $z = e^{xy}$　　(3) $z = \sqrt{x^2+y^2}$

(4) $z = \sin^{-1}\dfrac{x}{y}$　　(5) $z = \log_y x$　　(6) $z = x^y$

1 変数関数では微分可能であれば連続であったが, 2 変数関数では x, y について偏微分可能であっても連続とは限らない.

問 2.2. $f(x,y) = \dfrac{xy}{x^2+y^2}$, $(x,y) \neq (0,0)$, $f(0,0) = 0$ は点 $(0,0)$ において x, y について偏微分可能であるが, 点 $(0,0)$ で連続でないことを示せ.

関数 $z = f(x,y)$ の偏導関数 $f_x(x,y), f_y(x,y)$ がさらに x, y について偏微分可能なとき, その偏導関数を z の**第 2 次偏導関数**といい, 次のように書く.

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = f_{xx}(x,y) = z_{xx},\quad \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = f_{yx}(x,y) = z_{yx}$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = f_{xy}(x,y) = z_{xy},\quad \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = f_{yy}(x,y) = z_{yy}$$

第 n 次偏導関数も同様に定義される.

例 2.2. $z = x^3 + 3x^2y + 2y^3$ の第 2 次偏導関数を求めよ.

解 $z_x = 3x^2 + 6xy,\ z_y = 3x^2 + 6y^2$ をさらに偏微分して,
$z_{xx} = 6x + 6y,\ z_{xy} = 6x,\ z_{yx} = 6x,\ z_{yy} = 12y$. $\square$

問 2.3. 次の関数の第2次偏導関数を求めよ．

(1) $\sin 3x \cos 4y$　　(2) $\log(x^2+y^4)$　　(3) e^{x^2+2y}

(4) $e^{-x}\sin y$　　(5) $\sin\dfrac{y}{x}$　　(6) $\sin^{-1}\dfrac{y}{x}$

問 2.4. $z=\dfrac{x}{x^2+y^2}$ のとき $z_{xx}+z_{yy}=0$ を示せ．

関数 $f(x,y)$ に対して，一般には $f_{xy}\neq f_{yx}$ であるが，次の結果が知られている．

定理 2.1. f_{xy}, f_{yx} がともに連続ならば $f_{xy}=f_{yx}$.

証明 点 (a,b) において

$$U=f(a+h,b+k)-f(a+h,b)-f(a,b+k)+f(a,b)$$

$$\varphi(x)=f(x,b+k)-f(x,b)$$

とおけば

$$U=\varphi(a+h)-\varphi(a) \tag{1}$$

$\varphi(x)$ に平均値の定理を適用すると

$$U=\varphi(a+h)-\varphi(a)=h\varphi'(c) \tag{2}$$

となるような c が a と $a+h$ の間に存在する．

さらに $\varphi'(c)=f_x(c,b+k)-f_x(c,b)$ であるから f_x に平均値の定理を適用すると

$$\varphi'(c)=f_x(c,b+k)-f_x(c,b)=kf_{xy}(c,d) \tag{3}$$

となるような d が b と $b+k$ の間に存在する．

(1),(2),(3) より

$$f_{xy}(c,d)=\frac{U}{hk} \tag{4}$$

(4) の式で $(h,k)\to(0,0)$ とすれば f_{xy} の連続性より

$$f_{xy}(a,b)=\lim_{(h,k)\to(0,0)}\frac{U}{hk}$$

x と y を交換して同様に考えると

$$f_{yx}(a,b)=\lim_{(h,k)\to(0,0)}\frac{U}{hk}.\ \square$$

3 全微分

２変数関数の偏微分可能性は, 一方の変数を定数と考えることにより本質的には１変数関数の微分可能性にすぎなかった. ここでは $z = f(x, y)$ の２変数関数としての微分可能性（全微分可能性）を考える.

１変数関数 $y = f(x)$ が $x = a$ で微分可能であるとは, $y = f(x)$ で決まる曲線上の点 $(a, f(a))$ で接線が引けることであった. このことより２変数関数 $z = f(x, y)$ の微分可能性を, $z = f(x, y)$ で決まる曲面上の点 $(a, b, f(a, b))$ で接平面がつくれることであると定義する.

点 $(a, b, f(a, b))$ を通る平面は

$$z = f(a, b) + \alpha(x - a) + \beta(y - b) \quad (\alpha, \beta\text{は定数})$$

と書け, これが $z = f(x, y)$ で決まる曲面に接している場合, z の値の差

$$g(x, y) = f(x, y) - \{f(a, b) + \alpha(x - a) + \beta(y - b)\}$$

が $\sqrt{(x - a)^2 + (y - b)^2}$ に対して無視できることより

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} \frac{g(x, y)}{\sqrt{(x - a)^2 + (y - b)^2}} = 0$$

を満たす.

これらのことより, 関数 $z = f(x, y)$ が点 (a, b) において**全微分可能**であるとは

$$f(x, y) = f(a, b) + \alpha(x - a) + \beta(y - b) + g(x, y) \qquad (1)$$

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} \frac{g(x, y)}{\sqrt{(x - a)^2 + (y - b)^2}} = 0 \qquad (2)$$

を満たすように定数 α, β が定められることと定義する.

定理 3.1. $f(x, y)$ が点 (a, b) で全微分可能ならば, $f(x, y)$ はこの点で連続であり, かつ x, y について偏微分可能で, $\alpha = f_x(a, b), \beta = f_y(a, b)$ である.

証明 $f(x, y)$ が点 (a, b) で全微分可能ならば, (2) より $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(a,b)} g(x, y) = 0$ であるから (1) より $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x, y) = f(a, b)$ が成立する. これは $f(x, y)$ が (a, b) で連続なことを示す.

