第5章

微分方程式

この章では，微分方程式とは何か？について述べる．微分方程式についての多くの図書の形式はとらず，ここでは「微分方程式はどのようにして得られるのか」を自然界の現象に重点をおき解説する．このため，文章による説明が長くなるが，このようにすることにより，より多くの学生が，微分方程式の重要性を認識できるものと考える．

1　微分方程式について

例 1.1 (人口問題)． 私達はよく，日本の人口の増加率は年 1.4 % だとかいう．これは，ある時点での人口が 1 億人だとしたら，1 年後には $1 \times (1 + 0.014) = 1$ 億 140 万人になるということだ．世界規模での人口 (増加) 問題は，現在もっとも緊急な課題の一つだが，それは，“何年後には世界の人口がこれだけになる” という予測の上に立っている．どのようにしたら，そのような予想が立てられるのだろうか．

適当に時間を設定して，時刻 t のときの人口を $y(t)$ とすると，時間が Δt だけ経過したときの人口の増加率は，次の式で表せる．

$$\frac{\Delta y}{\Delta t} = \frac{y(t+\Delta t) - y(t)}{\Delta t}.$$

人口は減少するかもしれないが，その場合は負の数になっている．

上の増加率を一人あたりに直すと，

$$a(t) = \frac{y(t+\Delta t) - y(t)}{y(t)\Delta t}$$

になる．話を簡単にするために，どの時点でも，それから Δt 経過する間の増加率が一定の値 a だとする．そうすると，Δt だけ経過した後の人口は

$$y(t+\Delta t) = y(t) + ay(t)\Delta t = (1 + a\Delta t)y(t)$$

ということになる. そこで, $t=0$ のときの人口を A とすると, Δt だけ時間が経過するごとの人口は

$$
\begin{aligned}
y(\Delta t) &= (1+a\Delta t)A \\
y(2\Delta t) &= (1+a\Delta t)y(t+\Delta t) = (1+a\Delta t)^2 A \\
y(3\Delta t) &= (1+a\Delta t)y(t+2\Delta t) = (1+a\Delta t)^3 A \\
&\cdots\cdots\cdots
\end{aligned}
$$

このように, 時刻 $n\Delta t$ では

$$y(n\Delta t) = (1+a\Delta t)^n A$$

になる. ここで $\log(1+a\Delta t) = b$ とすると, $1+a\Delta t = e^b$ だから,

$$y(n\Delta t) = e^{bn} A$$

である.

ところで, 人口やバクテリアの個体数などは, ある区切られた時間間隔で変化するというよりも, 刻一刻変化していくと考える方が自然である. そこで, 前に与えた Δt 内での平均の増加率 $a(t)$ の代わりに, $\Delta t \to 0$ とした極限, 瞬間の変化率を考えてみる. それを k と書くと

$$
\begin{aligned}
k &= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{y(t+\Delta t) - y(t)}{y(t)\Delta t} \\
&= \frac{1}{y(t)} \lim_{\Delta t \to 0} \frac{y(t+\Delta t) - y(t)}{\Delta t} \\
&= \frac{1}{y(t)} \frac{dy}{dt}.
\end{aligned}
$$

つまり

$$\frac{dy}{dt} = ky$$

という式が現れる. 逆に, この式を満たす t の関数として, 時刻 t における人口が定まると考えられる.

例 1.1 のような方程式は **微分方程式** とよばれる. 未知の関数 $f(x)$ を見つけるための方程式で, その未知関数の導関数 $f'(x)$ が現れる方程式のことを, **微分方程式**という (二階導関数 $f''(x)$ や, もっと階数の高い導関数がでてくる場合もある).

たとえば,

(1) 関数 $g(x)$ が与えられていれば, 微分方程式 $y' = g(x)$ は $\int g(x)dx$ で満たされる.

(2) 微分方程式 $\dfrac{d^2y}{dt^2} = -g$ は, 落下する物体の式 $y = -\dfrac{1}{2}gt^2 + v_0 t + y_0$ で満たされる.

Newton が微積分を発見して以来, 人類は, 微分方程式を作って, それを解くことにより, さまざまな現象を説明したり, 未来を予測して来た. 応用面で微分方程式がなぜ基本的かというと, 関数 $y(t)$ を直接知ることができない場合が多いからだ. 物理や経済の基本法則を数学的に書き直して, $y(t)$ の変化率に関する情報を得て, それを使って $y(t)$ を見つけなければならない. 上の例の微分方程式 $\dfrac{d^2y}{dt^2} = -g$ は単に, "地表近くの重力は一定の加速度を生む" ということである.

人口が連続的に k の割合で増加する場合の基本法則は, "**どんな時でも人口は, 時間に対して, その時点の人口に k をかけたものに等しい割合で変化する**" ということである. 例えば, $k = 4\% = 0.04$ で, ある国の人口が 1 億人だとしたら, 最初は年に 400 万人の割合で増えていく; けれども, 少しして人口が 1 億 100 万人になったときには, 年に 404 万人の割合で増加していることになる. これは, 銀行に預金したり, ローンを組んだりすると, 利息が利息を生むのと似ている. 太字の部分の法則は次のように数式で表すことができる：

$$\frac{dy}{dt} = ky,$$

つまり, t 年目の人口を表す関数 $y(t)$ は, この関数の現在の値に k をかけたものに等しい割合で増加する.

