第3章

積分法 1

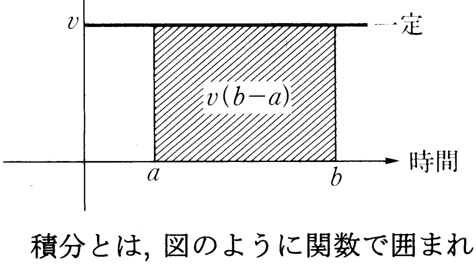
1　不定積分

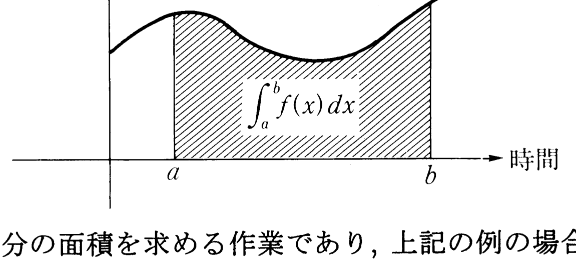
関数 $y=f(x)$ の $x=a$ における微分 $f'(a)$ の定義を振り返ると, 次の極限値であった.

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} \quad \text{で } b \longrightarrow a \text{ とした.}$$

例えば, ある物体の時刻 x における位置が関数 $y=f(x)$ で与えられているとすれば $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$ は時刻 a から b までのときの平均の速度である. よって $b \longrightarrow a$ としたときの極限値 $f'(a)$ は, 物体の時刻 a における速度を求めたことになる.

いま, 逆に関数 $y=f(x)$ は時刻 x における速度を表しているとする. このとき, 時刻 a から b までに物体が動いた距離を求めることを考えよう. もし $f(x)=v$ (一定) であれば, 時刻 a から b までの動いた距離は, もちろん $v(b-a)$ であるが, これは, グラフで囲まれた部分の面積である. このことは, 速度が一定の定数関数でない場合にも成り立つことが知られている.





積分とは, 図のように関数で囲まれた部分の面積を求める作業であり, 上記の例の場合 $y=f(x)$ を積分するということは, 物体が時刻 a から b までに動いた距離を求めることに対応している. 高校での学習で $y=f(x) \geqq 0$ の区間 $[a,b]$ での面積は $F'(x)=f(x)$ となる関数 $F(x)$ を1つ見つけてきて $F(b)-F(a)$ を求めればよい. したがって, 積分を求めるには微分について, よくわからなければならない. 第2章で, 高校のときとは違う, 複雑な

関数についての微分を学習した. この章では, 高校での学習を振り返りながら, そのような関数の不定積分を学習する.

関数 $f(x)$ に対して,

$$F'(x) = f(x)$$

となる関数 $F(x)$ を $f(x)$ の **原始関数** または **不定積分**という.

例 1.1.

(1) x^2, x^2+1 は $2x$ の不定積分である.

(2) $\sin x$, $\sin x + 2$ は $\cos x$ の不定積分である.

関数 $f(x)$ の不定積分は数多く存在するが, 次の定理により定数を除いてただ 1 つ定まる.

定理 1.1. $F(x)$, $G(x)$ を $f(x)$ 不定積分とすると

$$G(x) - F(x) = C \quad (\ C \text{ は定数})$$

が成り立つ.

証明 不定積分の定義により $G'(x) = F'(x) = f(x)$, したがって

$$(G(x) - F(x))' = G'(x) - F'(x) = 0.$$
$$G(x) - F(x) = C \quad (C \quad \text{は定数}). \qquad \square$$

関数 $f(x)$ に対して, その不定積分を $\int f(x)\,dx$ と表す. また $\int \frac{1}{f(x)} dx$ の場合は $\int \frac{dx}{f(x)}$ とすることもある. $f(x)$ の不定積分の 1 つを $F(x)$ とすると, 定理 1.1 より

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C$$

と表すことができる. このとき, $f(x)$ を被積分関数, C を積分定数といい関数 $f(x)$ の不定積分を求めることを関数 $f(x)$ を積分するという. 以下, 積分定数は省略する.

注 1.1. 任意の関数の不定積分は必ずしも存在しないが, 連続関数の不定積分は常に存在する.

不定積分の計算において, 次の定理が基本的である.