次に (1) の式で $x = a + h, y = b$ とすると

$$f(a + h, b) - f(a, b) = \alpha h + g(a + h, b)$$

であり, また (2) の極限において (x, y) を直線 $y = b$ に沿って (a, b) に近づける場合を考えることにより

$$\lim_{h\to 0} \frac{g(a + h, b)}{h} = 0$$

であるから

$$f_x(a,b) = \lim_{h\to 0}\frac{f(a+h,b)-f(a,b)}{h} = \lim_{h\to 0}\left\{\alpha + \frac{g(a+h,b)}{h}\right\} = \alpha$$

が得られる. $\beta = f_y(a,b)$ も同様に得られる. □

定理 3.1 より $z = f(x,y)$ が点 (a,b) で全微分可能なとき, 曲面上の点 $(a,b,f(a,b))$ での接平面は

$$z - f(a,b) = f_x(a,b)(x-a) + f_y(a,b)(y-b)$$

で与えられる. ここで

$$dz = z - f(a,b), \qquad dx = x - a, \qquad dy = y - b$$

とおくと

$$dz = f_x(a,b)dx + f_y(a,b)dy$$

となり, これを $z = f(x,y)$ の点 (a,b) における**全微分**という.

問 3.1. 次の曲面の点 P における接平面の方程式を求めよ.

(1) $z = xy$ $\quad P(1,1,1)$ $\qquad$ (2) $z = x^2 + y^2$ $\quad P(3,4,25)$

(3) $z = \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2}$ $\quad P(a,b,2)$ $\qquad$ (4) $z = \tan^{-1}\dfrac{y}{x}$ $\quad P(1,1,\frac{\pi}{4})$

定理 3.1 より全微分可能であれば偏微分可能であるが, 一般に逆は成立しない. しかし次の結果が知られている.

定理 3.2. $f(x,y)$ が点 (a,b) のある近傍で x,y について偏微分可能であり, f_x, f_y がともに (a,b) で連続ならば, $f(x,y)$ は (a,b) で全微分可能である.

4 合成関数の微分法

定理 4.1. $z = f(x,y)$ が点 (a,b) で全微分可能とする. $x = x(t), y = y(t)$ が $t = c$ で微分可能で $a = x(c), b = y(c)$ ならば, 合成関数 $z = f(x(t),y(t))$ も $t = c$ で微分可能で

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dt}$$

証明 $\varphi(t) = \dfrac{f(x(t),y(t)) - f(a,b)}{t-c}$ とおく. $f(x(t),y(t))$ の $t = c$ での微分係数を求めるには $\lim\limits_{t\to c}\varphi(t)$ を計算すればよい.

$z=f(x,y)$ が点 (a,b) で全微分可能であることより

$$f(x,y)-f(a,b)=f_x(a,b)(x-a)+f_y(a,b)(y-b)+g(x,y) \qquad (1)$$

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} \frac{g(x,y)}{\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}}=0 \qquad (2)$$

を満たしているから, (1) の式より

$$\varphi(t)=\frac{f_x(a,b)(x(t)-a)+f_y(a,b)(y(t)-b)+g(x(t),y(t))}{t-c}.$$

ここで $t\to c$ のとき

$$\frac{x(t)-a}{t-c}=\frac{x(t)-x(c)}{t-c}\to x'(c), \qquad \frac{y(t)-b}{t-c}=\frac{y(t)-y(c)}{t-c}\to y'(c)$$

であり, さらに $t\to c$ のとき $(x,y)\to(a,b)$ であることに注意すれば (2) より

$$\left|\frac{g(x(t),y(t))}{t-c}\right|=\frac{|g(x,y)|}{\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}}\sqrt{\left(\frac{x-a}{t-c}\right)^2+\left(\frac{y-b}{t-c}\right)^2}\to 0$$

であるから

$$\frac{dz}{dt}(c)=f_x(a,b)x'(c)+f_y(a,b)y'(c). \ \square$$

$x=\varphi(u,v), y=\psi(u,v)$ がともに 2 変数 u,v の関数であるとき $z=f(x,y)$ との合成関数 $z=f(\varphi(u,v),\psi(u,v))$ を u または v について偏微分することは, 本質的には 1 変数関数を微分することと同じであるから定理 4.1 より次の定理を得る.

定理 4.2. $z=f(x,y)$ は点 (a,b) で全微分可能とする. $x=\varphi(u,v), y=\psi(u,v)$ が点 (c,d) で偏微分可能で, $a=\varphi(c,d), b=\psi(c,d)$ ならば, 合成関数 $f(\varphi(u,v),\psi(u,v))$ も (c,d) で偏微分可能で

$$\frac{\partial z}{\partial u}=\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u}+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u}, \qquad \frac{\partial z}{\partial v}=\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v}+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v}$$

例 **4.1.** $z=e^{x-2y},\ x=\sin t,\ y=t^3$ のとき $\dfrac{dz}{dt}$ を求めよ.

解 $z_x=e^{x-2y},\ z_y=-2e^{x-2y},\ \dfrac{dx}{dt}=\cos t,\ \dfrac{dy}{dt}=3t^2$ より

$$\frac{dz}{dt}=e^{x-2y}\cos t-2e^{x-2y}3t^2=e^{x-2y}(\cos t-6t^2)\ .\ \square$$

例 4.2. $z = x^2 \log y,\ x = \dfrac{u}{v},\ y = 3u - v$ のとき $\dfrac{\partial z}{\partial u}, \dfrac{\partial z}{\partial v}$ を求めよ.

解 $\dfrac{\partial z}{\partial x} = 2x\log y,\ \dfrac{\partial z}{\partial y} = \dfrac{x^2}{y},\ \dfrac{\partial x}{\partial u} = \dfrac{1}{v},\ \dfrac{\partial x}{\partial v} = -\dfrac{u}{v^2},\ \dfrac{\partial y}{\partial u} = 3,\ \dfrac{\partial y}{\partial v} = -1$ より

$$\frac{\partial z}{\partial u} = \left(\frac{2x}{v}\right)\log y + \frac{3x^2}{y},\quad \frac{\partial z}{\partial v} = -\left(\frac{2xu}{v^2}\right)\log y - \frac{x^2}{y}\ . \square$$

問 4.1. 次の関数 z について $\dfrac{dz}{dt}$ を求めよ.

(1) $z = x^2 - y^2,\quad x = \cos t,\ y = \sin t$

(2) $z = e^{x-y},\quad x = t,\ y = \dfrac{1}{t}$

(3) $z = \sin^{-1} xy,\quad x = 1 - t,\ y = 1 + t$

問 4.2. 次の関数 z について $\dfrac{\partial z}{\partial u}, \dfrac{\partial z}{\partial v}$ を求めよ.

