第2章

微分法

1 微分係数と導関数

関数 $f(x)$ は $x=a$ を含むある開区間で定義されているとする[1]．極限

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

が有限確定値をとるとき，この関数は $x=a$ で**微分可能**であるといい，この値を a における**微分係数** とよび $f'(a)$ で表す．

微分係数 $f'(a)$ は，幾何的には $y=f(x)$ で表される曲線の $(a,f(a))$ における接線の傾きを意味する．すなわち，この点における接線の方程式は

$$y-f(a)=f'(a)(x-a)$$

で与えられる．これらについては，多くの読者はすでに高等学校で学んだことであろう．以下，微分係数についていくつかの注意を述べる．

上の微分係数の定義式を $a+h=x$ とおいて，a と x との式に書き直せば，$h\to 0$ と $x\to a$ とは同じことであるから，それは

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

と書き表される．

注 1.1. 関数 $f(x)$ が $x=a$ で微分可能であれば，この点で $f(x)$ は連続である．

実際 $x\to a$ のとき $\displaystyle\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ が有限確定値をもち，しかも，$x-a\to 0$ である．したがって，$\displaystyle\lim_{x\to a}\{f(x)-f(a)\}=0$. これは $f(x)$ が $x=a$ で連続であることを意味する．□

[1]もちろん，その区間よりも，広いところで定義されていても差し支えない．微分可能性は a のごく近くでの $f(x)$ の振舞いで定まるものであるから，このような述べ方をするのである．

注 1.2. 微分係数の定義式で $h \to 0$ は, h が 0 にどのような近づき方をしても, という意味を含んでいる．したがって, 関数 $f(x)$ が $x = a$ で微分可能であれば, もちろん

$$\lim_{h \to +0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

も同じ有限確定値をもつ (その値は $f'(a)$). しかし逆に上の式が有限確定値をもっても

$$\lim_{h \to -0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

が有限確定値をもたないか, 上の二式が異なる値を持つ場合も存在し, そのとき関数 $f(x)$ は $x = a$ で微分可能ではない．

問 1.1. $f(x) = |x|$, $a = 0$ として上の注 1.2 を確かめよ．

注 1.2 の式が有限確定値をとるとき, $x = a$ で **右微分可能** といい, その値を **右微分係数** とよび $f'_+(a)$ で表す．同様にして, **左微分可能性**および**左微分係数** $f'_-(a)$ を定義する．

明らかに $x = a$ における右微分係数 $f'_+(a)$ および左微分係数 $f'_-(a)$ が存在してそれらが一致すれば, その関数 $f(x)$ は a において微分可能で $f'_+(a) = f'_-(a) = f'(a)$ である．

関数 $f(x)$ がその定義域の各点で微分可能であるとき, 各点 x に対して, その点での微分係数 $f'(x)$ を対応させることにより, 新たな関数を得る．これを $f(x)$ の **導関数** とよび, $f'(x)$ あるいは $\dfrac{df}{dx}(x)$, $\dfrac{df(x)}{dx}$ 等の記号で表す．また, $y = f(x)$ とおいたときには $\dfrac{dy}{dx}$ と表す[2] こともある．また, 電気などの書物では $\dot{y}$ という表し方[3] をしているものもあるが, 本書では用いない．

微分係数や導関数を求めることを微分するという．

2　微分の計算 1

この節の内容は多くの読者にとっては既知の事実であろう．そのような読者はこの節をとばして読み進み, 公式の確認の必要が生じたときに立ち返ればよい．

定理 2.1 (導関数の線形性)．$f(x)$, $g(x)$ がともに同じ区間で微分可能であるとき, スカラー α, β に対して, 関数 $\alpha f(x) + \beta g(x)$ も同じ区間で微分可能であり

$$\{\alpha f(x) + \beta g(x)\}' = \alpha f'(x) + \beta g'(x)$$

となる．

証明　左辺を定義どおり書いてみれば第 1 章定理 1. 1 より明らか．□

[2] ライプニッツによる記号
[3] ニュートンによる記号

多項式関数の導関数　多項式で表示される関数

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0 \quad (a_0, \ldots, a_n \text{は定数})$$

について，この導関数を知るためには定理 2.1 より x^m $(m = 0, 1, 2, \ldots)$ の導関数を知ればよい．したがって，

$$\lim_{h \to 0} \frac{(x+h)^m - x^m}{h}$$

の値を求めればよい．恒等式

$$X^m - Y^m = (X - Y)(X^{m-1} + X^{m-2}Y + \cdots + Y^{m-1})$$

に注意すれば

$$\lim_{h \to 0} \frac{(x+h)^m - x^m}{h} = \lim_{h \to 0} \left\{(x+h)^{m-1} + (x+h)^{m-2}x + \cdots + x^{m-1}\right\} = mx^{m-1}. \quad \square$$

以上まとめると，

定理 2.2. 多項式関数

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_{n-i}x^{n-i} + \cdots + a_0$$

の導関数は

$$f'(x) = na_n x^{n-1} + (n-1)a_{n-1}x^{n-2} + \cdots + (n-i)a_{n-i}x^{n-i-1} + \cdots + a_1$$

である．

積および商の微分の公式　次に関数の積および商の微分の公式を述べよう．

定理 2.3 (積の微分)． 2つの関数 $f(x)$, $g(x)$ がともに同じ区間で微分可能であればそれらの積 $f(x)g(x)$ もその区間で微分可能であり

$$\{f(x)g(x)\}' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

が成り立つ．

証明

$$\begin{aligned}
&\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x)}{h} \\
= \ &\lim_{h \to 0} \left\{ \frac{f(x+h) - f(x)}{h} g(x+h) + f(x)\frac{g(x+h) - g(x)}{h} \right\} \\
= \ &\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \cdot \lim_{h \to 0} g(x+h) + f(x) \cdot \lim_{h \to 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} \\
= \ &f'(x)g(x) + f(x)g'(x)
\end{aligned}$$

であるから $f(x)g(x)$ は微分可能で $\{f(x)g(x)\}' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$ が成り立つ．□

関数の商の微分の公式を得るために，まず次の補題を示そう．

補題 2.4. 関数 $f(x)$ がある区間で微分可能で，$f(x) \neq 0$ であれば，$\dfrac{1}{f(x)}$ も微分可能で

$$\left(\frac{1}{f(x)}\right)' = -\frac{f'(x)}{f(x)^2}$$

が成り立つ．

証明

$$\begin{aligned}\lim_{h\to 0}\frac{\frac{1}{f(x+h)}-\frac{1}{f(x)}}{h} &= \lim_{h\to 0}\left\{-\frac{f(x+h)-f(x)}{hf(x+h)f(x)}\right\}\\ &= -\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\cdot\lim_{h\to 0}\frac{1}{f(x+h)f(x)}\end{aligned}$$

であるから $\dfrac{1}{f(x)}$ は微分可能で，その導関数は $-\dfrac{f'(x)}{f(x)^2}$ である．□

定理 2.5 (商の微分)． $f(x)$, $g(x)$ が微分可能で $g(x) \neq 0$ とする．このとき $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ も微分可能で

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g(x)^2}$$

が成り立つ．

証明　補題 2.4 より $\dfrac{1}{g(x)}$ は微分可能．したがって定理 2.3 より $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ も微分可能で，

$$\begin{aligned}\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' &= f'(x)\frac{1}{g(x)} + f(x)\left(\frac{1}{g(x)}\right)'\\ &= \frac{f'(x)}{g(x)} - \frac{f(x)g'(x)}{g(x)^2}\\ &= \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g(x)^2}.\ \square\end{aligned}$$

有理式の微分については，次の例のように，直接上の定理を使うよりも，割り算を先に実行してから，導関数を計算した方が簡単である場合も多い．

例 2.1. $\dfrac{x^4 + 2x^3 + x^2 + 1}{x + 1}$ の導関数を求めよ．

解　$\dfrac{x^4+2x^3+x^2+1}{x+1}=x^3+x^2+\dfrac{1}{x+1}$ であるから,

$$\left(\frac{x^4+2x^3+x^2+1}{x+1}\right)'=3x^2+2x-\frac{1}{(x+1)^2}. \ \square$$

問 2.1. 次の関数の導関数を求めよ.

(1) $\dfrac{x+2}{x^2+1}$　　(2) $\dfrac{(x^2-3)(x+1)}{x+2}$　　(3) $\dfrac{2x}{x^3+x+2}$

合成関数の微分　次に関数の合成について微分がどう振舞うかを調べる.

> **定理 2.6.** $y=f(u)$, $u=g(x)$ はともに微分可能な関数で $g(x)$ の値域は $f(u)$ の定義域に含まれているとする. このとき, 合成関数 $f(g(x))$ も微分可能で
>
> $$\{f(g(x))\}'=f'(u)g'(x)$$
>
> が成立する.

注 2.1. $u=g(x)$, $y=f(u)$ とおいて 定理 2.6 の式をライプニッツ流の記法で表せば

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\frac{du}{dx}$$

となる. これは, あたかも分数を約分したような形になっているので記憶しやすいと思う.

定理 2.6 の証明　まず理解の手助けのため, 論理的には欠陥があるが, わかりやすい "証明" を (1) で与え, その後 (2) において正しい証明を行う.

(1)　$\dfrac{f(g(x+h))-f(g(x))}{h}$ で $h\to 0$ のときの極限を知りたいのであるが, $k=g(x+h)-g(x)$ とおくと

$$\frac{f(g(x+h))-f(g(x))}{h}=\frac{f(u+k)-f(u)}{k}\frac{g(x+h)-g(x)}{h},$$

また $h\to 0$ のとき, $k\to 0$ である (なぜか？理由を考えよ) ので $\{f(g(x))\}'=f'(u)g'(x)$ を得る.