定理 1.2. a, b を定数とするとき

$$\int \{af(x) + bg(x)\}\,dx = a\int f(x)\,dx + b\int g(x)\,dx$$

が成り立つ.

問 1.1. 上の定理を証明せよ.

定理 1.2 から, いくつかの基本関数の不定積分がわかれば, それらを組み合わせてより複雑な不定積分が計算できる. まず, 基本関数の不定積分の公式を述べる.

不定積分の基本公式

(1) $\displaystyle\int x^a\,dx = \frac{x^{a+1}}{a+1} \quad (a \neq -1)$

(2) $\displaystyle\int \frac{1}{x}\,dx = \log|\,x\,|$

(3) $\displaystyle\int e^x\,dx = e^x$

(4) $\displaystyle\int a^x\,dx = \frac{a^x}{\log a} \quad (a > 0, a \neq 1)$

(5) $\displaystyle\int \cos x\,dx = \sin x$

(6) $\displaystyle\int \sin x\,dx = -\cos x$

(7) $\displaystyle\int \frac{1}{\cos^2 x}\,dx = \tan x$

(8) $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}\,dx = \sin^{-1}\frac{x}{a} \quad (a > 0)$

(9) $\displaystyle\int \frac{1}{a^2+x^2}dx = \frac{1}{a}\tan^{-1}\frac{x}{a} \quad (a > 0)$

(10) $\displaystyle\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx = \log|\,f(x)\,|$

問 1.2. 公式 (7), (8), (9) を証明せよ.

例 1.2.

(1) $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{9-x^2}}\,dx = \sin^{-1}\frac{x}{3}.$

(2) $\displaystyle\int \frac{2}{4+x^2}\,dx = 2\int \frac{1}{2^2+x^2}\,dx = \tan^{-1}\frac{x}{2}.$

(3) $\displaystyle\int \tan x\,dx = \int \frac{\sin x}{\cos x}\,dx = -\int \frac{(\cos x)'}{\cos x}\,dx = -\log|\cos x\,|.$

2 置換積分と部分積分

置換積分

x の関数 $f(x)$ において, その変数 $x = g(t)$ が変数 t の関数であるとき次の積分公式が成り立つ.

定理 2.1 (置換積分の公式). 関数 $f(x)$ が連続, $g(t)$ が微分可能, かつその導関数 $g'(t)$ が連続であるとき,

$$\int f(x)\,dx = \int f(g(t))g'(t)\,dt.$$

証明 $f(x)$ の不定積分を $F(x)$ とすると, 合成関数 $F(g(t))$ について,

$$\frac{d}{dt}F(g(t)) = \frac{dF}{dx}\frac{dx}{dt} = f(x)g'(t) = f(g(t))g'(t).$$

したがって,

$$\int f(g(t))g'(t)\,dt = F(g(t)) = F(x) = \int f(x)\,dx.$$

□

注 2.1. 実際の計算においては，　$x = g(t)$ を微分し，$\dfrac{dx}{dt} = g'(t)$ から分母をはらった $dx = g'(t)dt$ を左辺に代入すればよい.

置換積分の公式を利用して次のように不定積分を求めることができる.

例 2.1. 次の不定積分を求めよ.

(1)　$(2x+1)^7$　(2)　xe^{x^2}　(3)　$x\sqrt{x^2-1}$　(4)　$\dfrac{\sin\ x}{\cos^2 x}$

解

(1)　$t = 2x + 1$ とおくと

$$\int (2x+1)^7\,dx = \int t^7\,\frac{1}{2}\,dt = \frac{1}{2}\int t^7\,dt = \frac{1}{16}t^8 = \frac{1}{16}\,(2x+1)^8.$$

(2)　$t = x^2$ とおくと $dt = 2xdx$ だから

$$\int xe^{x^2}\,dx = \int e^t\frac{1}{2}\,dt = \frac{1}{2}\,e^t = \frac{1}{2}\,e^{x^2}.$$

(3)　$t = x^2 - 1$ とおくと $dt = 2xdx$ だから

$$\int x\sqrt{x^2-1}\,dx = \int \sqrt{t}\,\frac{1}{2}\,dt = \frac{1}{2}\int \sqrt{t}\,dt = \frac{1}{3}\,t^{\frac{3}{2}} = \frac{1}{3}\,(x^2-1)^{\frac{3}{2}}.$$

(4)　$t = \cos x$ とおくと $dt = -\sin x dx$ だから

$$\int \frac{\sin\ x}{\cos^2 x}\,dx = -\int \frac{1}{t^2}\,dt = \frac{1}{t} = \frac{1}{\cos x}.$$

問 2.1. 次の関数の不定積分を求めよ.