2 微分方程式 $\dfrac{dy}{dt} = ky$

この微分方程式を解いて, y を t で表した式を求める. これだけでなく, 他にも多くの方程式に使える便利な方法で, "**変数分離**" というものがある. これは, y を含んだものはすべて方程式の一方の辺に集め, t を含むものは全部他の辺に集めてしまうことを意味する. このときに, dy と dt は代数的な量であるように扱われる.

例 2.1 (微分方程式 $\dfrac{dy}{dt} = ky$ の解法) .
1 st step: 方程式の両辺に dt をかけ, 両辺を y で割る:

$$\frac{1}{y}\, dy = k\, dt$$

になる.
2 nd step: 両辺に積分記号 $\int$ をつける:

$$\int \frac{1}{y}\, dy = \int k\, dt$$

になる.

3 rd step: 両辺の不定積分を計算する:

$$\begin{aligned} \text{左辺} &= \log|y| + C_1, \\ \text{右辺} &= kt + C_2. \end{aligned}$$

積分定数の C_1 を右辺に移項して C_2 からひいて, $C = C_2 - C_1$ とする：

$$\log|y| = kt + C$$

となる.

最終 step: y について解くために, 両辺の指数巾を考える：

$$e^{\log|y|} = e^{kt+C}.$$

$e^{\log|y|} = |y|$ だから, y についての式が得られる：

$$y(t) = \pm e^{kt+C} = \pm e^C e^{kt}.$$

方程式はこれで解けたが, 人口問題を考えれば, 全部がすんだわけではない. まだ, e^{kt} の前の定数 e^C を決めなければならない. これには, 最初の時点の情報を使うことができる. この問題では, 最初の時点の情報は $t = 0$ のとき $y(0) = A$ だった. 等式 $y(t) = \pm e^C e^{kt}$ に $t = 0$ を代入して：

$$A = y(0) = e^C e^0 = e^C.$$

だから, 次のように y を決定することができた：

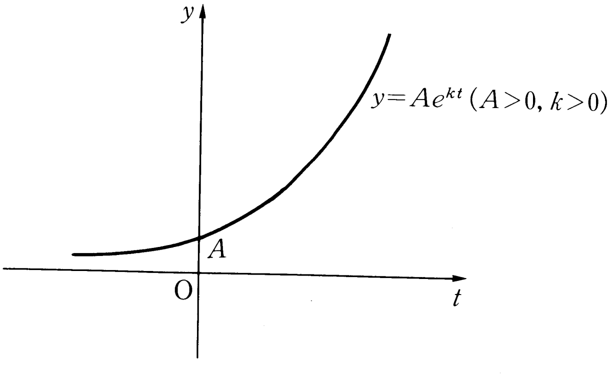
$$y(t) = Ae^{kt}.$$

問 2.1. 次の微分方程式を, 例 2.1 の手順にしたがって解け.

(1) $\dfrac{dy}{dt} = y$ ($t = 0$ のとき, $y = 1$), (2) $\dfrac{dy}{dt} = 3y$ ($t = 0$ のとき, $y = -2$).

3 指数関数的成長と減少

$y = Ae^{kt}$ の形をした関数は **指数関数的成長** とよばれる. そのグラフは下のような形をしている.



例 3.1 (2倍になるのにかかる時間). 時刻 t での人口は Ae^{kt} だとする. 人口が 2倍になるのには, どれだけ時間がかかるだろうか.

2倍になるのにかかる時間を T とすると：

$$Ae^{k(t+T)} = 2Ae^{kt}$$

という等式が成り立つ. 両辺を Ae^{kt} で割り, 対数をとると：

$$kT = \log 2,$$

となるので

$$T = \frac{1}{k}\log 2.$$

注意. 2倍になるのにかかる時間 T は, どの時点から測るかにはよらないし, 最初の人口 A にも無関係なことに注目しよう. **T は増加率 k だけによって決まる.** たとえば, 増加率 4 % では, 2倍になるのにかかる時間は

$$\frac{\log 2}{0.04} = 17.32867\cdots(\text{年}).$$

問 3.1. 3倍になるのにかかる時間や, 一般に n 倍になるのにかかる時間について考えてみよ.

問 3.2. 最近の世界人口は, 38 年で 2 倍になるスピードで増加している. 年間の増加率 (k の値) を計算せよ.

これまでのことから, 増加率がその時点の値に比例する場合 (つまり $dy/dt = ky$ の場合) には, 指数関数 $y(t) = y_0e^{kt}$ が得られ, k は現在の値に対する増加率の比例定数で, y_0 は関数の初期値であることがわかった.

例 3.2. ある国の人口が 30 年間で2倍になるとする. 増加率が住民の数に比例すると仮定した場合, 人口が3倍になるには何年かかるか.