(2)　上の証明で $h\neq 0$ であっても $k=0$ となる可能性がある. このとき上の式は意味を失ってしまう. このようなトラブルを避けるため以下のように証明する. x を固定して

$$\varepsilon(h)=\frac{g(x+h)-g(x)}{h}-g'(x)$$

と定めると $h\to 0$ のとき, $\varepsilon(h)\to 0$ であり $g(x+h)=g(x)+hg'(x)+h\varepsilon(h)$. 同様にして

$$\delta(k)=\begin{cases}\dfrac{f(u+k)-f(u)}{k}-f'(u) & (k\neq 0)\\ 0 & (k=0)\end{cases}$$

とすると，k が 0 であってもなくても

$$f(u+k)-f(u)=kf'(u)+k\delta(k)$$

である．また $k\to 0$ のとき微分可能であるから $\delta(k)\to 0$．さて，

$$f(g(x+h))-f(g(x))=f(u+hg'(x)+h\varepsilon(h))-f(u)$$

であるが，ここで $k=hg'(x)+h\varepsilon(h)$ とおけば

$$\begin{aligned} f(g(x+h)) &- f(g(x))=f(u+k)-f(u) \\ &= kf'(u)+k\delta(k)=\{hg'(x)+h\varepsilon(h)\}f'(u)+\{hg'(x)+h\varepsilon(h)\}\delta(k) \end{aligned}$$

であり，$h\to 0$ のとき k のおき方から $k\to 0$ である．したがって，

$$\begin{aligned} \lim_{h\to 0}\frac{f(g(x+h))-f(g(x))}{h} &= \lim_{h\to 0}[\{g'(x)+\varepsilon(h)\}f'(u)+\{g'(x)+\varepsilon(h)\}\delta(k)] \\ &= g'(x)f'(u)\,. \quad \square \end{aligned}$$

Point: 微分をするとき，ほとんどが合成関数の微分の公式を使うので，しっかりと覚えよう！そして，与えられた関数を自分で合成関数としてとらえることができるように練習を繰り返そう．

問 2.2. 次の関数の導関数を求めよ．
(1)　$(x^2+1)^8$　　　(2)　$(x^4+x^2)^5+(x^8+1)^4$

三角関数の微分　まず $\sin x$ の導関数を求めよう．差分商 $\dfrac{\sin(x+h)-\sin x}{h}$ の $h\to 0$ としたときの極限を調べればよい．

3角関数の和 (差) を積で表示する公式を思い起こそう:

$$\sin A-\sin B=2\cos\frac{A+B}{2}\sin\frac{A-B}{2}\,.$$

これによって，

$$\begin{aligned} \lim_{h\to 0}\frac{\sin(x+h)-\sin x}{h} &= \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\cdot 2\cos\left(x+\frac{h}{2}\right)\sin\frac{h}{2} \\ &= \lim_{h\to 0}\cos\left(x+\frac{h}{2}\right)\cdot\lim_{h\to 0}\frac{\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}} \\ &= \cos x \quad \text{(第 1 章, 定理 4.3)} \end{aligned}$$

となる．また $\cos x=\sin\left(x+\dfrac{\pi}{2}\right)$ に注意して定理 2.6 を用いれば $\cos x$ の導関数が求まり，$\tan x=\dfrac{\sin x}{\cos x}$ に注意して定理 2.5 を用いれば $\tan x$ の導関数が得られる．よって次の公式を得る．

定理 2.7. (1) $(\sin x)' = \cos x$ (2) $(\cos x)' = -\sin x$ (3) $(\tan x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$

問 2.3. 定理 2.7 の公式 (2), (3) を証明せよ.

問 2.4. 次の関数の導関数を求めよ.
(1) $\sin(\cos x)$ (2) $\sin x^2$ (3) $\sin^2 x$

3 微分の計算 2

この節では, まず逆関数の微分法について説明し, その後指数関数, 対数関数および逆三角関数などの導関数を調べる.

定理 3.1 (逆関数の微分) . ある区間で定義された狭義の単調関数 $f(x)$ が連続で (したがって第 1 章, 定理 7.1 より逆関数 $f^{-1}(x)$ が存在する) , $x = a$ において微分可能, しかも $f'(a) \neq 0$ ならば, $f^{-1}(x)$ は $f(a)$ において微分可能で

$$\left(f^{-1}\right)'(f(a)) = \frac{1}{f'(a)}$$

である.

注 3.1. $y = f(x)$ とおけば, 逆関数の定義により $x = f^{-1}(y)$ であり, この書き方の下でライプニッツ流の記号で表せば

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{\dfrac{dy}{dx}}$$

と書け, 注 2.1 の式同様記憶しやすい形である.

証明 $b = f(a)$ とおこう. さらに, $f^{-1}(b+h) = a + k$ と書くとき, f^{-1} は連続であるから (第 1 章, 定理 7.1), $h \to 0$ のとき $k \to 0$ となる. また狭義の単調性より, $h \neq 0$ である限り $k \neq 0$ である. よって,

$$\begin{aligned}
\lim_{h \to 0} \frac{f^{-1}(b+h) - f^{-1}(b)}{h} &= \lim_{h \to 0} \frac{a + k - f^{-1}(b)}{f(a+k) - b} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{k}{f(a+k) - f(a)} \\
&= \frac{1}{f'(a)}
\end{aligned}$$

を得る. □

指数関数と対数関数の微分 $a > 0,\ a \neq 1$ として, 指数関数 $f(x) = a^x$ を考える. これは $a > 1$ ならば狭義の単調増加関数, $1 > a > 0$ ならば狭義の単調減少関数であるので, 第

1 章, 定理 7.1 により, $(0,\infty)$ で定義された逆関数をもつ．これが a を底とする対数関数 $\log_a x$ にほかならない．e を自然対数の底 (第 1 章, 例 1.3) とするとき, $\log_e x$ は $\log x$ と略記される．また, 工学系の書物では, これを $\ln x$ と書き表すことも多い．

さて指数関数 a^x の導関数を調べよう．$a^x = e^{x\log a}$ であるから e^x の導関数を知れば, 定理 2.6 により a^x の導関数も求まる．$\dfrac{e^{x+h}-e^x}{h} = e^x\dfrac{e^h-1}{h}$ であるから $\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{e^h-1}{h}$ の値がわかればよい．

補題 3.2. $\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{e^h-1}{h} = 1.$

証明　まず, $\displaystyle\lim_{h\to +0}\frac{e^h-1}{h} = 1$ を示す．$h>0$ ならば $e^h>1$ であるから, $e^h = 1+\dfrac{1}{t}$ $(t>0)$ とおくことができる．指数関数の連続性より, $h\to +0$ のとき $t\to +\infty$ である．$h = \log\left(1+\dfrac{1}{t}\right)$ より

$$\frac{e^h-1}{h} = \frac{\frac{1}{t}}{\log\left(1+\frac{1}{t}\right)} = \frac{1}{\log\left(1+\frac{1}{t}\right)^t}$$

となり, $\log x$ の連続性と第 1 章, 例 4.3 より

$$\lim_{t\to\infty}\log\left(1+\frac{1}{t}\right)^t = \log e = 1\,.$$

したがって $\displaystyle\lim_{h\to +0}\frac{e^h-1}{h} = 1\,.$

$h<0$ のときは, $-h=k$ とおくと

$$\frac{e^h-1}{h} = \frac{e^{-k}(1-e^k)}{-k} = \frac{e^k-1}{k}\frac{1}{e^k}$$

であるから, 前半で示したことを用いて,

$$\lim_{h\to -0}\frac{e^h-1}{h} = \lim_{k\to +0}\frac{e^k-1}{k}\frac{1}{e^k} = 1$$

をえる．したがって, 1 節の最後に述べたことより $\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{e^h-1}{h} = 1$ を得る．□

定理 3.3 (指数関数および対数関数の導関数)． e を自然対数の底, a を 1 以外の正の実数とするとき

(1)　$(e^x)' = e^x$

(2)　$(a^x)' = a^x\log a$

(3)　$(\log x)' = \dfrac{1}{x}$

(4)　$(\log_a x)' = \dfrac{1}{\log a}\dfrac{1}{x}$.

証明　(1)　上に述べたことで証明はすんでいる.

(2)　$(a^x)' = \left(e^{x\log a}\right)' = \log a \left(e^{x\log a}\right) = a^x \log a$.

(3)　$y = \log x$ とおこう. このとき, $x = e^y$ であるから, 注 3.1 より

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\dfrac{dx}{dy}} = \frac{1}{e^y} = \frac{1}{e^{\log x}} = \frac{1}{x} .$$

(4)　対数の底の変換公式 $\log_a x = \dfrac{\log x}{\log a}$ と上の (3) より明らか. □

例 3.1 (対数微分法) . x^x　$(x > 0)$ の導関数を求めよ.

解　$y = x^x$ とおいて, 両辺の対数をとり

$$\log y = x \log x ,$$

この両辺を x で微分すると,

$$\frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = \log x + 1 .$$

したがって,

$$\frac{dy}{dx} = (\log x + 1)y = (\log x + 1)x^x . \ \square$$

問 3.1. $x^{\sin x}$　$(x > 0)$　の導関数を求めよ.

逆三角関数の微分　次に, 逆三角関数の導関数について調べる.