(1) $z = 2x^2 + xy - y^2,\quad x = 2u - v,\ y = u + v$

(2) $z = x^2 + y^2,\quad x = u^2 - v^2,\ y = 2uv$

(3) $z = e^{xy},\quad x = \log\sqrt{u^2 + v^2},\ y = \tan^{-1}\dfrac{v}{u}$

例 4.3. $z = f(x, y),\ x = r\cos\theta,\ y = r\sin\theta$ のとき次を示せ.

(1) $\left(\dfrac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial z}{\partial y}\right)^2 = \left(\dfrac{\partial z}{\partial r}\right)^2 + \dfrac{1}{r^2}\left(\dfrac{\partial z}{\partial \theta}\right)^2$

(2) $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \dfrac{\partial^2 z}{\partial r^2} + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial z}{\partial r} + \dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial^2 z}{\partial \theta^2}$

解 (1) $\dfrac{\partial z}{\partial r} = \dfrac{\partial z}{\partial x}\dfrac{\partial x}{\partial r} + \dfrac{\partial z}{\partial y}\dfrac{\partial y}{\partial r} = \dfrac{\partial z}{\partial x}\cos\theta + \dfrac{\partial z}{\partial y}\sin\theta$

$$\frac{\partial z}{\partial \theta} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \theta} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \theta} = \frac{\partial z}{\partial x}(-r\sin\theta) + \frac{\partial z}{\partial y}r\cos\theta$$

よって,

$$\begin{aligned}\left(\frac{\partial z}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial z}{\partial \theta}\right)^2 &= \left(\frac{\partial z}{\partial x}\cos\theta + \frac{\partial z}{\partial y}\sin\theta\right)^2 + \left(-\frac{\partial z}{\partial x}\sin\theta + \frac{\partial z}{\partial y}\cos\theta\right)^2 \\ &= \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2.\end{aligned}$$

(2) 簡単の為，$f(x,y)$ は定理 2.1 の条件を満たすとして証明する．

$\dfrac{\partial z}{\partial r} = \dfrac{\partial z}{\partial x}\cos\theta + \dfrac{\partial z}{\partial y}\sin\theta$ より

$$\frac{\partial^2 z}{\partial r^2} = \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}\frac{\partial y}{\partial r}\right)\cos\theta + \left(\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\frac{\partial y}{\partial r} + \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\frac{\partial x}{\partial r}\right)\sin\theta$$

$$= \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\cos^2\theta + 2\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\cos\theta\sin\theta + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\sin^2\theta$$

$\dfrac{\partial z}{\partial \theta} = \dfrac{\partial z}{\partial x}(-r\sin\theta) + \dfrac{\partial z}{\partial y} r\cos\theta$ より

$$\frac{\partial^2 z}{\partial \theta^2} = \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\frac{\partial x}{\partial \theta} + \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}\frac{\partial y}{\partial \theta}\right)(-r\sin\theta) + \frac{\partial z}{\partial x}(-r\cos\theta)$$

$$+ \left(\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\frac{\partial y}{\partial \theta} + \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\frac{\partial x}{\partial \theta}\right)(r\cos\theta) + \frac{\partial z}{\partial y}(-r\sin\theta)$$

$$= r^2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\sin^2\theta - 2r^2\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\cos\theta\sin\theta + r^2\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\cos^2\theta - r\frac{\partial z}{\partial x}\cos\theta - r\frac{\partial z}{\partial y}\sin\theta$$

よって，

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 z}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial z}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 z}{\partial \theta^2}. \quad \square$$

問 4.3. $z = f(x,y)$，$x = u + v$，$y = u - v$ のとき $\dfrac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} = \dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} - \dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ を示せ．

問 4.4. $z = f(x,y)$，$x = u\cos\alpha - v\sin\alpha$，$y = u\sin\alpha + v\cos\alpha$ （α は定数）のとき次を示せ．

(1) $\left(\dfrac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial z}{\partial y}\right)^2 = \left(\dfrac{\partial z}{\partial u}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial z}{\partial v}\right)^2$

(2) $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \dfrac{\partial^2 z}{\partial u^2} + \dfrac{\partial^2 z}{\partial v^2}$

5 テイラーの定理

第 2 章におけるテイラーの定理は 2 次元以上の場合に拡張できる．ここでは 2 次元の場合について考える．

関数 $f(x,y)$ が x について**連続偏微分可能**とは f_x が存在し連続であること，単に**連続偏微分可能**といえば，すべての変数について（この場合 x，y について）連続偏微分可能なことをいう．定理 3.2 より，連続偏微分可能な関数は全微分可能である．さらに f_{xx}，f_{xy}，f_{yx}，f_{yy} が存在して連続ならば，f は 2 回連続微分可能であるという．同様にして n 回連続微分可能性を定義する．

いま $z=f(x,y)$ が $(x,y)=(a,b)$ を含む開集合で定義された n 回連続偏微分可能な関数とするとき，$f(a+h,b+k)$ を h, k について展開することを考える．以下では簡単のために，$h\dfrac{\partial f}{\partial x}+k\dfrac{\partial f}{\partial y}$ を $\left(h\dfrac{\partial}{\partial x}+k\dfrac{\partial}{\partial y}\right)f$ と書くことにする．また，

$$\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)^{n-1}f,\quad n\geqq 2$$

が定義されたとして

$$\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)^{n}f=\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)\left\{\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)^{n-1}f\right\}$$

と定義する．例えば，$\left(h\dfrac{\partial}{\partial x}+k\dfrac{\partial}{\partial y}\right)^{2}f$ は

$$\begin{aligned}\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)f &= \left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)\left(h\frac{\partial f}{\partial x}+k\frac{\partial f}{\partial y}\right)\\ &= h\frac{\partial}{\partial x}\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)f+k\frac{\partial}{\partial y}\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)f\\ &= h^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+2hk\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}+k^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\end{aligned}$$

となる．

問 5.1. $\left(h\dfrac{\partial}{\partial x}+k\dfrac{\partial}{\partial y}\right)^{n}z=\displaystyle\sum_{r=0}^{n}{}_nC_r h^{n-r}k^r\frac{\partial^n z}{\partial x^{n-r}\partial y^r}$ を示せ．