(1)　$x^2e^{x^3}$　(2)　$\sin 2x\ \cos 4x$　(3)　$\dfrac{x^3}{x^2+4}$　(4)　$\dfrac{e^x}{1+e^x}$

(5)　$\dfrac{\sin x}{2+\cos x}$

部分積分

置換積分の公式とならんで，積分の計算に有力な手段となるのが部分積分の公式である.

定理 2.2 (部分積分の公式)． 関数 $f'(x), g'(x)$ が連続のとき

$$\int f'(x)g(x)\,dx = f(x)g(x) - \int f(x)g'(x)\,dx.$$

証明　積の微分公式より

$$\{f(x)g(x)\}' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x).$$

両辺を積分すると

$$f(x)g(x) = \int f'(x)g(x)\,dx + \int f(x)g'(x)\,dx.$$

したがって

$$\int f'(x)g(x)\,dx = f(x)g(x) - \int f(x)g'(x)\,dx.$$

□

例 2.2. 次の不定積分を求めよ.

(1) $\log x$ (2) $x\cos x$ (3) $\sin^{-1} x$

解

(1) $\displaystyle\int \log x\,dx = \int 1\cdot\log x\,dx = x\log x - \int x\cdot\frac{1}{x}\,dx = x\log x - \int dx = x\log x - x.$

(2) $\displaystyle\int x\cos x\,dx = x\sin x - \int \sin x\,dx = x\sin x + \cos x.$

(3) $\displaystyle\int \sin^{-1} x\,dx = x\sin^{-1} x - \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx.$

$t = 1 - x^2$ とおくと $-2xdx = dt$ だから

$$\int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = -\int \frac{1}{2\sqrt{t}}\,dt = -\sqrt{t} = -\sqrt{1-x^2}.$$

したがって

$$\int \sin^{-1} x\,dx = x\sin^{-1} x + \sqrt{1-x^2}.$$

問 2.2. 次の関数の不定積分を求めよ.

(1) xe^x (2) $x\sin x$ (3) $\tan^{-1} x$ (4) $\log(x^2+1)$

例 2.3. 不定積分 $\displaystyle\int e^x \sin x\,dx$ を求めよ.

解

$$\int e^x\sin x\,dx = e^x\sin x - \int e^x\cos x\,dx = e^x\sin x - \left(e^x\cos x + \int e^x\sin x\,dx\right).$$

したがって

$$\int e^x\sin x\,dx = \frac{e^x(\sin x - \cos x)}{2}.$$

問 2.3. 次の関数の不定積分を求めよ.

(1) x^2e^x (2) $e^x\cos x$ (3) $x^2\sin x$

例 2.4.

(1) n を 2 以上の自然数としたとき

$$\int \cos^n x\,dx = \frac{1}{n}\cos^{n-1} x \sin x + \frac{n-1}{n}\int \cos^{n-2} x\,dx$$

を示せ.
(2) 不定積分 $\int \cos^3 x\,dx$ を求めよ.

解. (1)

$$\begin{aligned}\int \cos^n x\,dx &= \int \cos^{n-1} x \cos x\,dx = \cos^{n-1} x \sin x + (n-1)\int \cos^{n-2} x \sin^2 x\,dx \\ &= \cos^{n-1} x \sin x + (n-1)\int \cos^{n-2} x\,dx - (n-1)\int \cos^n x\,dx.\end{aligned}$$

したがって, 右辺の第 3 項を左辺に移項し, n で割ればよい.
(2)　　(1) で求めた式から,

$$\int \cos^3 x\,dx = \frac{1}{3}\cos^2 x \sin x + \frac{2}{3}\int \cos x\,dx = \frac{1}{3}\cos^2 x \sin x + \frac{2}{3}\sin x.$$

注 2.2. $\cos x$ の 3 倍角の公式を利用してもよい.