第 1 章 7 節で述べたように,

$$y = \sin^{-1} x \Longleftrightarrow x = \sin y, \quad -\frac{\pi}{2} \leqq y \leqq \frac{\pi}{2}$$

である. $\dfrac{dx}{dy} = \cos y$ は $-\dfrac{\pi}{2} < y < \dfrac{\pi}{2}$ で決して 0 とはならないので, 定理 3.1 によって, $-1 < x < 1$ で微分可能. よって, $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{\dfrac{dx}{dy}} = \dfrac{1}{\cos y}$ である. $-\dfrac{\pi}{2} < y < \dfrac{\pi}{2}$ では $\cos y > 0$ であるから, $\cos y = \sqrt{1 - \sin^2 y} = \sqrt{1 - x^2}$ である. よって, $(\sin^{-1} x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$ を得る.

次に $y = \tan^{-1} x$ について考えよう.

$$y = \tan^{-1} x \Longleftrightarrow x = \tan y, \quad -\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}$$

であり，$\dfrac{dx}{dy} = \dfrac{1}{\cos^2 y}$ は，この区間で決して 0 にならない．したがって $y = \tan^{-1} x$ はすべての実数 x において，微分可能で

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= \frac{1}{\dfrac{dx}{dy}} = \cos^2 y \\ &= \frac{\cos^2 y}{\cos^2 y + \sin^2 y} = \frac{1}{1+\tan^2 y} = \frac{1}{1+x^2} .\end{aligned}$$

定理 3.4. (1)　$\sin^{-1} x$ は $-1 < x < 1$ で微分可能で，その導関数は $\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$．

(2)　$\cos^{-1} x$ は $-1 < x < 1$ で微分可能で，その導関数は $\dfrac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$．

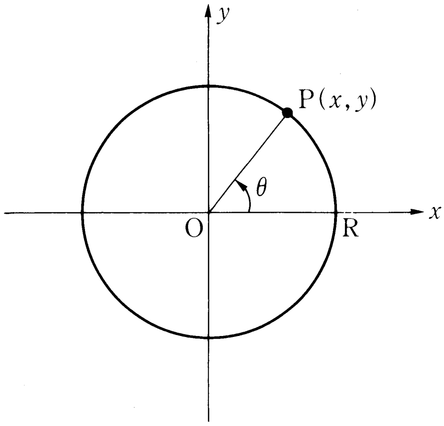
(3)　$\tan^{-1} x$ はすべての実数において微分可能で，その導関数は $\dfrac{1}{1+x^2}$．

証明　(1), (3) は既に示しているので，(2) のみを示す．$y = \cos^{-1} x \Longleftrightarrow x = \cos y$，$0 \leqq y \leqq \pi$ であり $\dfrac{dx}{dy} = -\sin y$．これが 0 にならないのは，$0 < y < \pi$ のとき．したがって，$\cos^{-1} x$ は $-1 < x < 1$ で微分可能であり，$\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{\dfrac{dx}{dy}} = -\dfrac{1}{\sin y}$．$0 < y < \pi$ では $\sin y > 0$ だから $\sin y = \sqrt{1-\cos^2 y} = \sqrt{1-x^2}$．よって，$(\cos^{-1} x)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$．

(2) の別証明　第 1 章，例 7.5 より $\sin^{-1} x + \cos^{-1} x = \dfrac{\pi}{2}$，しかも $\sin^{-1} x$ は $-1 < x < 1$ で微分可能で $(\sin^{-1} x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ だから $\cos^{-1} x$ も同じ区間で微分可能で $(\cos^{-1} x)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$．

問 3.2. $\sin^{-1}(\sin x)$ の導関数を求めよ．($\sin^{-1}x$ は $\sin x$ の逆関数だから，どんな x についても $\sin^{-1}(\sin x) = x$ とはやとちりしてはいけない．$\sin x$ の逆関数を考えたとき，$-\dfrac{\pi}{2} \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{2}$ で考えていた．)

媒介変数表示　媒介変数表示の例として円 $x^2+y^2=1$ をとりあげよう.

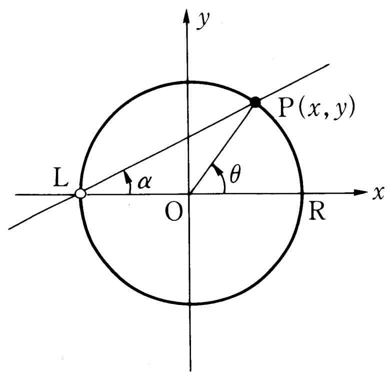


(1°)　これを, 図のように OR と OP とのなす角 θ を媒介変数として表せば

$$\begin{cases} x=\cos\theta \\ y=\sin\theta \quad (0 \leqq \theta < 2\pi) \end{cases}$$

なる表示を得る.

(2°)　次に, $\mathrm{L}(-1,0)$ を固定して, 直線 LP の傾き t $(-\infty < t < \infty)$ を媒介変数として x, y を表示すれば



$$\begin{cases} x=\dfrac{1-t^2}{1+t^2} \\ y=\dfrac{2t}{1+t^2} \quad (-\infty < t < \infty) \end{cases}$$

を得る.

問 3.3. (2°) の主張を証明せよ.

次に (1°) における媒介変数表示と (2°) のそれとを比較しよう. $t=\tan\alpha$ であり, 初等幾何の“円の弦に対する円周角は, 中心角の半分”という事実に注意すれば $\alpha=\dfrac{\theta}{2}$. したがって, 次の補題を得る.

補題 3.5. $t=\tan\dfrac{\theta}{2}$ とおけば,

$$\begin{cases} \cos\theta=\dfrac{1-t^2}{1+t^2} \\ \sin\theta=\dfrac{2t}{1+t^2} \end{cases}$$

である.

この補題は三角関数の不定積分を計算する際に有用である．

媒介変数で表示された関数の微分法

定理 3.6. ある区間で微分可能な 2 つの関数

$$\begin{cases} x = f(t) \\ y = g(t) \end{cases}$$

が与えられ，$f(t)$ は狭義の単調関数で，$f'(t) \neq 0$ とする．このとき y を x の関数とみて，微分可能であり，

$$\frac{dy}{dx} = \frac{g'(t)}{f'(t)}$$

である．

注 3.2. これも

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\dfrac{dy}{dt}}{\dfrac{dx}{dt}}$$

と書き表せば記憶しやすい．

証明　定理 3.1 より，$t = f^{-1}(x)$ は微分可能であり，$\dfrac{d(f^{-1})}{dx} = \dfrac{1}{f'(t)}$．したがって，定理 2.6 より，

$$\frac{dy}{dx} = \left\{g(f^{-1}(x))\right\}' = g'(f^{-1}(x))(f^{-1})'(x) = \frac{g'(t)}{f'(t)} \qquad \square$$

Point: $y = f(x)$ と表示できない関数でも接線の方程式を求めることができる．

例 3.3. 媒介変数表示の項の $(2°)$ で述べた例について，定理 3.6 の適用の可否を調べよ．

解　まず，$x = \dfrac{1-t^2}{1+t^2}$ の増減の様子を調べよう (後出 7 節を参照)．

$$\frac{dx}{dt} = \frac{-4t}{(1+t^2)^2}$$

であるから，$t > 0$ では狭義の単調減少，$t < 0$ では狭義の単調増加．よって，$t > 0$ と $t < 0$ とに分けて，定理 3.6 を適用できる．さらに，

$$\frac{dy}{dt} = \frac{2(1-t^2)}{(1+t^2)^2}$$

である．したがって，$t \neq 0$ で，y は x の関数として微分可能であり，

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}\left(t - \frac{1}{t}\right)$$

である．$\square$

4　高次導関数

関数 $f(x)$ の導関数 $f'(x)$ が再び導関数をもつとき, これを $f(x)$ の 2 **次導関数** とよび, $f''(x)$ で表す. 以下, 帰納的に $f(x)$ の n **次導関数** $f^{(n)}(x)$ を定義する. これらを総称して, **高次導関数** とよぶ.

高次導関数について, いくつか注意を述べる. $f(x)$ が少なくとも n 次導関数までもつとき, $f(x)$ は n **回微分可能** であるという. 便宜上 $f(x)$ の 0 次導関数 $f^{(0)}$ とは, $f(x)$ 自身のことと規約する. また $\dfrac{dy}{dx}$ なる導関数の記法に対応しては, n 次導関数を $\dfrac{d^n y}{dx^n}$ で表す.

例 4.1. $f(x) = \sin x$ の n 次導関数を求めよ.

解　$f'(x) = \cos x$, $f''(x) = -\sin x$, $f^{(3)}(x) = -\cos x$, $f^{(4)}(x) = \sin x = f^{(0)}(x)$ であるから,

$$f^{(n)}(x) = \begin{cases} \sin x & (n \text{ が } 4k \text{ の形}) \\ \cos x & (n \text{ が } 4k+1 \text{ の形}) \\ -\sin x & (n \text{ が } 4k+2 \text{ の形}) \\ -\cos x & (n \text{ が } 4k+3 \text{ の形}) . \end{cases}$$

この答えを 1 行で書き表すとすれば, $\cos x = \sin\left(x + \dfrac{\pi}{2}\right)$, $-\sin x = \sin(x+\pi)$ であることに注意すれば,

$$f^{(n)}(x) = \sin\left(x + \frac{n}{2}\pi\right)$$

と表せる. □

問 4.1. (1)　x^3 の 3 次導関数を求めよ.
(2)　$x^3 + 2x$ の 100 次導関数を求めよ.
(3)　$x^{13} + x^4 + 1$ の 13 次導関数を求めよ.

高次導関数については次のライプニッツの定理が基本的である.

定理 4.1 (ライプニッツの公式) . $f(x)$, $g(x)$ がともに, ある開区間で n 回微分可能とする. このとき, $f(x)g(x)$ も n 回微分可能で

$$\{f(x)g(x)\}^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} {}_nC_k\, f^{(n-k)}(x) g^{(k)}(x)$$

が成り立つ. ただし, ${}_nC_k$ は 2 項係数を表す.