以下において，$\left[\left(h\dfrac{\partial}{\partial x}+k\dfrac{\partial}{\partial y}\right)^{n}f\right]_{(x,y)=(a,b)}$ を $\left(h\dfrac{\partial}{\partial x}+k\dfrac{\partial}{\partial y}\right)^{n}f(a,b)$ と略記する．

定理 5.1 (テイラーの定理)． $z=f(x,y)$ が点 (a,b) を含む開集合で定義された n 回連続偏微分可能な関数とするとき，$|h|$, $|k|$ が十分小さい h, k に対して次の式を満足する θ が存在する．

$$f(a+h,b+k)=f(a,b)+\sum_{r=1}^{n-1}\frac{1}{r!}\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)^{r}f(a,b)+R_n$$

$$R_n=\frac{1}{n!}\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)^{n}f(a+\theta h,b+\theta k),\quad 0<\theta<1$$

証明 $h,\ k$ が十分小さければ, 2 点 (a,b) と $(a+h,b+k)$ を結ぶ線分上の点 $(a+th,b+tk)$, $(0 \leqq t \leqq 1)$ で, 1 変数 t の関数

$$z = f(x,y) = f(a+ht,b+kt) = \phi(t)$$

が考えられる. $\dfrac{d}{dt}(a+th) = h,\ \dfrac{d}{dt}(b+tk) = k$ であるから,

$$\begin{aligned}\phi'(t) &= f_x(a+th,y+bk)h + f_y(a+th,b+tk)k \\ &= \left(h\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial y}\right) f(a+th,b+tk)\end{aligned}$$

となる. さらに t で微分を繰り返すと,

$$\phi^{(m)}(t) = \left(h\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial y}\right)^m f(a+th,b+tk), \quad m = 2,\cdots,n$$

となることがわかる. 1 変数におけるマクローリンの定理により

$$\phi(t) = \phi(0) + \sum_{r=1}^{n-1} \frac{t^r}{r!}\phi^{(r)}(0) + \frac{t^n}{n!}\phi^{(n)}(\theta t), \quad 0 < \theta < 1$$

であるから, これを代入して $t=1$ とおけばよい. □

最後の項 R_n を 1 変数のときと同様**ラグランジュの剰余項**という

定理 5.1 において $(a,b) = (0,0)$, $h = x$, $k = y$ とおくと, 次の系を得る.

系 5.2 (マクローリンの定理) . $f(x,y)$ が原点 $(0,0)$ を含む開集合で定義された n 回連続偏微分可能な関数とするとき, (x,y) が十分原点に近ければ次の式を満足する θ が存在する.

$$f(x,y) = f(0,0) + \sum_{r=1}^{n-1} \frac{1}{r!}\left(x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y}\right)^r f(0,0) + R_n$$

$$R_n = \frac{1}{n!}\left(x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y}\right)^n f(\theta x,\theta y), \quad 0 < \theta < 1$$

なお, 系 5.2 において $\left(x\dfrac{\partial}{\partial x} + y\dfrac{\partial}{\partial y}\right)^r f(0,0)$ は定理 5.1 と同様に計算する.

例 5.1. 関数 $f(x,y) = x^2 - 2xy - 3y^2 + 8y - 3$ を点 $(1,1)$ でテイラーの定理によって展開せよ.

解 $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2x - 2y,\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = -2x - 6y + 8$ より

$$\frac{\partial f}{\partial x}(1,1) = \frac{\partial f}{\partial y}(1,1) = 0$$

となる. また, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y)=2,\quad \dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x,y)=-2,\quad \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y)=-6$ となり, 第3次以上の偏導関数は 0 になる. よって, テイラー展開の式は

$$\begin{aligned} f(x,y)= \;& f(1,1)+\frac{\partial f}{\partial x}(1,1)(x-1)+\frac{\partial f}{\partial y}(1,1)(y-1) \\ &+\frac{1}{2}\left\{\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(1,1)(x-1)^2+2\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(1,1)(x-1)(y-1)+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(1,1)(y-1)^2\right\}+0 \\ =\;& 1+(x-1)^2-2(x-1)(y-1)-3(y-1)^2. \end{aligned}$$

例 5.2. $f(x,y)=e^y\log(1+x)$ をマクローリンの定理によって3次の項まで求めよ.

解 $\dfrac{\partial^r f}{\partial x^k\partial y^{r-k}}=\dfrac{\partial^k f}{\partial x^k}=e^y\cdot\{\log(1+x)\}^{(k)}$ に注意して

$$\begin{aligned} & f(0,0)=\frac{\partial^r f}{\partial y^r}(0,0)=0,\quad \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)=\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(0,0)=\frac{\partial^3 f}{\partial x\partial y^2}(0,0)=1, \\ & \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0)=\frac{\partial^3 f}{\partial x^2\partial y}(0,0)=-1,\quad \frac{\partial^3 f}{\partial x^3}(0,0)=2 \end{aligned}$$

より,

$$\begin{aligned} f(0,0) \;&+\; \sum_{r=1}^{3}\frac{1}{r!}\left(x\frac{\partial}{\partial x}+y\frac{\partial}{\partial y}\right)^r f(0,0) \\ &= 0+1x+0y+\frac{1}{2}\left(-1x^2+2\cdot 1xy+0y^2\right) \\ &\quad +\frac{1}{6}\left(2x^3+3\cdot(-1)x^2y+3\cdot 1xy^2+0y^3\right) \\ &= x-\frac{1}{2}x^2+xy+\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2y+\frac{1}{2}xy^2 \end{aligned}$$

問 5.2. 例 5.2 において θ を用い, 4次のラグランジュの剰余項 R_4 を求めよ.

例 5.3. $f(x,y)=e^{x-y}$ をマクローリンの定理によって展開せよ.

解 $\dfrac{\partial^r f}{\partial x^{r-k}\partial y^k}(0,0)=(-1)^k$ より

$$1+(x-y)+\frac{1}{2}(x-y)^2+\cdots+\frac{1}{(n-1)!}(x-y)^{n-1}+\frac{1}{n!}(x-y)^n e^{\theta(x-y)}$$

問 5.3. 関数 $\sqrt{2-x+y}$ をマクローリンの定理を $n=3$ に適用して展開せよ.

問 5.4. $f(x,y)$ の n 次の偏導関数がすべて恒等的に 0 であるならば, $f(x,y)$ は x, y の多項式でその次数は高くても $n-1$ であることを証明せよ.