問 2.4. $\int \sin^4 x\,dx$ を例 2.4 と同様のやり方で求めよ.

問 2.5. 次の不定積分の漸化式をつくれ.

(1) $I_n = \int x^n e^{-x}\,dx$　(2) $I_n = \int (\log x)^n\,dx$　(3) $I_n = \int x^n a^x\,dx$　$(a > 0,\ a \neq 1)$

3　いろいろな関数の積分

有理関数の積分

分数式を積分することは, 速さ (速さの 2 乗) に比例する抵抗を受けて落下する物体や, 上限を設定した生物の生息数を扱うときなどに現れる. ここで分数式というのは, $P(x)$, $Q(x)$ を多項式として, $\dfrac{Q(x)}{P(x)}$ という形をした式のことである.

実際に必要なのは, **{ 分子の次数 }** $<$ **{ 分母 の次数 }** の場合である :

{$Q(x)$ の次数 } $\geqq$ {$P(x)$ の次数 } の場合は,

1. $Q(x) \div P(x)$ を計算して, 商 $S(x)$, 余り $R(x)$ を出す;

$$Q(x) = P(x)S(x) + R(x),$$

2. これより

$$\frac{Q(x)}{P(x)} = S(x) + \frac{R(x)}{P(x)} \quad \cdots\cdots (*)$$

3. $S(x)$ は多項式ですぐに積分できるし, $R(x)$ の次数 $<$ $P(x)$ の次数になっている.

例 3.1. $\dfrac{x^2-3x+4}{x+1}$ を $(*)$ の形にせよ.

$(x^2-3x+4) \div (x+1)$ を計算すると, 商は $x-4$ で, 余りが 8 だから

$$x^2-3x+4 = (x+1)(x-4)+8.$$

したがって,

$$\frac{x^2-3x+4}{x+1} = x-4+\frac{8}{x+1}.$$

問 3.1. $\displaystyle\int \frac{x^2-3x+4}{x+1}dx$ を計算せよ.

複雑な式はいくらでも考えられるが, 現時点で興味あることではないので, ここでは 1 次式 か 2 次式の積に因数分解できる場合に限る. したがって, 次の 3 つが基本形であるのでしっかり覚えておくことが必要である:

(1) $\displaystyle\int \frac{1}{x+a}dx = \log|x+a|,$

(2) $\displaystyle\int \frac{1}{x^2+ax+b}dx = \int \frac{1}{(x+\frac{a}{2})^2+\alpha} = \frac{1}{\sqrt{\alpha}}\tan^{-1}\frac{x+\frac{a}{2}}{\sqrt{\alpha}}$ (ただし, $\alpha = b-\dfrac{a^2}{4} > 0$),

(3) $\displaystyle\int \frac{cx+d}{x^2+ax+b}dx.$

(3) については

$$\frac{cx+d}{x^2+ax+b} = \frac{\frac{c}{2}(x^2+ax+b)'}{x^2+ax+b} + \frac{d-\frac{ac}{2}}{x^2+ax+b}$$

と 2 つに分けて積分する. 前半は $\dfrac{c}{2}\log|x^2+ax+b|$ であるし, 後半は (2) の積分となる. たとえば,

$$\begin{aligned}\int \frac{2}{3x-4}dx &= \frac{2}{3}\log|3x-4|,\\ \int \frac{1}{x^2+2x+4}dx &= \int \frac{1}{(x+1)^2+(\sqrt{3})^2}dx = \frac{1}{\sqrt{3}}\tan^{-1}\left(\frac{x+1}{\sqrt{3}}\right).\end{aligned}$$

などが, あまり時間をとらずに計算できることが望ましい.

また, $\displaystyle\int \frac{x-5}{x^2+4}dx$ などは次のようにする.

$$\begin{aligned}\int \frac{x-5}{x^2+4}dx &= \int \frac{x}{x^2+4}dx - 5\int \frac{1}{x^2+4}dx \\ &= \frac{1}{2}\log(x^2+4) - \frac{5}{2}\tan^{-1}\left(\frac{x}{2}\right).\end{aligned}$$

同様に

$$\begin{aligned}\int \frac{x-5}{x^2-2x+5}dx &= \int \frac{(x-1)-4}{(x-1)^2+4}dx \\ &= \int \frac{x-1}{(x-1)^2+2^2}dx - 4\int \frac{1}{(x-1)^2+4}dx \\ &= \frac{1}{2}\log(x^2-2x+5) - 2\tan^{-1}\left(\frac{x-1}{2}\right).\end{aligned}$$

問 3.2. 今説明した手順で積分せよ.