2 項係数の性質　定理 4.1 の証明に必要な 2 項係数の性質について述べる. 2 項係数とは,

$${}_nC_k := n \text{ 個のものから } k \text{ 個取り出す組合せの数} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

で定義される自然数である．(ただし，${}_nC_0 = 1$ と規約する.) したがって，n 個の文字 $x_1, \cdots, x_n$ に関する多項式

$$(x_1+1)(x_2+1)\cdots(x_n+1)$$

を展開すると $x_1, \cdots, x_n$ について k 次の項は，ちょうど ${}_nC_k$ 個ある．よって，$x_1 = \cdots = x_n = x$ とおくと，

$$(x+1)^n = \sum_{k=0}^{n} {}_nC_k\, x^k .$$

この公式は 2 項定理とよばれる．(この公式の一般化を次の節で述べる．) これが 2 項係数という名の由来である．

補題 4.2. ${}_nC_k + {}_nC_{k-1} = {}_{n+1}C_k$

証明　定義式から簡単な計算で示せるが，以下のように考えれば，計算する必要はない．

$n+1$ 個のもの $\{a_0, a_1, \cdots, a_n\}$ から k 個取り出すとり出し方を数えるのに (1°) a_0 を含むとり出し方; (2°) a_0 を含まないとり出し方，に分けて考える．(1°) に属するとり出し方の数は，$\{a_1, \cdots, a_n\}$ から $k-1$ 個取り出すとり出し方の数と同じだから ${}_nC_{k-1}$ 個であり，(2°) に属するとり出し方の数は $\{a_1, \cdots, a_n\}$ から k 個取り出すとり出し方の数 ${}_nC_k$ に等しい．したがって，${}_nC_k + {}_nC_{k-1} = {}_{n+1}C_k$ を得る．□

定理 4.1 の証明　n についての帰納法で証明する．$n = 1$ のときは，積の導関数の公式に他ならない．次に n について定理の主張が正しいとしよう．このとき，$n+1$ について，定理の主張が正しいことを示す．すなわち，$f(x)$, $g(x)$ がともに $n+1$ 回微分可能であるとき，

$$\{f(x)g(x)\}^{(n+1)} = \sum_{k=0}^{n+1} {}_{n+1}C_k\, f^{(n+1-k)}(x)g^{(k)}(x)$$

となることを示す．

$n+1$ 回微分可能ならば，当然 n 回微分可能であるから，$f(x)$, $g(x)$ についての帰納法の仮定が適用できて，$f(x)g(x)$ は n 回微分可能で，

$$\{f(x)g(x)\}^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} {}_nC_k\, f^{(n-k)}(x)g^{(k)}(x)$$

が成立している．ここで右辺の各項をみると $f^{(n-k)}(x)$, $g^{(k)}(x)$ は，それぞれさらに 1 回は微分できるから，定理 2.3 によって，$f^{(n-k)}(x)g^{(k)}(x)$ は微分可能で，

$$\{f^{(n-k)}(x)g^{(k)}(x)\}' = f^{(n-k+1)}(x)g^{(k)}(x) + f^{(n-k)}(x)g^{(k+1)}(x) .$$

したがって，$\{f(x)g(x)\}^{(n)}$ は微分可能，すなわち，$f(x)g(x)$ は $n+1$ 回微分可能で，

$$\begin{aligned}
\{f(x)g(x)\}^{(n+1)} &= \left\{(f(x)g(x))^{(n)}\right\}' \\
&= \sum_{k=0}^{n} {}_nC_k \left\{f^{(n-k+1)}(x)g^{(k)}(x) + f^{(n-k)}(x)g^{(k+1)}(x)\right\} \\
&= {}_nC_0 f^{(n+1)}(x)g^{(0)}(x) + \sum_{k=1}^{n} \{{}_nC_{k-1} + {}_nC_k\}\, f^{(n+1-k)}(x)g^{(k)}(x) \\
&\qquad + {}_nC_n f^{(0)}(x)g^{(n+1)}(x)
\end{aligned}$$

となるが, ${}_nC_0 = {}_nC_n = 1$ であること, および補題 4.2 より上式は,

$$\sum_{k=0}^{n+1} {}_{n+1}C_k f^{(n+1-k)}(x) g^{(k)}(x)$$

に一致する.　□

Point: ライプニッツの公式は n 次の微分係数を求めるのに大変有効である.

例 4.2. $x^3 e^x$ の n 次導関数を求めよ.

解

$$\left(x^3\right)^{(m)} = \begin{cases} x^3 & (m=0) \\ 3x^2 & (m=1) \\ 6x & (m=2) \\ 6 & (m=3) \\ 0 & (m>3) \end{cases}$$

であるから, ライプニッツの公式より,

$$\begin{aligned} \left(x^3 e^x\right)^{(n)} &= x^3 e^x + {}_nC_1 3x^2 e^x + {}_nC_2 6x e^x + {}_nC_3 6 e^x \\ &= \{x^3 + 3nx^2 + 3n(n-1)x + n(n-1)(n-2)\} e^x . \end{aligned}$$

ここで, $n \geqq 3$ として計算したが, この答えは $n = 0, 1,$ または 2 でも通用していることに注意せよ.　□

例 4.3. $f(x) = \dfrac{1}{x^2+1}$ について, $f^{(n)}(0)$ を求めよ.

解　$n \geqq 2$ として, $(x^2+1)f(x) = 1$ の両辺を n 回微分し, 左辺にライプニッツの公式を適用すると,

$$(x^2+1) f^{(n)}(x) + 2nx f^{(n-1)}(x) + n(n-1) f^{(n-2)}(x) = 0 .$$

ここで, $x = 0$ とすると, $f^{(n)}(0) = -n(n-1) f^{(n-2)}(0)$ なる漸化式を得る. $f^{(0)}(0) = 1$, $f^{(1)}(0) = 0$ に注意して, これを解けば

$$f^{(n)}(0) = \begin{cases} (-1)^{\frac{n}{2}} n! & (n \text{ が偶数 }) \\ 0 & (n \text{ が奇数 }) \end{cases}$$

となる.　□

5　平均値の定理とテイラーの定理

この節の話題は，少しばかり一般的かつ抽象的である．最初の一読では，定理およびそれらの系の内容を頭にとどめるだけで，それらの証明はスキップして，最後の小節に進んで差し支えない．

この節を通しての仮定　以下，特に断わらない限り，$a<b$ として，閉区間 $[a,b]$ で定義された関数で，次の条件を満たすものを考える：

(♡)　閉区間 $[a,b]$ で連続かつ (a,b) で微分可能．

定理 5.1 (ロルの定理)． 関数 $f(x)$ は 条件 (♡)を満たしているとする．さらに，$f(a)=f(b)$ であれば，$a<\alpha<b$ なる，ある α に対して，$f'(\alpha)=0$ となる．

証明　関数 $f(x)$ は閉区間上で連続であるから，この区間内で最大値 (これを M と書こう) および最小値 (これを m と書こう) をもつ．$M=m$ であれば $f(x)$ はこの区間で定数関数．よって，どんな α $(a<\alpha<b)$ をとっても $f'(\alpha)=0$ である．

$M>m$ とする．$M \geqq f(a)=f(b) \geqq m$ であるから，$M>f(a)=f(b)$ または，$f(a)=f(b)>m$ の少なくとも，一方は成立する．$M>f(a)=f(b)$ であるとしよう．$f(x)$ が最大値 M を $x=\alpha$ でとるとしよう．仮定より，$a<\alpha<b$ である．このとき，(十分小さな，) $h>0$ に対して，$f(\alpha+h) \leqq M=f(\alpha)$ かつ $f(\alpha-h) \leqq M=f(\alpha)$ であるから，

$$\frac{f(\alpha+h)-f(\alpha)}{h} \leqq 0 \quad \text{かつ} \quad \frac{f(\alpha-h)-f(\alpha)}{-h} \geqq 0\,.$$

ここで，$h \to 0$ とすると，前者からは $f'_+(\alpha) \leqq 0$，後者からは $f'_-(\alpha) \geqq 0$ を得るが，$f(x)$ は $x=\alpha$ で微分可能であるから，

$$0 \geqq f'_+(\alpha)=f'(\alpha)=f'_-(\alpha) \geqq 0\,.$$

よって，$f'(\alpha)=0$ である．$f(a)=f(b)>m$ のときも同様に議論すればよい．□

ロルの定理の興味ある応用例をひとつ述べよう．

例 5.1． $f(x)$ を，ある (有限または無限の) 開区間で定義された微分可能な関数とする．方程式 $f(x)=0$ が相異なる m 個の実解をもてば，$f'(x)=0$ は，少なくとも，$m-1$ 個の相異なる実解をもつ．

解　$f(x)=0$ の相異なる m 個の実解を $a_1<a_2<\cdots<a_m$ としよう．$f(a_i)=f(a_{i+1})$ $(i=1,2,\ldots,m)$ であるので，ロルの定理より，ある α_i $(a_i<\alpha_i<a_{i+1})$ が存在して，$f'(\alpha_i)=0$．すなわち，$f'(x)=0$ は $\alpha_1<\alpha_2<\cdots<\alpha_{m-1}$ を実解にもつ．□

定理 5.2 (ラグランジュの平均値の定理)． 関数 $f(x)$ は 条件 (♡)を満たしているとする．このとき，

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(\alpha), \quad a<\alpha<b$$

なる α が (少なくとも 1 つは) 存在する．

証明

$$F(x) := f(b) - f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(b - x)$$

とおけば, これも 条件 (♡)を満たし $F(a) = F(b) = 0$. したがって, ロルの定理より,

$$F'(\alpha) = 0, \quad a < \alpha < b$$

なる α が存在する. $F'(x) = -f'(x) + \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$ であるから, 求める式を得る. □

系 5.3. 開区間 (c, d) 上で微分可能な関数 $f(x)$ について, この区間で導関数が恒等的に 0 であれば, $f(x)$ は定数関数である.