解 $y(t) = Ae^{kt}$ とおけて, 30 年間で 2 倍になることから,

$$e^{30k} = 2.$$

これより

$$k = \frac{1}{30}\log 2.$$

T 年後に 3 倍になるとすると,

$$e^{kT} = 3.$$

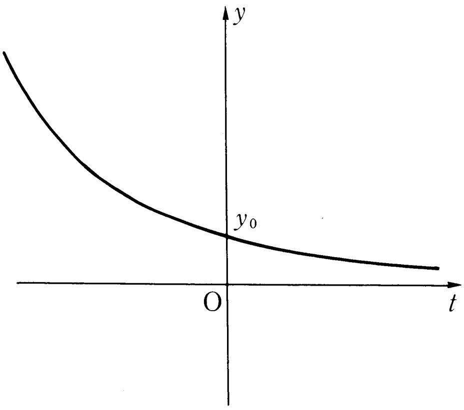
したがって,

$$T = \frac{1}{k}\log 3 = \frac{30\log 3}{\log 2} \doteqdot 47.55.$$

約 48 年で 3 倍になる.

問 3.3. ウイスキーやビールの原料となるモルトの増加率は，その時点での存在量に比例する．最初 2 グラムだったのが，2 日後には 3 グラムに増加した．10 日後には何グラムになるか．

今度は，現在の値に比例して減少する関数 $y(t)$ を考えてみる．比例定数を $-k$ とすれば，$\dfrac{dy}{dt} = -ky$．数学的には，何も変わりはなく，ただ k が $-k$ になっただけで，$t = 0$ のとき，$y = y_0$ とすれば関数 $y = y_0 e^{-kt}$ が得られる．けれども，$y_0 e^{-kt}$ のグラフは $y_0 e^{kt}$ のグラフとは非常に違って見える．それは，t が増加していくときに，急速に減少して 0 に近付いていくからである．



問 3.4. 次の微分方程式を解け．

(1) $\dfrac{dy}{dt} = -y \quad (t = 0 \text{ のとき},\ y = 100)$,　(2) $\dfrac{dy}{dt} = -2y \quad (t = 0 \text{ のとき},\ y = 10)$

例 3.3 (半減期)． 指数関数的に減少する関数 $y(t) = y_0 e^{-kt}$ には，半減期というものがある．これは現在の値が半分の値に減少するのにかかる時間である．半減期 T を求めてみよ．

2 倍になる時間を求めたときと同じように，次の等式が成り立つ：

$$y_0 e^{-k(t+T)} = \frac{1}{2} y_0 e^{-kt}.$$

両辺を $y_0 e^{-kt}$ で割って，対数をとると

$$-kT = \log \frac{1}{2} = -\log 2$$

となるので

$$T = \frac{\log 2}{k}.$$

指数関数的に増大する関数が 2 倍になるのにかかる時間と，まったく同じである．

例 3.4 (放射性崩壊)． 未来のある日，地球を訪れた宇宙人が目にしたのは，はるか前に起きたカタストロフにより生物が住めなくなった惑星の姿であった．優れた科学力で，彼らはそのときに放出された放射性プルトニウム 239 の量を決定した．また，残存しているプルトニウム 239 の量は，その 1/500 であることもわかった．プルトニウム 239 の半減期は 24400 年として，地球壊滅は何年前のことだったかを決定せよ．

この問題では, 最初に k を決定する：

$$kT = \log 2$$

を用いて,

$$k = \frac{\log 2}{24400}.$$

次に

$$y(t) = y_0 e^{-kt} = \frac{1}{500} y_0$$

から,

$$e^{-kt} = \frac{1}{500}$$

を得る. この対数をとれば,

$$-kt = \log \frac{1}{500} = -\log 500.$$

ゆえに

$$t = \frac{24400 \log 500}{\log 2} \fallingdotseq 218800.$$

例 3.4 はSFの世界だが, あなたは "発掘されたミイラは何千年前のものだ" というニュースを聞いたことがあるにちがいない. 今まで学んだことから, どうしてそんなことがわかるのか, 想像がつくのではないか.

次の例の測定法を開発した W. Libby は 1960 年にノーベル化学賞を受けた.

例 3.5 (年代測定). 生きている木の中の放射性炭素の崩壊速度は 15.30 (dpm) である. ツタンカーメン王の墓の椅子の足に含まれる放射性炭素の崩壊速度を測ったら, 10.14 (dpm) だった. 半減期を 5,600 年とすると, ツタンカーメンはどのくらい前に生きていたか.

注. dpm とは, 1 分間に放射性物質が出している放射線の数である.

解 生物が死ぬと, 空気中の炭素を取り込まなくなるので, 生物の体内にあった放射性炭素は, 方程式

$$\frac{dy}{dt} = -ky$$

にしたがって減少する. ツタンカーメンの時代が T 年前だとすると, 放射性炭素の崩壊する割合は, 存在する量に比例するので,

$$\frac{10.14}{15.30} = \frac{y(T)}{y(0)} = \frac{Ae^{-kT}}{Ae^0} = e^{-kT}.$$

したがって

$$-kT = \log\left(\frac{10.14}{15.30}\right).$$

一方, 半減期が 5600 年だから

$$5600 = \frac{\log 2}{k}.$$

これより

$$k = \frac{\log 2}{5600}.$$

ゆえに

$$T = -\frac{5600}{\log 2}\log\left(\frac{10.14}{15.30}\right) \fallingdotseq 3330.$$