(1) $\displaystyle\int \frac{2x+5}{x-1}dx$　　(2) $\displaystyle\int \frac{3x^2-2x+5}{2x+3}dx$

(3) $\displaystyle\int \frac{2x^2+5}{x^2+1}dx$　　(4) $\displaystyle\int \frac{x^3+2x+5}{x^2+4x+13}dx$

さて, もう少し複雑な式を積分しよう.

例 3.2. $\displaystyle\int \frac{x^2+x+1}{x^2-3x+2}dx$ は, どのようにしたら計算できるだろうか.

前と同じく, まず

$$\int \frac{x^2+x+1}{x^2-3x+2}dx = \int \left(1 + \frac{4x-1}{x^2-3x+2}\right) dx$$

とする. 次の重要なステップは, **分母を因数分解する** ことである.

$$x^2-3x+2 = (x-1)(x-2).$$

さらに重要なステップは $\dfrac{4x-1}{x^2-3x+2}$ を**部分分数に分ける** ことである. これは

$$\frac{4x-1}{x^2-3x+2} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-2}$$

という形にすることである. この形になれば積分は簡単である!

たとえば, $x^2-4x+1=(x-2+\sqrt{3})(x-2-\sqrt{3})$ のように, 有理数ではむりだが, 実数の範囲で因数分解できるものに注意する.
一方, $x^2+6x+10$ などは, 実数の範囲で因数分解できないが, $x^2+6x+10=(x+3)^2+1$ で, 積分が $\tan^{-1}$ になるケースであるから, 安心してよい.

部分分数への分け方： $\dfrac{Q(x)}{P(x)}$ は, 次の形の分数式に分けられる.

$$\frac{A}{(ax+b)^n},\quad \frac{Bx+C}{(ax^2+bx+c)^n}$$

ここで, $ax+b$, ax^2+bx+c は $P(x)$ の因数である.

例 3.3. 部分分数への分け方は次のようになる.

1. $$\frac{4x-3}{(5x-4)(3x+7)^3}=\frac{A}{5x-4}+\frac{B}{(3x+7)^3}+\frac{C}{(3x+7)^2}+\frac{D}{3x+7}.$$

2. $$\frac{4x^2+1}{(x^2+x+3)^2(x-2)}=\frac{Ax+B}{(x^2+x+3)^2}+\frac{Cx+D}{x^2+x+3}+\frac{E}{x-2}.$$

注意：

分母が 1 次式の巾乗 $\longrightarrow$ 分子は定数 : A
分母が 2 次式の巾乗 $\longrightarrow$ 分子は 1 次式 : $Ax+B$

係数 $A, B, \cdots$ の決め方：
方法 1. 分母を払い, 両辺の係数を比較する.
方法 2. 分母を払い, x に適当な値を代入する.

例 3.4. $\dfrac{4x-1}{x^2-3x+2}$ を部分分数に分けよ.

(i) まず $x^2-3x+2=(x-1)(x-2)$ と因数分解し,

$$\frac{4x-1}{x^2-3x+2}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x-2}$$

とおく.
(ii) 両辺に $(x-1)(x-2)$ をかけて分母を払う.

$$4x-1=A(x-2)+B(x-1)$$

(iii) 方法 1 : 右辺を展開すると,

$$4x-1=(A+B)x+(-2A-B)$$

となり, 係数を比較すると

$$4 = A + B, \ -1 = -2A - B.$$

これより

$$A = -3, \ B = 7.$$

したがって

$$\frac{4x-1}{x^2-3x+2} = -\frac{3}{x-1} + \frac{7}{x-2}.$$

方法 2： $x = 1$ を代入： $3 = -A \longrightarrow A = -3$
$x = 2$ を代入： $7 = B \longrightarrow B = 7$

以上から

$$\begin{aligned}\int \frac{4x-1}{x^2-3x+2}dx &= \int \left(-\frac{3}{x-1} + \frac{7}{x-2}\right) dx \\ &= -3\int \frac{1}{x-1}dx + 7\int \frac{1}{x-2}dx \\ &= -3\log|x-1| + 7\log|x-2|.\end{aligned}$$

例 3.5. 不定積分 $\displaystyle\int \frac{1}{x^3-1}\,dx$ を求めよ.