証明 $a < b$ をこの区間内の 2 点とするとき, $f(a) = f(b)$ を示せばよい. 区間 $[a, b]$ について, $f(x)$ は 条件 (♡)を満たす. よって, 平均値の定理が使えて, $\dfrac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(\alpha)$ なる α $(a < \alpha < b)$ が存在するが, 仮定より $f'(\alpha) = 0$ であるので, $f(a) = f(b)$ となる. □

定理 5.4 (コーシーの平均値の定理). $f(x)$, $g(x)$ が, ともに, 条件 (♡)を満たし, $g'(x)$ はこの区間で, 決して 0 とならないとき, $a < \alpha < b$ なる, α が存在して,

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(\alpha)}{g'(\alpha)}$$

となる.

証明 $g(b) - g(a) \neq 0$ である. なぜなら, $g(a) = g(b)$ であれば, ロルの定理より, $g'(\beta) = 0$ なる β $(a < \beta < b)$ が存在してしまうから.

したがって,

$$F(x) = f(b) - f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}(g(b) - g(x))$$

はこの区間で意味をもち, かつ微分可能で, $F(b) = F(a) = 0$. ゆえ, ロルの定理より, $F'(\alpha) = 0$ なる α $(a < \alpha < b)$ が存在する. この α について,

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(\alpha)}{g'(\alpha)}$$

である. □

ラグランジュの平均値の定理にあらわれる式は

$$f(b) = f(a) + (b - a)f'(\alpha) \quad a < \alpha < b$$

あるいは

$$f(a) = f(b) + (a - b)f'(\alpha) \quad a < \alpha < b$$

と表現できる.

定理 5.5. 実数 c を含む, ある開区間で定義された関数 $f(x)$ が, この区間で微分可能であれば

$$f(x) = f(c) + (x-c)f'(c+\theta(x-c)) \quad 0 < \theta < 1$$

となる θ が (x に依存して) 存在する.

証明 $x = c$ のときは明らか. $x > c$ のときは, 上に述べたラグランジュの平均値の定理の第1の変形の式を $a = c, b = x$ として用いれば,

$$f(x) = f(c) + (x-c)f'(\alpha) \quad c < \alpha < x\,.$$

したがって, $\alpha = c + \theta(x-c) \quad (0 < \theta < 1)$ と表せる.

$x < c$ のときは, 第2の変形の式を $a = x, b = c$ として用いれば同様である. □

テイラーの定理 次に定理5.5 を “良い ”関数に対して, 精密化することを考える.

関数 $f(x)$ が条件 ($\heartsuit$)を満たし, さらに $\lim_{x\to a+0} f'(x)$ および $\lim_{x\to b-0} f'(x)$ が存在すれば, $f'(x)$ は自然に, 閉区間 $[a,b]$ 上の関数とみなせる. このような $f'(x)$ が, さらに条件 ($\heartsuit$)を満たすとき, $f(x)$ は条件 ($\heartsuit_1$) を満たすと呼ぶことにしよう. 以下, 帰納的に自然数 n に対して条件 ($\heartsuit_n$) を満たすということを定義する. すなわち, $f(x)$ が条件 ($\heartsuit_n$) を満たせば, 開区間 (a,b) において n 回微分可能で, $f(x), f'(x), \cdots, f^{(n)}(x)$ は自然に閉区間 $[a,b]$ 上の連続関数に延長され, さらに $f^{(n)}(x)$ も微分可能である.

定理 5.6. 関数 $f(x)$ が 条件 ($\heartsuit_n$) を満たせば, $a < \alpha < b$ なる α が存在して,

$$f(b) = f(a) + f'(a)(b-a) + \frac{f^{(2)}(a)}{2!}(b-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(b-a)^n + \frac{f^{(n+1)}(\alpha)}{(n+1)!}(b-a)^{n+1}$$

となる.

証明

$$F(x) = f(b) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x)}{k!}(b-x)^k - \left(\frac{f(b)}{(b-a)^{n+1}} - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} \frac{1}{(b-a)^{n+1-k}} \right)(b-x)^{n+1}$$

とおく. (ここで, $n = 0$ とすれば, ちょうどラグランジュの平均値の定理の証明にあらわれた $F(x)$ に一致する.) 明らかに, $F(a) = F(b) = 0$ である. $k \geqq 1$ のとき,

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{f^{(k)}(x)}{k!}(b-x)^k \right) = -\frac{f^{(k)}(x)}{(k-1)!}(b-x)^{k-1} + \frac{f^{(k+1)}(x)}{k!}(b-x)^k$$

であることに注意すれば,

$$F'(x) \;=\; -f'(x) + \sum_{i=0}^{n-1} \frac{f^{(i+1)}(x)}{i!}(b-x)^i - \sum_{k=1}^{n} \frac{f^{(k+1)}(x)}{k!}(b-x)^k$$

$$
+(n+1)\left(\frac{f(b)}{(b-a)^{n+1}}-\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}\frac{1}{(b-a)^{n+1-k}}\right)(b-x)^n
$$

$$
= \ -\frac{f^{(n+1)}(x)}{n!}(b-x)^n+(n+1)\left(\frac{f(b)}{(b-a)^{n+1}}-\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}\frac{1}{(b-a)^{n+1-k}}\right)(b-x)^n .
$$

したがって, ロルの定理より, ある α $(a<\alpha<b)$ が存在して,

$$
(n+1)\left(\frac{f(b)}{(b-a)^{n+1}}-\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}\frac{1}{(b-a)^{n+1-k}}\right)(b-\alpha)^n=\frac{f^{(n+1)}(\alpha)}{n!}(b-\alpha)^n .
$$

これを書き直せば,

$$
f(b)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(b-a)^k+\frac{f^{(n+1)}(\alpha)}{(n+1)!}(b-a)^{n+1}
$$

を得る. □

ラグランジュの平均値の定理から定理 5.5 を導いた論法とまったく同様の論法で, 定理 5.6 より, 次の定理を得る.

定理 5.7 (テイラーの定理) . 実数 c を含むある開区間で定義された関数 $f(x)$ が, この区間で $n+1$ 回微分可能であれば

$$
f(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(c)}{k!}(x-c)^k+\frac{f^{(n+1)}(c+\theta(x-c))}{(n+1)!}(x-c)^{n+1},\quad 0<\theta<1
$$

となる θ が (x と c とに依存して) 存在する.

定理 5.7 において,

$$
R_{n+1}=\frac{f^{(n+1)}(c+\theta(x-c))}{(n+1)!}(x-c)^{n+1}
$$

とおく[4]. もし, $f(x)$ が無限回微分可能で $\lim_{n\to\infty}R_n=0$ となるならば

$$
f(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{f^{(k)}(c)}{k!}(x-c)^k
$$

と無限級数で表示されることになる. これを $f(x)$ の点 c における**テイラー級数** とよぶ. $f(x)$ がこのような表示を定義域の各点 c でもつとき, $f(x)$ は **解析関数** とよばれる, 解析関数の本質は, それを複素変数の関数として考察することによって, 極めて自然に, 明らかになるが, この事柄については他書に譲ることにする.

[4]この項を**ラグランジュの剰余項**とよぶ.

Point: 多くの場合, 関数値を計算するのにそれほど正確な値は必要でない. そして, テイラーの定理によれば複雑な関数でも多項式で近似できることになり, 多項式であれば種々の計算が楽になる.

いくつかの関数のテイラー級数　具体的な関数のテイラー級数を調べる. まず, 無限回微分可能な関数が上のような表示をもつことを示すために必要となる補題を述べる.

補題 5.8. 任意の実数 M について,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{M^n}{n!}=0.$$

証明　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left|\frac{M^n}{n!}\right|\left(=\lim_{n\to\infty}\frac{|M|^n}{n!}\right)=0$ を示せば十分であるので, $M\geqq 0$ として証明すればよい.

$$\frac{M^{n+1}}{(n+1)!}-\frac{M^n}{n!}=\frac{M^n}{n!}\left(\frac{M}{n+1}-1\right)$$

であるから, 数列 $\left\{\dfrac{M^n}{n!}\right\}$ は $n\geqq M$ では単調減少である. しかも, $\dfrac{M^n}{n!}\geqq 0$ であるから $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{M^n}{n!}$ は存在する(第1章, 定理 1.2). この収束値を α とおくと

$$\alpha=\lim_{n\to\infty}\frac{M^{n+1}}{(n+1)!}=\lim_{n\to\infty}\frac{M}{n+1}\cdot\frac{M^n}{n!}=0\cdot\alpha=0.\ \square$$

以下では, $c=0$ におけるテイラー級数(これを, **マクローリン級数**とよぶ)を調べる.

例 5.2.

$$e^x=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+\frac{e^{\theta x}}{(n+1)!}x^{n+1}.$$

よって, すべての実数 x に対し,

$$e^x=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^k}{k!}$$

となる.