問 3.5. 例 3.5 の放射性炭素を用いて, 次の実例の年代を推定せよ．これらは, 1950 年に発見され測定されたものである．

(a) ハンムラビ王の治世のバビロンの家の梁：9.52 (dpm)

(b) ネヴァダの Gypsum 洞窟内の地下 2 m から出土した, 大ナマケモノの糞 : 4.17 (dpm)

(c) ネヴァダの Leonard Rock Shelter で見つかった木の投げ槍：6.42 (dpm)

4　微分方程式 $\dfrac{dy}{dt} = k(y-a)$

次に, もう少し複雑な微分方程式を解いてみる．これまでは, $y' = \pm ky$ という形をしていたが, 今度は $y' = \pm k(y-a)$ という形の方程式である (a は定数). やはりこれも, **変数分離**によって解くことができる．

$$\frac{dy}{dt} = k(y-a)$$

の両辺に dt をかけ, $y-a$ で割ったものを積分する．

$$\begin{aligned}
\frac{dy}{y-a} &= k\,dt \\
\int \frac{dy}{y-a} &= \int k\,dt \\
\log|y-a| + C_1 &= kt + C_2 \\
\log|y-a| &= kt + C \quad (C = C_2 - C_1) \\
|y-a| &= e^{kt+C} = e^C e^{kt} \\
y-a &= \pm e^C e^{kt}.
\end{aligned}$$

定数 e^C を決めるために, 初期条件 $t=0$ のとき, $y=y_0$ だとする．そうすれば, $t=0$ を代入して

$$y_0 - a = (\pm e^C)e^0 = \pm e^C.$$

したがって

$$y - a = (y_0 - a)e^{kt}.$$

微分方程式 $\dfrac{dy}{dt} = k(y-a)$ は $y = (y_0 - a)e^{kt} + a$ という解をもつ.

もちろん, 次のことも確かめられる:

微分方程式 $\dfrac{dy}{dt} = -k(y-a)$ は $y = (y_0 - a)e^{-kt} + a$ という解をもつ.

問 4.1. 上の手順で, 微分方程式 $\dfrac{dy}{dt} = -k(y-a)$ を解け, ただし, $t=0$ のとき $y=y_0$ とする.

問 4.2. 次の微分方程式を解け.
(1) $\dfrac{dy}{dt} = 3(y-1)$ ($t=0$ のとき, $y=2$), (2) $\dfrac{dy}{dt} = -2(y+1)$ ($t=0$ のとき, $y=0$).

例 4.1 (ニュートンの法則；物体の冷却). ここにいうニュートンの法則とは次の内容である：

> ある環境に物体が置かれると, 物体の冷却する割合は, 環境と物体の温度差に比例する.

時刻 t での物体の温度を $y(t)$, 最初の温度 ($t=0$ のときの温度) を y_0, 環境の温度を a とする. ニュートンの法則は, 次のような微分方程式に直せる.

$$\frac{dy}{dt} = -k(y-a).$$

この式で, k は環境と物体の性質によって決まってくる正の比例定数である. **k の前に $-$ が必要**なのは, $y(t) > a$ ならば $\dfrac{dy}{dt}$ はマイナスで, $y(t) < a$ ならば $\dfrac{dy}{dt}$ はプラスだからである.

この方程式の解は $y(t) = a + (y_0 - a)e^{-kt}$ であることを, 私達はすでに知っている. 時間が経過すると, つまり, t が大きくなると, e^{-kt} は急速に小さくなっていくから, $y(t)$ は a に近づく. これは, "物体の温度は周囲の温度にいくらでも近くなっていく" という私達の経験に合致する. (ここでは, 周囲の温度 a は, 物体によって温められたり冷やされたりもせず, 一定のままだと仮定してる. エアコンの効いた広い部屋に, 熱いスープを置いた場合などが当てはまる.)

例 4.2. 93°C のコーヒーを, 室温が 18°C に保たれた部屋に置いた. 2 分後には, コーヒーは 68°C にまで冷めた. t 分後のコーヒーの温度を表す式を求めよ.

解 私達にわかっているのは $y_0 = 93$ と $a = 18$ ということだが, k がいくつかはわかっていない. けれども, $y(t)$ が次の形をした式だとはわかっている：

$$y(t) = a + (y_0 - a)e^{-kt} = 18 + 75e^{-kt}.$$

さらに $y(2) = 68$ という情報が使えて

$$\begin{aligned} 68 &= 18 + 75e^{-2k} \\ 50 &= 75e^{-2k} \\ \log\frac{50}{75} &= -2k \\ k &= -\frac{1}{2}\log\frac{50}{75} = \frac{1}{2}\log 1.5 = 0.203. \end{aligned}$$

これから, $y(t) = 18 + 75e^{-0.203t}$ である.

この例で得られた式は, $y(t) = 18 + 75\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{t}{2}}$ とも書くことができる.

問 4.3. 鉄の球を 110° C に熱して 10° C の空気中に放置した. 1 時間後には, 球の温度は 60° C になった. 30° C にまで下がるには, それからさらにどれだけ時間がかかるか.

問 4.4. 気温が 17° C のときに, お湯が 97° C から 57° C まで 10 分間で冷えるとすると, 40 分後の温度は何度か.