解 $x^3 - 1 = (x-1)(x^2+x+1)$ と因数分解されるので,

$$\frac{1}{x^3-1} = \frac{A}{x-1} + \frac{Bx+C}{x^2+x+1}$$

とおく. 両辺に $x^3 - 1$ をかけて

$$1 = A(x^2+x+1) + (Bx+C)(x-1).$$

これが恒等式だから, 係数比較して A, B, C を求めると

$$A = \frac{1}{3}, \quad B = -\frac{1}{3}, \quad C = -\frac{2}{3}$$

だから

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{x^3-1}\,dx &= \frac{1}{3}\left(\int \frac{1}{x-1}\,dx - \frac{1}{2}\int \frac{2x+1}{x^2+x+1}\,dx - \frac{3}{2}\int \frac{1}{(x+\frac{1}{2})^2 + (\frac{\sqrt{3}}{2})^2}\,dx\right) \\ &= \frac{1}{3}\left\{\log|\,x-1\,| - \frac{1}{2}\log(x^2+x+1) - \frac{3}{2}\,\frac{2}{\sqrt{3}}\tan^{-1}\frac{2}{\sqrt{3}}\left(x+\frac{1}{2}\right)\right\} \\ &= \frac{1}{6}\log\frac{(x-1)^2}{x^2+x+1} - \frac{1}{\sqrt{3}}\tan^{-1}\frac{2x+1}{\sqrt{3}}.\end{aligned}$$

問 3.3. 積分せよ.

(1) $\dfrac{3x-1}{2x^2-5x-12}$　　(2) $\dfrac{2}{x^4-1}$　　(3) $\dfrac{x-1}{x^2(x^2-2x+2)}$

三角関数の積分

(1) $I=\int R(\sin x)\cos x\,dx.$

$\sin x=t$ とおくと $dt=\cos x dx$ だから

$$I=\int R(t)\,dt$$

となり, 有理関数の積分に帰着する.

(2) $I=\int R(\cos x)\sin x\,dx.$

$\cos x=t$ とおくと $dt=-\sin x dx$ だから

$$I=-\int R(t)\,dt$$

となり, 有理関数の積分に帰着する.

(3) $I=\int R(\cos x,\sin x)\,dx.$

$\tan\dfrac{x}{2}=t$ とおくと

$$\begin{aligned}\sin x &= 2\tan\frac{x}{2}\cos^2\frac{x}{2}=\frac{2\tan\frac{x}{2}}{1+\tan^2\frac{x}{2}}=\frac{2t}{1+t^2}.\\ \cos x &= 2\cos^2\frac{x}{2}-1=\frac{2}{1+\tan^2\frac{x}{2}}-1=\frac{1-\tan^2\frac{x}{2}}{1+\tan^2\frac{x}{2}}=\frac{1-t^2}{1+t^2}.\\ dx &= 2\cos^2\frac{x}{2}dt=\frac{2}{1+\tan^2\frac{x}{2}}dt=\frac{2}{1+t^2}dt.\end{aligned}$$

だから

$$I=\int R\left(\frac{1-t^2}{1+t^2},\frac{2t}{1+t^2}\right)\frac{2}{1+t^2}\,dt$$

となり, 有理関数の積分に帰着する.

(4) $J=\int R(\tan x)\,dx$

$\tan x=t$ とおくと

$$dx=\frac{1}{1+\tan^2 x}dt.$$

だから

$$J=\int R\,(t)\frac{1}{1+t^2}\,dt$$

となり, 有理関数の積分に帰着する.

例 3.6. 次の関数の不定積分を求めよ.