6 陰関数

x, y の関係式 $f(x,y)=0$ において，x, y は独立に任意の値をとることはできない．x の値に対して，$f(x,y)=0$ が成立するような y の値を対応させることができれば，その対応によって１つの関数が定まる．これを $f(x,y)=0$ によって定まる**陰関数**という．

定理 6.1 (陰関数定理)． $f(x,y)$ を (a,b) を含む開集合で定義された連続偏微分可能な関数とする．点 (a,b) において $f(a,b)=0$ かつ $f_y(a,b)\neq 0$ ならば，$x=a$ を含む適当な開区間で次の性質をもつ関数 $y=\phi(x)$ がただ１つ定まる．
(1) $b=\phi(a)$
(2) $f(x,\phi(x))=0$
(3) $\phi(x)$ は C^1 級（１回連続微分可能）で，$\dfrac{dy}{dx}=\phi'(x)=-\dfrac{f_x(x,y)}{f_y(x,y)}$

$f_y(a,b)=0$ であっても $f_x(a,b)\neq 0$ であれば，$f(x,y)=0$ は $y=b$ を含む開区間上で $x=\psi(y)$ の形で表され，$\dfrac{dx}{dy}=-\dfrac{f_y}{f_x}$ となる．曲線 $f(x,y)=0$ 上の点で $f_x=f_y=0$ となる点を**特異点**という．特異点ではない曲線 $f(x,y)=0$ 上の点のまわりでは，曲線は $y=\phi(x)$ か $x=\psi(y)$ のかたちに１とおりに表され，接線が１本だけ引ける．

陰関数を具体的に表現することは一般的にはできないが，例 6.1 のように簡単に見つかる場合もある．

例 6.1. $f(x,y)=4x^2+y^2-8x-4y+3=0$ とする．このとき，点 $(0,1)$ における陰関数 $\phi(x)$ を求めよ．

解 $f(x,y)=4(x-1)^2+(y-2)^2-5=0$ より，

$$y-2=\pm\sqrt{5-4(x-1)^2}$$

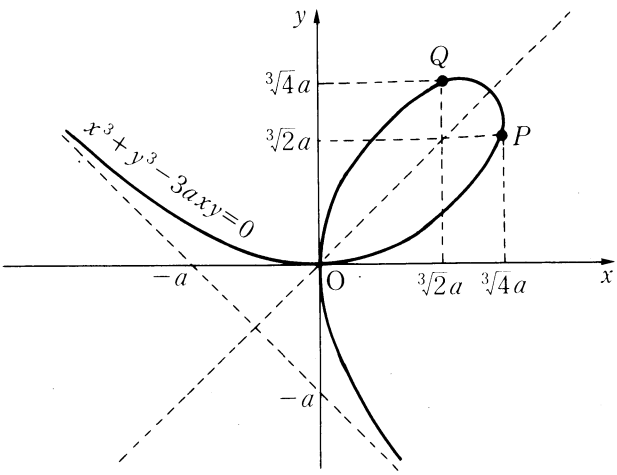
である．よって点 $(0,1)$ における陰関数は

$$\phi(x)=2-\sqrt{5-4(x-1)^2}\quad\left(1-\frac{\sqrt{5}}{2}<x<1+\frac{\sqrt{5}}{2}\right)$$

となる．

例 6.2. $f(x,y)=x^3+y^3-3axy=0\ (a>0)$ によって定まる陰関数について，$\dfrac{dy}{dx}$ および $\dfrac{dx}{dy}$ を求めよ（この曲線をデカルトの葉状曲線という）．

解　$f_x(x,y)=3x^2-3ay$,　$f_y(x,y)=3y^2-3ax$ であるから，$f(0,0)=f_x(0,0)=f_y(0,0)=0$ となる．よって，原点 $(0,0)$ は特異点となり，曲線は原点において図のように自分自身と交わる．また，曲線上で $f_y(x,y)=0$ となる点 $P\left(\sqrt[3]{4}a, \sqrt[3]{2}a\right)$ では y は x の関数として表すことはできない（このとき $\dfrac{dx}{dy}=0$）．同様に $f_x(x,y)=0$ となる点 $Q\left(\sqrt[3]{2}a, \sqrt[3]{4}a\right)$ では x は y の関数として表すことはできない（このとき $\dfrac{dy}{dx}=0$）．これ以外の曲線上の点で $\dfrac{dy}{dx}$ および $\dfrac{dx}{dy}$ は次のように求まる．



$$\frac{dy}{dx}=-\frac{x^2-ay}{y^2-ax},\qquad \frac{dx}{dy}=-\frac{y^2-ax}{x^2-ay}$$

問 6.1. $x^3+x^2-y^2=0$ より定まる陰関数について，$\dfrac{dy}{dx}$ および $\dfrac{dx}{dy}$ を求めよ．

例 6.3. $f(x,y)$ が 2 回連続偏微分可能であるとき，$f(x,y)=0$ で定められる関数 $y=\phi(x)$ の第 2 次導関数を求めよ．

解

$$\begin{aligned}\frac{d^2y}{dx^2}&=\frac{d}{dx}\left(-\frac{f_x}{f_y}\right)=-\frac{\frac{d}{dx}(f_x)\cdot f_y-f_x\cdot\frac{d}{dx}(f_y)}{f_y^2}\\&=-\frac{(f_{xx}+f_{xy}y')f_y-f_x(f_{xy}+f_{yy}y')}{f_y^2}\\&=-\frac{f_{xx}f_y^2-2f_{xy}f_xf_y+f_{yy}f_x^2}{f_y^3}\end{aligned}$$

問 6.2. $x^2+3xy+y^2-1=0$ に対して，$\dfrac{dy}{dx}$ および $\dfrac{d^2y}{dx^2}$ を求めよ．

定理 6.1 は, 高次元の場合へ拡張できる．例えば 3 次元の場合は次のように拡張される．

定理 6.2. $f(x,y,z)$ を 3 次元空間上の点 (a,b,c) を含む開集合で定義された連続偏微分可能な関数とする．点 (a,b,c) において $f=0$ かつ $f_z\neq 0$ ならば，xy-平面上 (a,b) を含む適当な開集合で定義された，次の性質をもつ関数 $z=\phi(x,y)$ がただ 1 つ定まる．
(1) $c=\phi(a,b)$
(2) $f(x,y,\phi(x,y))=0$
(3) $z=\phi(x,y)$ は連続偏微分可能で $\phi_x=-\dfrac{f_x}{f_z}$,　$\phi_y=-\dfrac{f_y}{f_z}$