証明　定理 5.7 より, e^x が無限回微分可能で $\displaystyle\lim_{n\to\infty}R_n=0$ を示せばよい. $\dfrac{d}{dx}e^x=e^x$ であるから前半は明らか.

$$|R_n|=\left|\frac{e^{\theta x}}{n!}x^n\right|\leqq\frac{|x|^n e^{|x|}}{n!}$$

であるから, 補題 5.8 より各 x について, $\displaystyle\lim_{n\to\infty}R_n=0$. $\square$

例 5.3. 以下, いくつかの関数のマクローリン級数を述べるが, それらにあらわれる θ は x と n とに依存して定まる $0<\theta<1$ を満たす定数である.

(1) $$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + (-1)^n \frac{\cos\theta x}{(2n+1)!}x^{2n+1}$$

よって, すべての実数 x に対して $\sin x = \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}$ である.

(2) $$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + (-1)^{n+1}\frac{\cos\theta x}{(2n+2)!}x^{2n+2}$$

よって, すべての実数 x に対して $\cos x = \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!}$ である.

問 5.1. 例5.3 を証明せよ.

テイラー級数を調べる際に, 定義どおりに剰余項を求めることは必ずしも得策ではない. $\log(1+x)$ に定理 5.6 を直接適用すれば

$$\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + \frac{(-1)^n}{(n+1)(1+\theta x)^{n+1}}x^{n+1} \ (0<\theta<1)$$

であるが, この剰余項を評価することは容易ではない. 少々先ばしることにはなるが, これを積分を用いて評価しよう.

例 5.4. $-1<x$ に対し

$$\begin{aligned} \log(1+x) &= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots + (-1)^{n+1}\frac{x^n}{n} + R_{n+1}, \\ R_{n+1} &= (-1)^n \int_0^x \frac{t^n}{1+t}dt \end{aligned}$$

となる. さらに, $-1 < x \leqq 1$ として, この積分を評価すると $\lim_{n\to\infty} R_{n+1} = 0$ となり, この区間で

$$\log(1+x) = \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}\frac{x^k}{k}$$

と表される.

証明　等比数列の公式より,

$$1 - t + t^2 \cdots + (-1)^{n-1}t^{n-1} = \frac{1-(-t)^n}{1+t} = \frac{1}{1+t} - (-1)^n \frac{t^n}{1+t}.$$

従って,

$$\frac{1}{1+t} = 1 - t + t^2 \cdots + (-1)^{n-1}t^{n-1} + \frac{(-1)^n t^n}{1+t}.$$

$\displaystyle\int_0^x \frac{dt}{1+t} = \log(1+x)$ に注意すれば，前半の式を得る．

この剰余項 $R_{n+1} = (-1)^n \displaystyle\int_0^x \frac{t^n}{1+t}\, dt$ を評価する．

(i)　$0 \leqq x \leqq 1$ のとき，

積分区間 $[0,x]$ では $\dfrac{t^n}{1+t} \leqq t^n$ より

$$|R_{n+1}| = \int_0^x \frac{t^n}{1+t} dt \leqq \int_0^x t^n dt = \frac{x^{n+1}}{n+1} \leqq \frac{1}{n+1}.$$

よって，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} R_{n+1} = 0$ ．

(ii)　$-1 < x < 0$ のとき，

積分区間 $[x,0]$ では $\dfrac{(-t)^n}{1+t} \leqq \dfrac{(-t)^n}{1+x}$ ．よって，

$$|R_{n+1}| = \int_x^0 \frac{(-t)^n}{1+t} dt \leqq \int_x^0 \frac{(-t)^n}{1+x} dt = \frac{(-x)^{n+1}}{(n+1)(1+x)} \leqq \frac{1}{(n+1)(1+x)}.$$

よって，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} R_{n+1} = 0$ ．　□

任意の実数 α と自然数 k とに対して

$${}_\alpha C_k := \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)}{k!}$$

と定め，${}_\alpha C_0 = 1$ と規約する．これは，第 4 節で説明した 2 項係数の自然な一般化になっている．

例 5.5 (一般化された 2 項定理) ．任意の実数 α に対し，

$$(1+x)^\alpha = 1 + {}_\alpha C_1 x + {}_\alpha C_2 x^2 + \cdots + {}_\alpha C_n x^n + {}_\alpha C_{n+1}(1+\theta x)^{\alpha-n-1} x^{n+1}$$

なる θ $(0 < \theta < 1)$ が存在する．さらに $|x| < 1$ において，$(1+x)^\alpha = \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} {}_\alpha C_k x^k$ となる表示をもつことが知られている．

オイラーの公式　この節の最後の話題として，オイラーの公式について少しばかり触れよう．

e^x のテイラー級数による表示 (例 5.2) の x に形式的に iy (i は虚数単位 $\sqrt{-1}$) を代入した式を考える．

$$i^k = \begin{cases} 1 & (k = 4m) \\ i & (k = 4m+1) \\ -1 & (k = 4m+2) \\ -i & (k = 4m+3) \end{cases}$$

であることに注意すれば,

$$\begin{aligned} e^{iy} &= 1 + i\frac{y}{1!} - \frac{y^2}{2!} - i\frac{y^3}{3!} + \frac{y^4}{4!} + i\frac{y^5}{5!} + \cdots \\ &= \left(1 - \frac{y^2}{2!} + \frac{y^4}{4!} - \frac{y^6}{6!} + \cdots\right) + i\left(\frac{y}{1!} - \frac{y^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots\right) \end{aligned}$$

を得る. これを $\sin y$ および $\cos y$ の テイラー級数による表示 (例 5.3) と見較べれば, 形式的に

$$e^{iy} = \cos y + i \sin y$$

なる式を得る. これを **オイラーの公式** とよぶ.

われわれは, 複素数ベキの定義をしていないので, この公式は形式的な意味しかもち得ないが, 適当に複素数ベキを意味付けすれば, 上の式は実質的な意味をもつ. あるいは, オイラーの公式によって正の数の複素数ベキを定義してもよい. すなわち, $a > 0$ (ただし $a \neq 1$) および複素数 $x + iy$ について

$$a^{x+iy} = a^x(\cos(y \log a) + i \sin(y \log a))$$

によって定義するのである. このとき, 3 角関数の加法公式を用いれば指数法則 $a^{z_1+z_2} = a^{z_1}a^{z_2}$ が成立することを容易に確かめうる.

6 不定形の極限値

コーシーの平均値の定理の応用として不定形の極限について考察しよう.

関数 $f(x), g(x)$ において $x \to a$ のとき $f(x), g(x)$ が $\to 0, \infty$ などになるとき,

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)}$$

は形式的に

$$\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}$$

などと表され **不定形** とよばれている. 不定形について次の定理が成り立つ.

定理 6.1 (ロピタルの定理) . 微分可能な関数 $f(x), g(x)$ において $\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} g(x) = 0$ で a の近くの任意の x に対し $g'(x) \neq 0$ であるとき, もし $\lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ が存在すれば

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

証明 a が $f(x), g(x)$ の微分可能である区間に含まれているならば, それらは a で連続であるので $f(a) = g(a) = 0$. もし a が微分可能な区間の端点であるならば, a における値を (あ

らためて) $f(a)=g(a)=0$ と定めることにことにする．いずれにせよ a の十分近くの x に対し，$f(x),g(x)$ は区間 $[a,x]$ (かつ/または $[x,a]$) でコーシーの平均値の定理の条件 (♡) を満たす．したがって a と x の間に

$$\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{f(x)-f(a)}{g(x)-g(a)}=\frac{f'(\alpha)}{g'(\alpha)}.$$

を満たす α が存在する．ここで $x\to a$ とすれば $\alpha\to a$ より

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{g(x)-g(a)}=\lim_{\alpha\to a}\frac{f'(\alpha)}{g'(\alpha)}.\quad\square$$

注 6.1. この定理は a が $\pm\infty$ の場合にも成り立つ．また，$x\to a$ のとき $f(x)\to\pm\infty, g(x)\to\pm\infty$ の場合にも $\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$ が存在すれば

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

を証明することができる．

Point: ロピタルの方法は大変有効なので，しっかりマスターしよう．

例 6.1. ロピタルの定理を利用して次のように関数の極限を求めることができる．

(1) $\displaystyle\lim_{x\to1}\frac{x^2+2x-3}{x^2-3x+2}=\lim_{x\to1}\frac{2x+2}{2x-3}=-4.$

(2) $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{2x}=\frac{1}{2}.$

(3) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{x^n}{e^x}=\lim_{x\to\infty}\frac{nx^{n-1}}{e^x}=\lim_{x\to\infty}\frac{n(n-1)x^{n-2}}{e^x}=\cdots=\lim_{x\to\infty}\frac{n!}{e^x}=0.$

(4) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}(1+x)^{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to\infty}e^{\frac{1}{x}\log(1+x)}=1$

(なぜなら，$\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{\log(1+x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{1+x}}{1}=0.$)

問 6.1. 次の関数の極限値を求めよ．

(1) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2-1}{3x^2+x}$　(2) $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{\sin ax^2}{\sin bx^2}\ (b\neq0)$　(3) $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{\tan x-x}{x-\sin x}$

(4) $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{e^x-e^{-x}}{\sin x}$　(5) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\sqrt[x]{x}$　(6) $\displaystyle\lim_{x\to+0}(-\log x)^x$