(1) $\sin^2 x\cos x$ (2) $\dfrac{\sin x}{\cos^2 x}$ (3) $\dfrac{1}{\sin x}$ (4) $\tan^3 x$

解 (1) $\sin x = t$ とおくと, $dt = \cos x dx$ だから

$$\int \sin^2 x \cos x \, dx = \int t^2 \, dt = \frac{1}{3}t^3 = \frac{1}{3}\sin^3 x.$$

(2) $\cos x = t$ とおくと, $dt = -\sin x dx$ だから,

$$\int \frac{\sin x}{\cos^2 x} \, dx = -\int \frac{1}{t^2} \, dt = \frac{1}{t} = \frac{1}{\cos x}.$$

(3) $\tan \dfrac{x}{2} = t$ とおくと

$$\int \frac{1}{\sin x} \, dx = \int \frac{1+t^2}{2t} \frac{2}{1+t^2} \, dt = \int \frac{1}{t} \, dt = \log \mid t \mid = \log \left| \tan \frac{x}{2} \right|.$$

(4) $\tan x = t$ とおくと

$$\begin{aligned} \int \tan^3 x \, dx &= \int \frac{t^3}{1+t^2} \, dt = \int (t - \frac{t}{1+t^2}) \, dt \\ &= \frac{t^2}{2} - \frac{1}{2}\log(1+t^2) = \frac{1}{2}\tan^2 x - \frac{1}{2}\log(1+\tan^2 x). \end{aligned}$$

問 3.4. 次の関数の不定積分を求めよ.

(1) $\dfrac{1}{1+\cos x + \sin x}$ (2) $\sin^3 x \cos^3 x$ (3) $\dfrac{1}{1-\tan^2 x}$

無理関数の積分

根号を含む無理関数の積分は複雑であるが, 三角関数の積分と同様に適当な置換により, 有理関数の積分か, 既知の場合に帰着させることができる.

(1) $\displaystyle\int R\left(x, \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right) dx \qquad (ad - bc \neq 0)$

$\sqrt[n]{\dfrac{ax+b}{cx+d}} = t$ とおくと

$$x = \frac{dt^n - b}{a - ct^n}, \qquad dx = \frac{n(ad-bc)t^{n-1}}{(a-ct^n)^2} dt$$

となり, 有理関数の積分になる.

(2) $\displaystyle\int R(x, \sqrt{ax^2+bx+c}) \, dx \qquad (a > 0)$

$\sqrt{ax^2+bx+c} = t - \sqrt{a}x$ とおくと

$$x = \frac{t^2 - c}{2\sqrt{a}t + b}, \qquad dx = \frac{2(\sqrt{a}t^2 + bt + \sqrt{a}c)}{(2\sqrt{a}t + b)^2}dt$$

となり, 有理関数の積分になる.

(3) $\int R(x, \sqrt{ax^2 + bx + c})\,dx \quad (a < 0, \quad b^2 - 4ac > 0)$
$ax^2 + bx + c = 0$ の 2 つの実数解を $\alpha, \beta(\alpha < \beta)$ とすると

$$\sqrt{ax^2 + bx + c} = \sqrt{a(x - \alpha)(x - \beta)} = (x - \alpha)\sqrt{\frac{a(x - \beta)}{x - \alpha}} \qquad (\alpha < x < \beta)$$

だから, $\sqrt{\dfrac{a(x - \beta)}{x - \alpha}} = t$ とおくと (1) の積分になる.

また, 次の 3 つの場合は三角関数の積分に帰着される.

(4) $\int R(x, \sqrt{x^2 + a^2})\,dx$ のとき　$x = a\tan t\ (-\dfrac{\pi}{2} < t < \dfrac{\pi}{2})$ とおけばよい.

(5) $\int R(x, \sqrt{x^2 - a^2})\,dx$ のとき　$x = \dfrac{a}{\cos t}\ (0 \leqq t < \dfrac{\pi}{2})$ とおけばよい.

(6) $\int R(x, \sqrt{a^2 - x^2})\,dx$ のとき　$x = a\sin t\ (-\dfrac{\pi}{2} \leqq t \leqq \dfrac{\pi}{2})$ とおけばよい.

例 3.7. 次の不定積分を求めよ.