定理 6.3. 3次元空間上の点 (a,b,c) を含む開集合で定義された2つの関数 $f(x,y,z)$ および $g(x,y,z)$ が連続偏微分可能とする．点 (a,b,c) において

$$f=0,\quad g=0,\quad J=\frac{\partial(f,g)}{\partial(y,z)}=\begin{vmatrix}\dfrac{\partial f}{\partial y} & \dfrac{\partial f}{\partial z}\\ \dfrac{\partial g}{\partial y} & \dfrac{\partial g}{\partial z}\end{vmatrix}\neq 0$$

であるとき，x-軸上 $x=a$ を含む適当な開区間で定義された，次の性質をもつ関数 $y=\phi_1(x)$, $z=\phi_2(x)$ がただ1組定まる．
(1) $b=\phi_1(a)$, $c=\phi_2(a)$
(2) $f(x,\phi_1(x),\phi_2(x))=0$, $g(x,\phi_1(x),\phi_2(x))=0$
(3) $y=\phi_1(x)$, $z=\phi_2(x)$ は連続微分可能である．
ここで J は**ヤコビアン**とよばれる．

$\phi_1'(x)$, $\phi_2'(x)$ を求めるには（2）の2つの式をそれぞれ x で微分して

$$\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{d\phi_1}{dx}+\frac{\partial f}{\partial z}\frac{d\phi_2}{dx}=0,\quad \frac{\partial g}{\partial x}+\frac{\partial g}{\partial y}\frac{d\phi_1}{dx}+\frac{\partial g}{\partial z}\frac{d\phi_2}{dx}=0$$

から求めれば次のようになる．その際，条件 $J\neq 0$ は，この2つの連立方程式から $\phi_1'(x)$ および $\phi_2'(x)$ がただ1とおりに定まるための条件である．

$$\phi_1'(x)=-\frac{\partial(f,g)}{\partial(x,z)}\Big/J,\quad \phi_2'(x)=-\frac{\partial(f,g)}{\partial(y,x)}\Big/J$$

問 6.3. $a(x-l)^2+b(y-m)^2+c(z-n)^2-d=0$ のとき，$\dfrac{\partial z}{\partial x}$, $\dfrac{\partial z}{\partial y}$, $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}$, $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$ および $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ を求めよ．

問 6.4. $x^2+y^2+z^2-1=0$, $lx+my+nz-1=0$ のとき，$\dfrac{dy}{dx}$ および $\dfrac{dz}{dx}$ を求めよ．

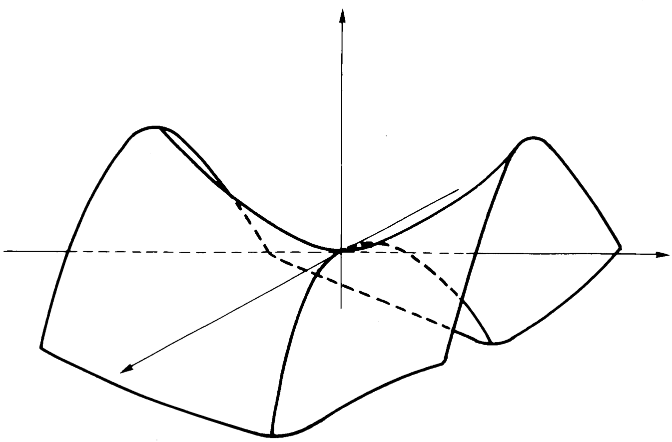
7　極大・極小

関数 $z=f(x,y)$ において，点 (a,b) の近くの任意の点 (x,y) $(\neq(a,b))$ に対し $f(x,y)<f(a,b)$ $(f(x,y)>f(a,b))$ が成り立つならば，$f(x,y)$ は点 (a,b) で **極大**（**極小**）であるといい，$f(a,b)$ を **極大値**（**極小値**）という．極大値と極小値をあわせて **極値** という．

関数 $f(x,y)$ が点 (a,b) で極値をとるための必要条件は $f_x(a,b)=0, f_y(a,b)=0$ である．また $f(x,y)$ が点 (a,b) の近くで全微分可能であれば，この条件は $df(a,b)=0$ と書ける．

例 7.1. $f(x,y)=x^2+y^2$ において，$f_x(a,b)=2a=0, f_y(a,b)=2b=0$ から $a=b=0$. $f(0,0)=0$ かつ $(0,0)$ 以外の点 (x,y) では $f(x,y)>0$ より関数 $f(x,y)$ は点 $(0,0)$ で極小で，極小値 0 をとる．

例 7.2. $f(x,y)=-x^2+y^2$ は $f_x(0,0)=f_y(0,0)=0$ であるが，下図より $(0,0)$ では極値をもたない．



$f(x,y)=-x^2+y^2$ のグラフ

定理 7.1. 関数 $f(x,y)$ が点 (a,b) の近くで２回連続偏微分可能で，$f_x(a,b)=f_y(a,b)=0$ とする．$\Delta=\{f_{xy}(a,b)\}^2-f_{xx}(a,b)f_{yy}(a,b)$ とおいたとき，

(1) $\Delta<0$ で $f_{xx}(a,b)<0$ ならば $f(x,y)$ は点 (a,b) で極大

(2) $\Delta<0$ で $f_{xx}(a,b)>0$ ならば $f(x,y)$ は点 (a,b) で極小

(3) $\Delta>0$ ならば $f(x,y)$ は点 (a,b) で極値をとらない

(4) $\Delta=0$ ならば，極値をとるともとらないとも判定できない．

証明 テイラーの定理において $f_x(a,b)=f_y(a,b)=0$ とおくと

$$f(a+h,b+k)-f(a,b)=\frac{1}{2}\{h^2f_{xx}(a+\theta h,b+\theta k)+2hkf_{xy}(a+\theta h,b+\theta k)+k^2f_{yy}(a+\theta h,b+\theta k)\}.$$