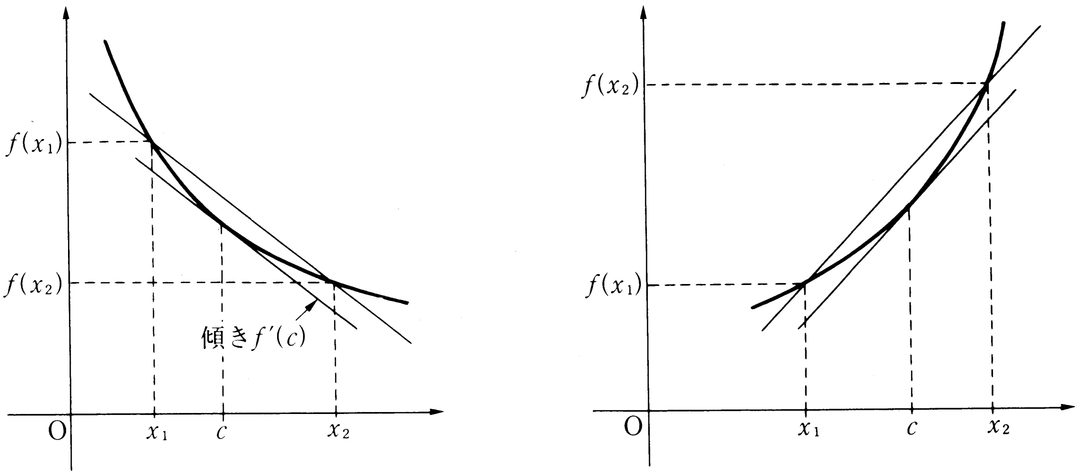
7　関数の極大・極小と凹凸

定理 7.1. $[a,b]$ で連続で，(a,b) で微分可能な関数 $f(x)$ が $[a,b]$ で単調増加（単調減少）であるための必要十分条件は，(a,b) において常に $f'(x) \geqq 0$ $(f'(x) \leqq 0)$ が成り立つことである．

証明 区間 $[a,b]$ の任意の点 x_1, x_2 $(x_1 < x_2)$ に対し，平均値の定理より

$$f(x_2) - f(x_1) = (x_2 - x_1)f'(c) \ (x_1 < c < x_2)$$

を満たす c が存在する．よって，もし $f'(c) \geqq 0$ $(f'(c) \leqq 0)$ であれば $f(x_2) \geqq f(x_1)$ $(f(x_2) \leqq f(x_1))$ が成り立ち，また，この逆も上の式より簡単に確かめることができる．□



単調減少・単調増大のグラフ

点 c を含む十分小さな開区間において任意の $x \neq c$ に対し

$$f(c) > f(x) \ (f(c) < f(x))$$

が成り立つならば，$f(x)$ は $x = c$ で**極大** (**極小**) であるといい，$f(c)$ を**極大値** (**極小値**) という．

定理 7.2. 関数 $f(x)$ が $[a,b]$ で連続かつ (a,b) で微分可能であるとき，$c \in (a,b)$ とするとき，(a,c) において $f'(x) > 0$ $(f'(x) < 0)$，(c,b) において $f'(x) < 0$ $(f'(x) > 0)$ ならば $f(x)$ は $x = c$ で**極大**（**極小**）である．

証明 任意の $a < x < c$ においてラグランジュの平均値の定理より

$$f(c) = f(x) + (c - x)f'(\alpha) \ (x < \alpha < c)$$

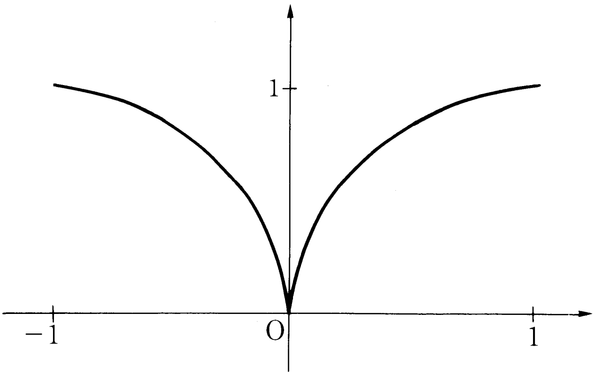
を満たす α が存在する．$f'(\alpha) > 0$ より $f(c) > f(x)$．同様に任意の $c < x < b$ において

$$f(x) = f(c) + (x-c)f'(\alpha)\ (c < \alpha' < x)$$

を満たす α' が存在する．$f'(\alpha') < 0$ より $f(c) > f(x)$．よって $x = c$ で極大．　□

注 7.1. 定理 7.2 では，$f(x)$ が $x = c$ で微分可能である必要はない．

例 7.1. $f(x) = x^{\frac{2}{3}}$ は区間 $(-1,1)$ 上の連続関数で，$f'(x) = \dfrac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}} < 0\ (x \in (-1,0))$，$f'(x) > 0\ (x \in (0,1))$．また $f(0) = 0$ より関数 $f(x)$ は極小値 0 をとる．



$f(x)=x^{\frac{2}{3}}$ のグラフ

$f'(x) = 0$ の解の中で，極値をもつものは次の定理により判定できる．

定理 7.3. $f(x)$ は (a,b) で n 回微分可能 $(n \geqq 2)$，(a,b) の点 c で $f^{(n)}(x)$ が連続，

$$f'(c) = f''(c) = \cdots = f^{(n-1)}(c) = 0, f^{(n)}(c) \neq 0$$

であるとする．このとき

(1) n が偶数で $f^{(n)}(c) > 0$ $(f^{(n)}(c) < 0)$ ならば $f(c)$ は極小値（極大値）である．

(2) n が奇数ならば $f(x)$ は c で極値をとらない．

証明 テイラーの定理より

$$f(c+h) = f(c) + \frac{f'(c)}{1!}h + \frac{f''(c)}{2!}h^2 + \cdots + \frac{f^{(n-1)}(c)}{(n-1)!}h^{n-1} + \frac{f^{(n)}(c+\theta h)}{n!}h^n$$

すなわち

$$f(c+h) - f(c) = \frac{f^{(n)}(c+\theta h)}{n!}h^n$$

となる θ $(0 < \theta < 1)$ が存在し, n が偶数ならば, $h^n > 0$. $f^{(n)}(x)$ が $x = c$ で連続で $f^{(n)}(c) \neq 0$ であるから $|h|$ が十分小さければ, $f^{(n)}(c+\theta h)$ は $f^{(n)}(c)$ と同符号である. よって $f^{(n)}(c) > 0$ ならば $f(c)$ は極小値. 同様に $f^{(n)}(c) < 0$ ならば $f(c)$ は極大値.

n が奇数のときは h^n が h の正負によって符号を変えるから, $f(c+h)$ と $f(c)$ の大小関係も変わり, 極値をもたない. □

例 7.2. $f(x) = x + 2\sin x$ $(0 \leqq x \leqq 2\pi)$ の極値を求めよ.

解 $f'(x) = 1 + 2\cos x, f''(x) = -2\sin x$. 方程式 $f'(x) = 0$ $(0 \leqq x \leqq 2\pi)$ を解くと, $x = \dfrac{2}{3}\pi, \dfrac{4}{3}\pi$.

$$f''\left(\frac{2}{3}\pi\right) < 0, f''\left(\frac{4}{3}\pi\right) > 0$$

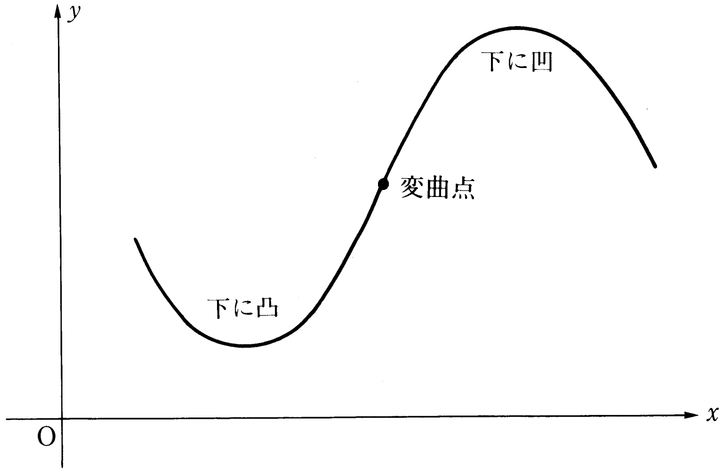
より $x = \dfrac{2}{3}\pi$ のとき極大で極大値は $\dfrac{2}{3}\pi + \sqrt{3}, x = \dfrac{4}{3}\pi$ のとき極小で極小値は $\dfrac{4}{3}\pi - \sqrt{3}$.

問 7.1. 次の関数の極値を求めよ.

(1) $x^3 - x^2$　　(2) $x + \dfrac{1}{2x^2}$

(3) $x^{\frac{1}{x}}$ $(x > 0)$　　(4) $x^{\frac{1}{3}}(1-x)^{\frac{2}{3}}$

関数 $f(x)$ が微分可能であるとき, $x = a$ に対応する曲線 $y = f(x)$ 上の点 P における接線 PT に対し, 曲線が P の十分近くで常に PT の上方にあるとき, この曲線は $x = c$ において **下に凸** (または **上に凹**), 常に PT の下方にあるとき, この曲線は $x = c$ において **下に凹** (または **上に凸**) という. また, 凹凸の変わり目を**変曲点**という.