(1) $\sqrt{\dfrac{2 + x}{2 - x}}$　　(2) $\sqrt{x^2 + 4}$　　(3) $\sqrt{a^2 - x^2} \quad (a > 0)$

解 (1) $\sqrt{\dfrac{2 + x}{2 - x}} = t$ とおくと

$$\begin{aligned} \int \sqrt{\frac{2 + x}{2 - x}}\,dx &= \int \frac{8t^2}{(t^2 + 1)^2}\,dt = -\frac{4t}{t^2 + 1} + \int \frac{4}{t^2 + 1}\,dt \\ &= -\frac{4t}{t^2 + 1} + 4\tan^{-1} t = -\sqrt{4 - x^2} + 4\tan^{-1}\sqrt{\frac{2 + x}{2 - x}}. \end{aligned}$$

(2) $\sqrt{x^2 + 4} = t - x$ とおくと

$$\begin{aligned} \int \sqrt{x^2 + 4}\,dx &= \int \frac{t^2 + 4}{2t}\frac{t^2 + 4}{2t^2}\,dt = \frac{1}{4}\int \frac{t^4 + 8t^2 + 16}{t^3}\,dt \\ &= \frac{1}{4}\left(\frac{t^2}{2} + 8\log|\,t\,| - \frac{16}{2t^2}\right) = \frac{t^2}{8} + 2\log|\,t\,| - \frac{2}{t^2} \\ &= \frac{1}{2}(x\sqrt{x^2 + 4} + 4\log|\,x + \sqrt{x^2 + 4}\,|). \end{aligned}$$

(3) $x = a\sin t \quad \left(-\dfrac{\pi}{2} \leqq t \leqq \dfrac{\pi}{2}\right)$ とおくと

$$\begin{aligned}\int \sqrt{a^2 - x^2}\,dx &= \int a^2\cos^2 t\,dt = a^2 \int \frac{\cos 2t + 1}{2}\,dt \\ &= \frac{a^2}{2}\left(\frac{\sin 2t}{2} + t\right) = \frac{1}{2}\left(a^2\sin^{-1}\frac{x}{a} + x\sqrt{a^2 - x^2}\right).\end{aligned}$$

問 3.5. 次の関数の不定積分を求めよ．

(1) $\dfrac{\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}$　(2) $\dfrac{1}{1+\sqrt{x^2+1}}$　(3) $\dfrac{1}{x^2\sqrt{1-x^2}}$　(4) $x^2\sqrt{a^2-x^2}$

第3章　練習問題

1. 次の関数の不定積分を求めよ．

(1) $x(2x+1)^8$　(2) $\sin(3x+1)$　(3) $\dfrac{(\log x)^2}{x}$

(4) $\dfrac{e^x}{e^{2x}-1}$　(5) $x\log x$　(6) $x\tan^{-1}x$

(7) $\dfrac{1}{x^2-2x-3}$　(8) $\dfrac{1}{x^4+1}$　(9) $\dfrac{1}{x^2-1}$

(10) $\dfrac{1}{(x^2+1)(x^2+4)}$　(11) $\dfrac{x+3}{x^2+x+4}$　(12) $\dfrac{\sin x}{2+\tan^2 x}$

(13) $\dfrac{\cos^3 x}{\sin^2 x}$　(14) $\sin(\log x)$　(15) $\tan^{-1}\sqrt{x}$

(16) $\dfrac{1}{x\sqrt{1+x^2}}$　(17) $\dfrac{\sqrt{1+\log x}}{x}$　(18) $\sqrt{4x-x^2}$

2. 次の等式を証明せよ．

(1) $\displaystyle\int f(x)\,dx = F(x)$ とするとき

$$\int f(ax+b)\,dx = \frac{1}{a}F(ax+b) \quad (a \neq 0)$$

(2)

$$\int f'(x)\{f(x)\}^a\,dx = \begin{cases} \dfrac{\{f(x)\}^{a+1}}{a+1} & (a \neq -1 \text{ のとき}) \\ \log|f(x)| & (a = -1 \text{ のとき}) \end{cases}$$

注 (1),(2) は公式としても利用する．

3. 次の漸化式を証明せよ．

(1) $I(m,n) = \displaystyle\int \sin^m x\cos^n x\,dx$ とおくと

$$I(m,n) = \frac{\sin^{m+1}x\cos^{n-1}x}{m+1} + \frac{n-1}{m+1}I(m+2,n-2) \qquad (m+n \neq 0)$$

(2) $I_n = \displaystyle\int \frac{\sin(2n-1)x}{\sin x}\,dx$ とおくと

$$(n-1)(I_n - I_{n-1}) = \sin 2(n-1)x \qquad (n \geqq 2)$$