ここで

$$A=f_{xx}(a,b),B=f_{xy}(a,b),C=f_{yy}(a,b),$$

さらに

$$f_{xx}(a+\theta h,b+\theta k)=A+\varepsilon_1$$
$$f_{xy}(a+\theta h,b+\theta k)=B+\varepsilon_2$$
$$f_{yy}(a+\theta h,b+\theta k)=C+\varepsilon_3$$

とおけば，

$$f(a+h,b+k)-f(a,b)=\frac{1}{2}(Ah^2+2Bhk+Ck^2)+\frac{1}{2}(\varepsilon_1h^2+2\varepsilon_2hk+\varepsilon_3k^2).$$

ここで，$(h,k) \to (0,0)$ のとき $\varepsilon_i \to 0$ $(i=1,2,3)$ だから $|h|,|k|$ が十分小さい範囲では $f(a+h,b+k)-f(a,b)$ の正負の符号は $Ah^2+2Bhk+Ck^2$ の符号と一致する．

(1) $\Delta = B^2-AC<0, A>0$ のとき $Ah^2+2Bhk+Ck^2$ を h の2次式とみるとその判別式は

$$B^2k^2-ACk^2=k^2(B^2-AC)<0$$

であるから $Ah^2+2Bhk+Ck^2>0$. したがって $f(a+h,b+k)>f(a,b)$ となって $f(a,b)$ は極小値

(2) $\Delta<0, A<0$ のときも同様にして $f(a,b)$ は極大値

(3) $\Delta>0$ のときは h,k のとり方により $Ah^2+2Bhk+Ck^2$ の符号は正にも負にもなるから，$f(a,b)$ は極値をもたない．

(4) $\Delta=0$ のときはこれだけでは $f(a,b)$ は極値をとるかどうかわからない． □

例 7.3. $f(x,y)=x^2+xy+y^2-4x-2y$ の極値を求めよ．

解 $f_x=2x+y-4=0, f_y=x+2y-2=0$ より $df(2,0)=0$. よって点 $(2,0)$ が極値をとりえる．$f_{xx}(2,0)=2, f_{xy}(2,0)=1, f_{yy}(2,0)=2$ であるから $\Delta<0, f_{xx}(2,0)>0$ となり，極小値 $f(2,0)=-4$ をとる．

問 7.1. 次の関数の極値を求めよ．

(1) $x^2-xy+y^2-2x+3y+1$　　(2) $e^x(x^2-y^2)$

(3) $x^3-6xy+y^3$　　(4) $xy(x^2+y^2-1)$

問 7.2. 半径1の円に内接する三角形で面積最大なものを求めよ．

変数 x,y がある条件 $\varphi(x,y)=0$ のもとで変化するとき，関数 $f(x,y)$ の極値を求める問題を考える．

定理 7.2. 関数 $\varphi(x,y), f(x,y)$ は連続偏微分可能とし，$z=f(x,y)$ は $\varphi(x,y)=0$ という条件のもとに (a,b) で極値をとるとする．このとき，もし $\varphi_x(a,b)\neq 0$ または $\varphi_y(a,b)\neq 0$ ならば

$$f_x(a,b)-\lambda\varphi_x(a,b)=0, f_y(a,b)-\lambda\varphi_y(a,b)=0$$

となる定数 λ が存在する．

証明 $\varphi_y(a,b)\neq 0$ のときは，陰関数の定理より $\varphi(x,y)=0$ を満たす y が x の関数とみられるから z は x の関数となる．よって $z=f(x,y)$ が極値をとる点 (a,b) では

$$\frac{dz}{dx}=f_x+f_y\frac{dy}{dx}=0.$$

また $\varphi(x,y)=0$ の両辺を x で微分すると $\varphi_x dx+\varphi_y dy=0$．したがって $\varphi_y(a,b)\neq 0$ であるから $f_x(a,b)\varphi_y(a,b)=f_y(a,b)\varphi_x(a,b)$．よって

$$\lambda=\frac{f_y(a,b)}{\varphi_y(a,b)}.$$

とおけばよい．$\varphi_x(a,b)\neq 0$ のときは，同様にして $\lambda=\dfrac{f_x(a,b)}{\varphi_x(a,b)}$ とおけばよい．　□

定理 7.3 (ラグランジュの未定乗数法)． 連続偏微分可能な関数 $\varphi(x,y), f(x,y)$ に対し

$$F(x,y,\lambda)=f(x,y)-\lambda\varphi(x,y)\ (\lambda \text{は助変数})$$

とおく．条件 $\varphi(x,y)=0$ のもとで $z=f(x,y)$ が極値をとる点では，$\varphi(x,y)=0$ が特異点をもたなければ

$$F_x(x,y,\lambda)=0, F_y(x,y,\lambda)=0, F_\lambda(x,y,\lambda)=0$$

が成り立つ．助変数 λ は**ラグランジュの乗数**とよばれている．

証明 定理 7.2 より明らか．　□

例 7.4. 点 (x,y) が条件 $x^3-3xy+y^3=0$ のもとで変化するとき x^2+y^2 の極値を求めよ．

解 $F(x,y,\lambda)=x^2+y^2-\lambda(x^3-3xy+y^3)$ とおくと

$$F_x=2x-3\lambda(x^2-y), F_y=2y-3\lambda(y^2-x), F_\lambda=-\varphi.$$

ただし，$\varphi(x,y)=x^3-3xy+y^3$ で $\varphi_x(x,y)=3x^2-3y, \varphi_y(x,y)=-3x+3y^2$．

$F_x=F_y=0$ より ($x^2\neq y$ として) λ を消去すると

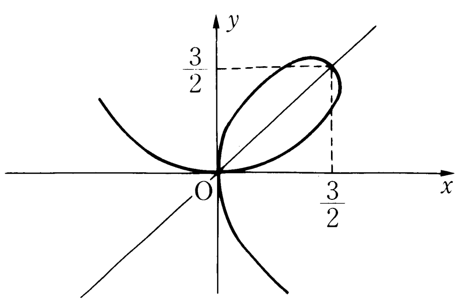
$$(x-y)(x+y+xy)=0.$$

$x=y$ と $\varphi=0$ より $x=y=\dfrac{3}{2}$ を得る ($\lambda=\dfrac{2x}{3(x^2-y)}$ より $(x,y)\neq(0,0)$)．