例 4.3 (落下物体と空気抵抗). 落下する物体の鉛直方向の運動は, 重力と空気抵抗の 2 つから影響を受ける. 地表近くでは, 重力は一定の加速度 g を引き起こす. 空気抵抗は, 物体の空力学的性質とスピードに左右される. 一般的に, 物体のスピードが大きい程空気の分子から受ける抵抗は大きくなる. ここでは, 空気抵抗は物体の速度に比例すると仮定する. その比例定数を k として, 物体の質量を m, 速度を v とすると, ニュートンの運動法則の式は次のようになる (加速度は速度の時間微分 $\dfrac{dv}{dt}$ であることに注意せよ).

$$m\frac{dv}{dt} = mg - kv$$

つまり,

$$\frac{dv}{dt} = -\frac{k}{m}\left(v - \frac{mg}{k}\right).$$

これから,

$$v = \frac{mg}{k} + \left(v_0 - \frac{mg}{k}\right)e^{-\frac{k}{m}t}.$$

ただし, 物体の初速度 ($t = 0$ のときの物体の速さ) を v_0 としている.

問 4.5. 上の式で, 時間 t が大きくなっていくと, 物体の落下速度 v はどんな値に近づいていくかを考えよ.

問 4.6. 質量 m の物体が地表から上方に向かって, 初速度 v_0 で投げ上げられた. この物体の受ける力は, 地球による一定の重力と, 速度に比例する空気抵抗 (比例定数は k とする) だけだとする. 物体の最高到達点の, 地表からの高さは

$$\frac{mv_0}{k} - \frac{m^2 g}{k^2} \log\left(1 + \frac{kv_0}{mg}\right)$$

であることを示せ. 抵抗を 0 に近づけていくとき, この数字はどうなるか調べよ.

例 4.4 (パラシュート降下). 体重と装備あわせて 120 kg のパラシュート隊員が偵察機から降下して, 10 秒後にパラシュートが開いたが, それは着地する僅か 2 秒前だった. それまでの自由落下中は, $k = 24$ の空気抵抗を受け, パラシュートが開いた後は $k = 336$ だったとする. 12 秒後に地面に降りたとき, 彼は怪我をしなかったかどうか考えてみよう. 偵察機から降りるとき, 彼は静かにドアから踏み出したとする.

解 最初の 10 秒間 ; $0 \leqq t \leqq 10$:

重力加速度は $g = 9.8$ として, $m = 120$, $v_0 = 0$, $k = 24$ を例 4.3 で得られた式に代入すれば

$$v(t) = 49\left(1 - e^{-0.2t}\right).$$

パラシュートが開いたときの速度は

$$v(10) = 49\left(1 - e^{-2}\right) \fallingdotseq 42.37 \text{ (m/sec)}.$$

その後の速度; $10 \leqq t \leqq 12$:

v_0 を 42.37, t を $t - 10$ に置き換えて, $k = 336$ とすると

$$v(t) = 3.5 + (38.87)e^{-2.8(t-10)}.$$

彼が着地したときの速度は

$$v(12) = 3.5 + 38.87e^{-5.6} \fallingdotseq 3.5 + 0.14 = 3.54 \text{(m/sec)}.$$

熟練した降下隊員は, 掠り傷ひとつ負わなかっただろう.

問 4.7. (1) 落下速度 $v(t)$ のグラフを書いてみよ.

(2) パラシュートが開いた高度, 偵察機の飛行高度を計算せよ. これは, 単なる積分の復習である.

(3) パラシュートが開いたときに隊員が受けるショックを考えてみよ. これは, 何を計算すればよいのか.

問 4.8. 例 4.1 と例 4.3 の微分方程式は定数の解; $y(t) = c$ をもつ. それぞれの場合に c の値は何か. また, この特別な解は, 現実にはどんな状況に対応しているのか考えてみよ.

注意. これまでの例で, 話を単純にするための仮定をいくつかしてきた. だから, 私達が得た結果は, 完全に正確には, 現実を表してはいない. しかし, このような **モデル** を考えなければ, どうして有益な情報を得ることができるだろうか. 人間の直観が誤りやすいのは, 物体の運動についてのガリレオ以前の考えや, 時間と空間が別なものだというアインシュタイン以前の考えをみてもわかる. 人間がプログラムを書き, コンピュータが高速処理をすることで, さまざまな技術が私達の生活を豊かにするために使われている. 探査機を太陽系外に送ることまでできるのだ.

5 変数分離形微分方程式

こんどは, もう少し複雑だが, やはり変数分離で解ける方程式を考える.

例 5.1. 点 $(1,2)$ を通り, 次の微分方程式を満たす曲線を求めよ:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{y^2}{x^4}.$$

まず, 変数を分離する:

$$\frac{dy}{y^2}=\frac{dx}{x^4}.$$

両辺を積分して, 積分定数を右辺にまとめる:

$$-\frac{1}{y}=-\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{x^3}+C.$$

ここで C を決めるために, 捜している曲線は点 $(1,2)$ を通る という "初期条件" を使う. そこで;

$$-\frac{1}{2}=-\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{1^3}+C.$$

$$C=-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}=-\frac{1}{6}.$$

最後に, 両辺を -1 倍 して, 逆数をとれば, 曲線の式がわかる :

$$y=\frac{1}{\frac{1}{3x^3}+\frac{1}{6}}=\frac{6x^3}{x^3+2}.$$

問 5.1. 点 $(1,0)$ を通り, 次の微分方程式を満たす曲線を求めよ:

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{x}{y}.$$

あなたが見つけた曲線と比べて, 方程式の図形的な意味を考えよ.