下に凸・下に凹

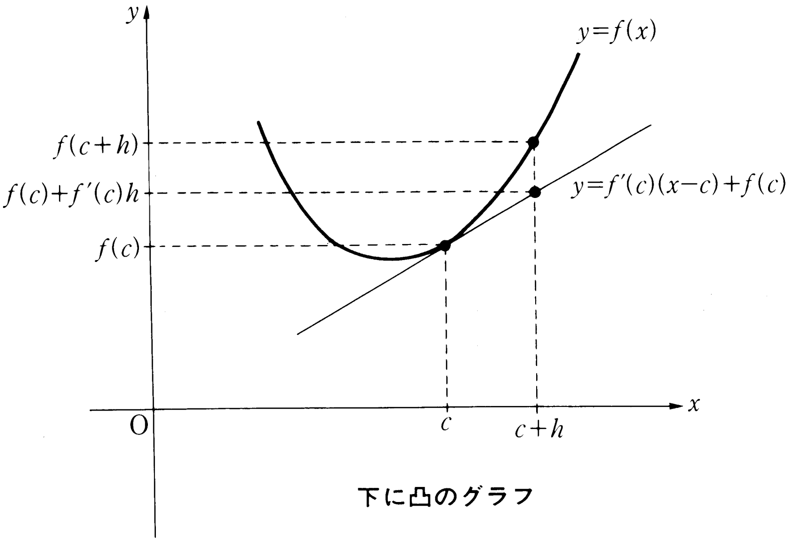
定理 7.4. 関数 $f(x)$ を2回微分可能で $f''(x)$ は連続とする. 曲線 $y = f(x)$ において, $f''(x) > 0$ となる区間では下に凸, $f''(x) < 0$ となる区間では下に凹.

証明 $f(x)$ は区間 (a, b) において, $f''(x) > 0$ とする. 点 $(c, f(c))$ $(a < c < b)$ における接線の方程式は

$$y = f'(c)(x - c) + f(c).$$

よって $x = c + h$ のとき, 曲線が接線の上側にあることと $f(c+h) - f(c) - f'(c)h$ が正であることは同値である. テイラーの定理より

$$f(c+h) - f(c) - f'(c)h = \frac{f''(c+\theta h)}{2!}h^2 \ (0 < \theta < 1).$$



下に凸のグラフ

$f''(x)$ は連続性より $|h|$ が十分小さければ $f''(c+\theta h) > 0$ であるから $f(x)$ は $x = c$ で下に凸. 同様に $f''(x) < 0$ となる区間の任意の c においては下に凹. □

問 7.2. 次の関数の凹凸を調べ, 変曲点を求めよ.

(1) $y = x^3 - x + 1$　　(2) $y = \sqrt[3]{x} + x$

(3) $y = e^{-x^2}$　　(4) $y = \dfrac{3}{2}(e^{\frac{x}{3}} + e^{-\frac{x}{3}})$

問 7.3. $m, n > 0$ とする. 区間 I で $f''(x) > 0$ ならば, 任意の $x_1, x_2 \in I$ $(x_1 \neq x_2)$ に対し

$$\frac{mf(x_1) + nf(x_2)}{m+n} > f\Big(\frac{mx_1 + nx_2}{m+n}\Big)$$

であることを示せ.

第 2 章 練習問題

1. 次の関数の導関数を求めよ．

(1) $\sqrt{x^2-1}$ (2) $\sin^{-1}\sqrt{1-x^2}$ (3) $x\sqrt{1-x^2}+\sin^{-1}x$ (4) $\sqrt{x+2\sqrt{x}}$

(5) e^{e^x} (6) $\log\sqrt{x^2+1}$ (7) $\tan^{-1}(\sin^{-1}x)$ (8) $\log\left(x+\sqrt{x^2+2}\right)$

(9) $\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$ (10) $\tan\dfrac{x+1}{x^2}$ (11) $\sin^3 x^2$ (12) $\tan(\sin(\log x))$

2. 次の媒介変数で表示された関数について $\dfrac{dy}{dx}$ を求めよ．

(1) $\begin{cases} x = t-\sin t \\ y = 1-\cos t \end{cases}$ (2) $\begin{cases} x = \dfrac{1}{\cos t} \\ y = \tan t \end{cases}$ (3) $\begin{cases} x = t^3-1 \\ y = t^2+\sin t \end{cases}$

(4) $\begin{cases} x = t^2-2t-1 \\ y = e^t \end{cases}$ (5) $\begin{cases} x = \cos^2 t \\ y = \sin t \end{cases}$ (6) $\begin{cases} x = e^t-1 \\ y = \sin 2t \end{cases}$

3. 次の関数の n 次導関数を求めよ．

(1) e^{-x} (2) $\sin x$ (3) $\log x$ (4) $\sqrt{x}$ (5) $\dfrac{1}{x-1}$ (6) $(x^2+n)e^x$

(7) $x\log x$ (8) $x\sin x$ (9) $e^x\cos x$ (10) $x^3\log x$ (11) xe^{-2x} (12) $\dfrac{1}{x(x-1)}$

4. 関数 $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ について，

(1) $(1-x^2)f'(x)=xf(x)$ を示せ． (2) $f^{(n)}(0)$ を求めよ．

5. 次の関数のマクローリン級数を 2 次の項まで求めよ．

(1) $\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}$ (2) $(x+3)^4$ (3) $\dfrac{1}{\sqrt{1-x}}$ (4) $\tan^{-1}x$

(5) $(x-1)^2$ (6) 2^x (7) $e^x\sin x$ (8) $\log(e^x+1)$

(9) $\dfrac{1}{1-\sin x}$ (10) $e^{\cos x}$ (11) $(e^x-1)^4$ (12) $\tan x$

6. 次の関数のマクローリン級数を求めよ．

(1) $x^2\sin x$ (2) e^{2x} (3) $\dfrac{1}{1+x^2}$ (4) $\tan^{-1}x$ (5) 3^x (6) x^2e^x

(7) e^{-x} (8) $\dfrac{1}{1+x}$ (9) $\cos x^2$ (10) $x\log(1+x)$ (11) $e^x\sin x$

7. 次の極限値を求めよ．

(1) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x^3}$ (2) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{\log(1+e^x)}{1+x^2}$ (3) $\displaystyle\lim_{x\to+0}\left(\frac{1}{x}\right)^{\sin x}$

(4) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}x(a^{\frac{1}{x}}-1)$ $(a>0)$ (5) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-\frac{1}{1-x^2}}{x^2}$ (6) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1-x\sqrt{x+1}}{x^3}$

(7) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{e^x}{1+x+x^2}$ (8) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin x-\tan^{-1}x}{x^3}$ (9) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{2^x-1-(\log 2)x}{x^2}$

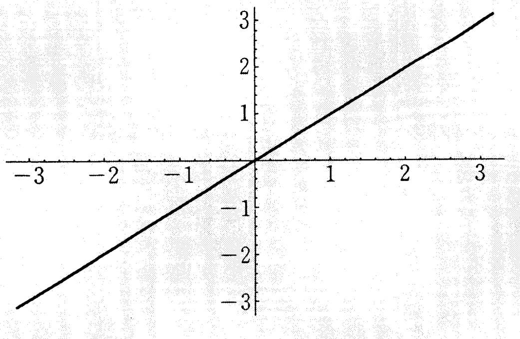
8. 次の関数の極値を求めよ．

(1) $y=(x-4)\sqrt{x}$　(2) $y=\dfrac{x}{\log x}$　(3) $y=\dfrac{1-x+x^2}{1+x-x^2}$

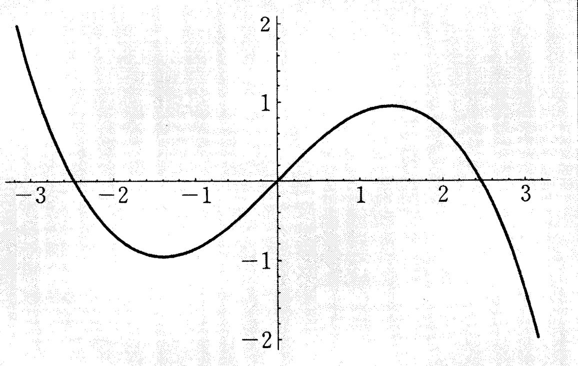
(4) $y=\sin x(1+\cos x)$　(5) $y=x^{\frac{1}{2}}(1-x)^{\frac{1}{2}}$　(6) $y=\log(x+\sqrt{x^2+1})$

[グラフで確認してみよう] マクローリン展開を用いることによって，$\sin x$, e^x などの関数が多項式の形で表されることを学んだ．しかし，実際に同じグラフになるのだろうか？そこで，次の関数をグラフに書いてみよう．

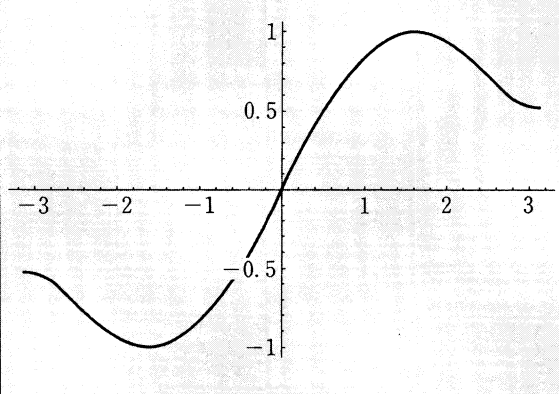
$$\sin x = x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+\cdots.$$



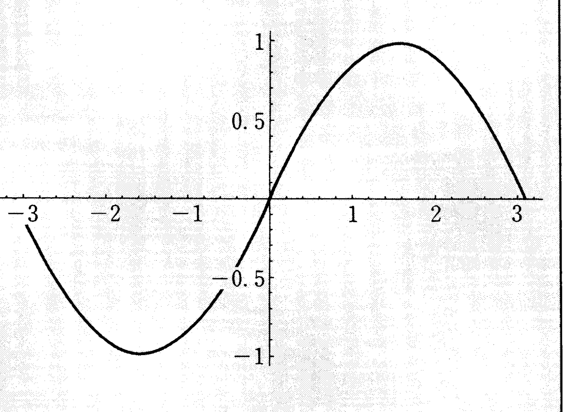
$y=x$



$y=x-\dfrac{x^3}{3!}$



$y=x-\dfrac{x^3}{3!}+\dfrac{x^5}{5!}$



$y=\sin x$