また，$x+y+xy=0$ および $\varphi=0$ より

$$(x+y)(x^2-xy+y^2+3)=0.$$

ここで $x^2-xy+y^2+3=\left(x-\dfrac{1}{2}y\right)^2+\dfrac{3}{4}y^2+3>0$ であるから $x+y=0$．よって $x=y=0$ を得るが λ の定義に反する．したがって $F_x=F_y=F_\lambda=0$ を満たす点 (x,y) は $\left(\dfrac{3}{2},\dfrac{3}{2}\right)$ であり，$f(x,y)=x^2+y^2$ の極値の候補はこの点となる．一方 $\varphi(x,y)=0$ のグラフより $f(x,y)$ の値は原点 $(0,0)$ から点 (x,y) までの距離の平方であるから $f\left(\dfrac{3}{2},\dfrac{3}{2}\right)=\dfrac{9}{2}$ は極大値である．また，グラフより点 $(0,0)$ で $f(x,y)$ は最小値（極小値）0 をとる．

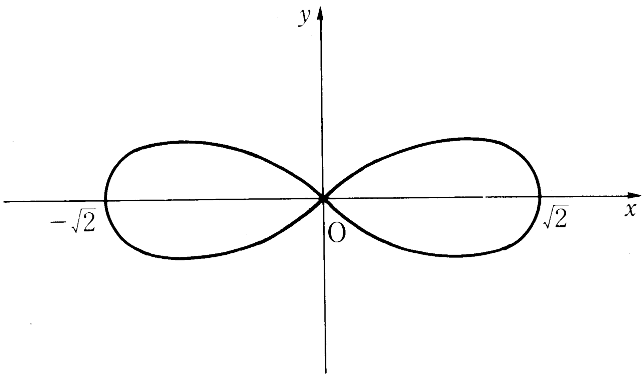


$\varphi(x,y)=0$ のグラフ

問 7.3. 条件 $x^2+y^2=1$ の下で次の関数の極値を求めよ.

(1) $x+y$　　　(2) xy

問 7.4. 条件 $(x^2+y^2)^2=2(x^2-y^2)$ の下で x^2+y^2 の極値を求めよ.



$(x^2+y^2)^2=2(x^2-y^2)$のグラフ

第6章　練習問題

1. 次の各関数について $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ を求めよ.

(1) $f(x,y)=xy\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$　　(2) $f(x,y)=x\sin\dfrac{1}{y}+y\cos\dfrac{1}{x}$

(3) $f(x,y)=\dfrac{\sin(x^2+y^2)}{x^2+y^2}$　　(4) $f(x,y)=\dfrac{xy}{x^2+y^2}$

(5) $f(x,y)=\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$　　(6) $f(x,y)=\dfrac{x^4+y^4}{x^2+y^2}$

2. 次の関数の第２次偏導関数を求めよ.

(1) $z=\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$　(2) $z=\log(x^2+xy+y^2)$　(3) $z=\dfrac{e^{xy}}{e^x+e^y}$

(4) $z=\tan^{-1}\dfrac{y}{x}$　(5) $z=x^3-x^2y$　(6) $z=xy^2\cos x$

3. $z=e^{\sin x\cos y}$, $x=uv$, $y=u+v$ のとき偏導関数 z_u, z_v を求めよ.

4. 次に示す一対の関数について, 次の関係式が成り立つことを確認せよ.

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y},\quad \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x},\quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0,\quad \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}=0.$$

(1) $u = x^3 - 3xy^2, \quad v = 3x^2y - y^3$

(2) $u = \dfrac{x}{x^2+y^2}, \quad v = -\dfrac{y}{x^2+y^2}$

(3) $u = \cos x \cosh y, \quad v = -\sin x \sinh y$

(4) $u = \sin x \cosh y, \quad v = \cos x \sinh y$

ここで, $\sinh x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$, $\cosh x = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$ とする. (p. 32 参照)

5. 次の関数をマクローリンの定理を $n = 3$ の場合に適用せよ.

(1) $e^x \sin y$　(2) $\dfrac{1}{1-2x+3y}$　(3) $\sqrt{1+x-y^2}$

6. 0でない任意の実数 t に対して $f(tx, ty) = t^k f(x, y)$ を満たすとき，f を k **次の同次関数**という. k 次の同次関数 f が n 回連続微分可能であるとき，次のことを示せ.

(1) $x\dfrac{\partial f}{\partial x} + y\dfrac{\partial f}{\partial y} = kf$

(2) $\left(x\dfrac{\partial f}{\partial x} + y\dfrac{\partial f}{\partial y}\right)^n f(x, y) = k(k-1)\cdots(k-n+1)f(x, y)$

7. 関係式 $x^2 - xy + y^2 = a^2$ において y が x の関数となるのはどのような区間か. また，そのとき y', y'' を求めよ.

8. $\log(x^2+y^2) = 2\tan^{-1}\dfrac{y}{x}$ から y', y'' を求めよ.

9. $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, $x^2 + y^2 = 2ax$ から $\dfrac{dy}{dx}$ および $\dfrac{dz}{dx}$ を求めよ.

10. 関係式 $z^3 - 3xz + y^3 = 0$ にたいして $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \dfrac{y^2(z^2+x)}{(z^2-x)^3}$ を示せ.

11. 次の関数の極値を求めよ.

(1) $z = x^2 + xy + y^2 - 4x - 2y$　(2) $z = x^4 + y^3 - 4(x+y) + 1$

(3) $z = x^4 + y^4 - 10x^2 + 16xy - 10y^2$　(4) $z = x^2 + xy + y^2 - \dfrac{3(x+y)}{xy}$

(5) $z = x^2y^2 - x^2 - y^2 + 1$　(6) $z = x^2y - y^2x - x + y$

(7) $z = (4 - 3x^2 - y^2)(y - x)$　(8) $z = (y - 2x + x^2)(y - 4x + 3x^2)$

(9) $z = (1 - x^2 - y^2)^2$　(10) $z = x^4 - 2x^2y + 4x^2 - 4xy + 2y^2$

12. $x^2 + y^2 = 1$ のとき $x^4 + y^4$ の極値を求めよ.