問 5.2. 次の微分方程式の解のなかで, 点 $(1,1)$ を通る曲線を求めよ.

(1) $x^3\dfrac{dy}{dx}=-y^2$, (2) $\dfrac{dy}{dx}=-2xy$,

(3) $\dfrac{dy}{dx}\sin(\pi y)=x^2$, (4) $\sqrt{2-x^2}\dfrac{dy}{dx}+\sqrt{2-y^2}=0$.

6 モデルの修正

最初に考えた人口のモデルは, 1798 年にイギリスのマルサスという経済学者が用いたものだ. 当時の増加率は, 現代より格段に高く, アメリカでは実に $k \fallingdotseq 0.3$ という統計が残っている. マルサスは, 人口増加に比べて食糧生産の増加率は低いので, このままででは将来食糧不足で人類は危機に瀕するだろうと警告したのである.

問 6.1. マルサスモデルで計算すると, 2000 年のアメリカの人口は 1800 年の何倍になっているか.

1800 年のアメリカの人口は約 530 万人であった. 40 年足らずで, 現在の世界人口をオーヴァーしてしまう. 現実には, 人口や生物個体数などは無制限に増え続けることはなく, あるところまで増えると, 必ず抑制する要因が働く. バクテリアのようなものでも, 限られた環境では栄養や酸素が不足して増殖がストップする. もしそうでなかったら, 大変なことになっているだろう.

例 6.1 (人口のロジスティックモデル) . これは, 増加率が一定ではなく $\left(\dfrac{dy}{dt}\neq ky\right)$, 人口が増加していくにつれて, 増加率が減少するモデルである. 右辺に $1-\dfrac{y}{M}$ という項を入れて：

$$\frac{dy}{dt}=ky\left(1-\frac{y}{M}\right)$$

という式を採用する. 現実には, M はこれ以上は増えることができない最大限の人口を意味する. つまり, **人口増加率は, 現在の人口と, 想定される最大値と現在の人口の差との積に比例する**. これは, 1837 年にオランダの数理生物学者ヴェアフルストが, 人口過密の要因を考えて提出したもので, ヴェアフルストモデルともいう. これから求める方程式の解のグラフをロジスティック曲線という.

まず, 変数を分離して積分する：

$$\int\frac{M\,dy}{y(M-y)}=\int k\,dt.$$

左辺の被積分関数を部分分数に分ける：

$$\frac{M}{y(M-y)}=\frac{1}{y}+\frac{1}{M-y}.$$

これから，

$$\log|y| - \log|M-y| = \log\left(\frac{y}{M-y}\right) = kt + C.$$

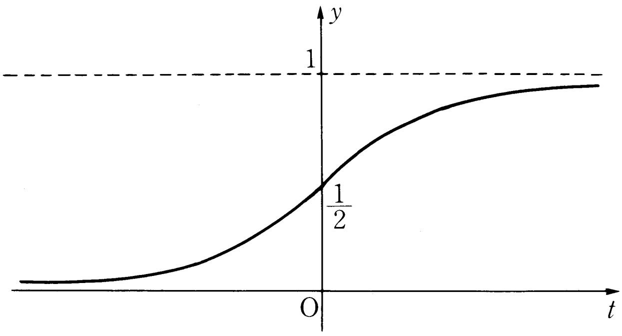
したがって，

$$\frac{y}{M-y} = e^{kt+C}.$$

これを y について解くと，

$$\frac{M-y}{y} = \frac{M}{y} - 1 = e^{-kt}e^{-C}$$

$$y = \frac{M}{1+e^{-C}e^{-kt}}.$$



右のグラフは $M=1$, $C=0$, $k=1$ のときを書いたものである．

問 6.2. 最近日本人により，マダガスカル島に日本産のクワガタが持ち込まれた．クワガタの数はロジスティック方程式に従うと仮定する．島に生息できる最大数は 100 万匹で，現在は 5 万匹が生息している．ちょうど 1 年前には 2 万匹であった．時刻 t (年) におけるクワガタの数を表す式を求めよ．また，95 万匹になるのには，何年かかるか．

問 6.3. 次の微分方程式を解け．

(1) $\dfrac{dy}{dt} = y(1-y)$,　　(2) $(1-t^2)\dfrac{dy}{dt} = y$.

7　調和振動

最後に簡単な振動を表す方程式について述べる．

例 7.1 (ばねの振動)． ばねの先に質量 m の物体がついている．時刻 t におけるばねの伸びを $y(t)$ とする．重力や摩擦，空気抵抗などはすべて無視して，物体にはばねの弾性力しか働かないとする．次の基本的な法則を使う：

ばねの力は，ばねの伸びた長さに比例する．

物体の加速度は力に比例するので，$y''(t)$ は $y(t)$ に比例することになる．ばねが伸びると，引き戻される方向にばねの力が働き，縮まるとその逆向きに力が働く．だから，$y''(t)$ と $y(t)$ の比例定数は負の数なので $-k$ とする．そこで，物体の位置を表す関数 $y(t)$ は次の微分方程式を満たすことになる：

$$y'' = -ky.$$

これは, 2 階微分を含んでいるので, **二階微分方程式** とよばれる. 一般的な扱いは, もっと進んだ勉強になるが, ここではちょっとした工夫で変数分離形に直してみよう. この方程式は特別に簡単な形をしているからである. まず, $-ky$ を左辺に移す：

$$y'' + ky = 0.$$

ここで, y' をかけてみると：

$$2y'y'' + 2kyy' = 0.$$

したがって

$$\frac{d}{dt}\left((y')^2 + ky^2\right) = 2y'y'' + 2kyy'$$

だから, 方程式 $y'' + ky = 0$ は $\frac{d}{dt}\left((y')^2 + ky^2\right) = 0$, つまり

$$(y')^2 + ky^2 = c \text{ (定数)}.$$

時刻 $t = 0$ では物体はつりあいの位置にあり $(y(0) = 0)$, 速度は v_0 だったとすると, $c = v_0^2$ で, 方程式は次のようになる：

$$(y')^2 + ky^2 = v_0^2.$$

これから, 変数分離形の方程式が得られる：

$$\frac{dy}{dt} = \sqrt{v_0^2 - ky^2}.$$

変数を分離して積分する：

$$\int \frac{dy}{\sqrt{v_0^2 - ky^2}} = \int dt.$$

積分 (微分) の公式を思い出して

$$\frac{1}{\sqrt{k}} \sin^{-1}\left(\frac{\sqrt{k}}{v_0} y\right) = t + C.$$

私達は $y(0) = 0$ と仮定して, $\sin^{-1}(0) = 0$ だから, $C = 0$ となる. 結局

$$y(t) = \frac{v_0}{\sqrt{k}} \sin(\sqrt{k}t) = \frac{v_0}{\omega} \sin(\omega t).$$

ここで, $\omega = \sqrt{k}$ は角速度 (1 秒間に進む角) である.

このように, 物体は周期 $\frac{2\pi}{\omega}$ のサインカーブでいったりきたりする. このような運動を **調和振動** という.

問 7.1. $y(t) = \frac{v_0}{\omega} \sin(\omega t)$ が, 微分方程式 $y'' = -ky$ を満たすことを, 実際に微分してみて確かめよ.

問 7.2. (1) 例 7.1 での初期条件を, 時刻 $t=0$ で $v_0=0$ だが, $y(0)=y_0\neq 0$ としたら, どうなるか.

(2) 一般に, y_0 も v_0 も 0 でないとしたらどうか.

問 7.3. 次の微分方程式を解け.

(1) $y''=-2y,\quad y(0)=5,\ y'(0)=0,$　　(2) $y''+4y=0,\quad y(0)=7,\ y'(0)=3.$

速度に比例する空気抵抗を考えにいれると, 落下する物体を考えたときのように, 指数関数的に減少する振動になることが示せて, **減衰振動** とよばれる.

以上, 変数分離形の微分方程式で表せる現象の例のいくつかを調べてきた. 最後にもう一度, どうやって方程式を解いたらよいのかを復習する.

微分方程式が (必要なら変形して),

$$\frac{dy}{dx}=f(x)g(y)$$

という形のとき, 変数分離形といい, 次のようにすれば解ける.

$$\frac{1}{g(y)}dy=f(x)dx$$

と, 変数 x, y をそれぞれ一方の辺に集めて積分する.

$$\int\frac{1}{g(y)}dy=\int f(x)dx.$$

あとは不定積分を計算するだけである. 工学に現れる関数は, それほど複雑でないものが多いから, 基本的な積分公式と, 簡単な置換積分と部分積分が, きちんとできるようになっていればよい.

第5章　練習問題

1. 次の微分方程式を解け.

(1) $x^4y'+y^4=0$　　(2) $xyy'=y+1$

(3) $xy'=(1+x^2)\tan y$　　(4) $y'=3x^2y$

(5) $y'+y\tan x=0$　　(6) $(1-2x^2)y'=y$

(7) $(1+x^2)dy+(1+y^2)dx=0$　　(8) $y\log y dx-xdy=0.$

2. 次の方程式の解のうちで, 指定された点を通る曲線を求めよ.

(1) $y'=e^{2x-3y}$, $(0,0)$　　(2) $e^{-y}dy+(1+x^2)dx=0$, $(0,0)$

(3) $2\sin 2x\cos 3y dx-3\cos 2x\sin 3y dy=0$, $\left(\frac{\pi}{8},\frac{\pi}{12}\right)$　　(4) $xyy'=(x-1)(y-1)$, $(1,0)$.

3. ある鉱山町の人口は, それ自身に比例した割合で増加することが知られている. 1999 年には 1997 年の 2 倍になり, 2000 年には 10,000 人になった. 1997 年の人口は何人だったか.

4. ラジウムの半減期は 1,600 年である. 2,400 年後には最初の何 % が残っているか? 8,000 年後にはどうか?

5. 半減期が 20 日の放射性物質が初めの 1 % に減るには何日以上かかるか?

6. ウラン 238 が 時刻 t_1, t_2 にそれぞれ x_1, x_2 だけ存在したとする. 半減期は

$$\frac{(t_2 - t_1)\log 2}{\log(x_1/x_2)}$$

であることを示せ.

7. お茶を 0° C に保たれた冷蔵庫に入れた. 15 分後のお茶の温度は 30° C で, 30 分後には 15° C になった. 最初の温度は何度だったか. 最初に, 頭の中で考え, 次に微分方程式を使ってあなたの考えが正しいかどうか確かめよ.

8. パーティーのためにプディングを作り, 午後 6 時に冷蔵庫に入れた. 冷蔵庫の温度は 4°C に保たれている. プディングは 7°C になると固まる. 冷蔵庫に入れたとき, プディングの温度は 69°C であった. 最初のお客さんが午後 7 時に来たときには, 30°C に冷えていた. デザートを出せる時刻は, 早くてもいつか.

9. 検死官の解剖室はある理由で 5 ℃の温度に保たれている. ある朝早く, 検死解剖を行っていた検死官本人が殺され, 被害者の死体が盗まれた. 午前１０時に検死官の助手が, 検死官の遺体を発見したとき, 体温は 23 ℃だった. 正午には体温は 18.5 ℃に下がった. 検死官の生存中の体温は 37 ℃だったと仮定して, 死亡時刻を割り出しなさい.

10. ランベルトの吸収の法則 によれば, 半透明の物質の薄い層に入射した光が物質に吸収される割合は, 層の厚さに比例する. 海面に垂直に入射した太陽光が, 10 mの深さで入射時の半分の強さになった. $\dfrac{1}{16}$ になるときの深さは何 m か? まず, 答えを考えた後に, 微分方程式を立てて, あなたの答えを検討せよ.

11. 芦ノ湖の水面に垂直に入射したサーチライトの光が 15 m の深さで $\dfrac{1}{3}$ の明るさになった. 30 m と 60 m の深さではどうか? 50 m ではどうなるか?

12. 例 4.3 で空気抵抗は速度の 2 乗に比例するとする. $t = 0$ のとき $v = 0$ として, 終速度を計算せよ.

13. 燃料がなくなったとき, クルーザーは 60 (km/h) のスピードで動いていて, マリーナまでは 2.5 km あった. 水の抵抗は速度に比例するとし, 1 km 進んだときのスピードは 30 (km/h) に落ちていたとする. マリーナにたどりつけるか?

14. 前問で, 抵抗は速度の 2 乗に比例するとする.

1. 速度に比例する場合と比較して, まず予想を立て,
2. 微分方程式を作って, あなたの予想を検討せよ.

[その他の微分方程式] これまで学習した微分方程式は, いずれも変数分離形であった. ところが, 微分方程式は他にも幾つかのタイプがあり, それらは上級学年で学習することになる. ここでは, 変数分離形以外のタイプの微分方程式を紹介しよう.

[同次形] $y' = f\left(\dfrac{y}{x}\right)$ となるタイプの微分方程式を同次形という.

例. $(3x^2 + y^2)y' = 2xy$ は, 両辺 xy で割ることによって同次形であることがわかる. 実際

$$\left(3\frac{x}{y} + 2\frac{y}{x}\right)y' = 2$$

となるので同次形であることが確認できるだろう.

解法. 同次形の解法は $u = \dfrac{y}{x}$ と置くことによって変数分離形に書き直すことができる.

[一階線形微分方程式] 二つの関数 $P(x), Q(x)$ を使って $y' + P(x)y = Q(x)$ となるタイプの微分方程式を一階線形微分方程式という.

例. $y' + y\cos x = \cos x \sin x$ は一階線形微分方程式になる.

解法. 一階線形微分方程式は, 両辺に $e^{\int P(x)dx}$ をかけて, 部分積分の公式を適用すれば解くことができる.

[定数係数高階線形微分方程式] n 個の定数 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ と関数 $Q(x)$ を使って

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + a_2 y^{(n-2)} + \cdots + a_n y = Q(x)$$

のタイプの微分方程式を定数係数高階線形微分方程式という.

例. $y'' + 4y' + 3y = \sin x$ は定数係数二階線形微分方程式になる.

解法. このタイプの微分方程式の解法には, 次の多項式

$$t^n + a_1 t^{n-1} + a_2 t^{n-2} + \cdots + a_n t$$

の因数分解（と部分分数分解）が決定的な役割を果たしている.

他にも様々なタイプの微分方程式が知られている. そして, 多くの微分方程式は様々な物理現象や経済の動きなどを説明することができる. しかしながら, 全ての自然現象が解明されていないように, 全ての微分方程式が解かれているわけではない. その中には解答が存在しないような微分方程式もある. 現代では解析学を研究している多くの数学者は, 微分方程式の解き方を研究しているとも言えるであろう. また, 最近ではコンピューターを用いることによって従来の手法では解けなかった微分方程式の解も近似的に求めることができるようになってきている.