

## 1.3 行列の階数

## 問題 1

3 行 4 列型の行列に対して、「列の基本操作」を行うときには、4 行 4 列（4 次）の正方行列を右側からかける操作をおこなう。

- (1) ひとつの列を  $k$  倍（ゼロは除く）する。
- (2) 2 つの列を入れ替える。
- (3) ある列に他の列を何倍かしたものを加える。

このような操作をおこなうためにどんな行列を考えればよいか。

(解) 3 行 4 列の行列  $A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \\ c_1 & c_2 & c_3 & c_4 \end{pmatrix}$  とする。

$$(1) \text{ 3 列目を } k \text{ 倍する場合: } A \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & k \times a_3 & a_4 \\ b_1 & b_2 & k \times b_3 & b_4 \\ c_1 & c_2 & k \times c_3 & c_4 \end{pmatrix}$$

$$(2) \text{ 2, 3 列目を入れ替える場合: } A \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 & \boxed{a_3} & \boxed{a_2} & a_4 \\ b_1 & \boxed{b_3} & \boxed{b_2} & b_4 \\ c_1 & \boxed{c_3} & \boxed{c_2} & c_4 \end{pmatrix}$$

$$(3) \text{ 2 列目を } k \text{ 倍して、3 列目に加える場合: } A \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & k & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & k \times a_2 + a_3 & a_4 \\ b_1 & b_2 & k \times b_2 + b_3 & b_4 \\ c_1 & c_2 & k \times c_2 + c_3 & c_4 \end{pmatrix}$$

## 問題 2

掃き出し（基本変形）計算によって、つぎの行列を階段行列に変形し、その階数を求めよ。ただし  $a$  は定数とする。

(解)

$$(1) \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \text{ 階数は } 2.$$

$$(2) \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -5 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \text{ 階数は } 2.$$

$$(3) \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & -1 \\ 5 & 0 & 0 & 1 \\ -3 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 2 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \text{ 階数は } 4. \text{ つまり正則行列である.}$$

$$(4) \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & -1 \\ 5 & 0 & 1 & -1 \\ -3 & 2 & 1 & -1 \\ 3 & 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \text{階数は } 3.$$

$$(5) \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & a \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & a-9 \end{pmatrix}, \text{もし } a \neq 9 \text{ ならば、階数は } 3, \text{正則であり、もう一つスッ}$$

テプの掃き出しをおこない、単位行列になる、もし  $a = 9$  ならば、階数は 2.

$$(6) \begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 1 & 2 & 2 \\ a & a & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1-2a \end{pmatrix}, \text{もし } a \neq 1/2 \text{ ならば、階数は } 3, \text{もう一つステップの掃}$$

き出しをおこない、単位行列になる、もし  $a = 1/2$  ならば、階数は 2.

### 問題 3

つぎの行列を基本変形によって、階段行列に変形せよ。

$$(1) \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (2) \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1/3 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1/3 & 2/3 \end{pmatrix}$$

$$(3) \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (4) \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -2 \\ 1 & 3 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

(解)

$$(1) \text{ 第 1 行を } 1/2 \text{ 倍する。} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$(2) \text{ 第 2 行と第 3 行の入れ替え。} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1/3 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 & 1/3 & 2/3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(3) 要素 (1,3) と要素 (1,5) をゼロにすればよい。そのために、第 2 行を  $(-3)$  倍して、第 1 行に加

$$\text{える。さらに第 3 行を } (-2) \text{ 倍して、第 1 行に加える。} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$(4) \text{ 第 1 行と第 3 行の入れ替えを行えばよい。} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

## 1.4 逆行列

### 問題 4

基本変形での 3 つの行列を考える。つぎの 4 次のときについて、すべて正則であり、その逆行列を求めよ。 $(k \neq 0)$

$$(1) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (2) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (3) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & k & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(解)

$$(1) \text{ 行列式は } \det|A| = k, \text{ 逆行列 } A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/k & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$(2) \text{ 行列式は } \det|A| = -1, \text{ 逆行列 } A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}。すなわち入れ替えを再び行えば、$$

もとに戻る。

$$(3) \text{ 行列式は } \det|A| = 1, \text{ 逆行列 } A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -k & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}。行った操作が加えたので、引き算$$

をすればもとに戻る。行列式の値が1であるから、このような式変形をして順次に行列式が求められるような簡単な形にする。

**問題 5**

つぎの行列が逆行列をもつ条件を定め、そのときでの逆行列を求めよ。

$$(1) \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \quad (2) \begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 0 & a & 1 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix} \quad (3) \begin{pmatrix} a & 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b & 1 \\ 0 & 0 & 0 & b \end{pmatrix}$$

(解)

$$(1) \text{ 条件は } ad - bc \neq 0, \text{ 行列式は } ad - bc, \text{ 逆行列は } \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} \frac{d}{ad - bc} & \frac{-b}{ad - bc} \\ \frac{-c}{ad - bc} & \frac{a}{ad - bc} \end{pmatrix}. \quad (2) \text{ 条件は } a \neq 0, \text{ 行列式は } a^3, \text{ 逆行列は } \begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 0 & a & 1 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}^{-1} =$$

$$\begin{pmatrix} 1/a & -1/a^2 & 1/a^3 - 1/a^2 \\ 0 & 1/a & -1/a^2 \\ 0 & 0 & 1/a \end{pmatrix}. \quad (3) \text{ 条件は } a \neq 0, b \neq 0 \text{ で、行列式は } a^2 b^2,$$

$$\begin{pmatrix} a & 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b & 1 \\ 0 & 0 & 0 & b \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1/a & -1/a^2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/b & -1/b^2 \\ 0 & 0 & 0 & 1/b \end{pmatrix}.$$

## 問題 6

つぎの行列が逆行列をもつ条件を定め、そのときでの逆行列を求めよ。

$$(1) \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (2) \begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix}$$

$$(3) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 & 0 \\ b & a & 1 & 0 \\ c & b & a & 1 \end{pmatrix} \quad (4) \begin{pmatrix} 1 & a & ab & 0 \\ 0 & 1 & b & bc \\ 0 & 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(解)

$$(1) \text{ 正則行列であり、逆行列は } \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -a & ac-b \\ 0 & 1 & -c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$(2) \text{ 行列式は } a^2b, \text{ 逆行列は } \begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1/a & -1/a^2 & 0 \\ 0 & 1/a & 0 \\ 0 & 0 & 1/b \end{pmatrix}$$

$$(3) \text{ 正則行列であり、逆行列は } \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 & 0 \\ b & a & 1 & 0 \\ c & b & a & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -a & 1 & 0 & 0 \\ a^2-b & -a & 1 & 0 \\ -c+ab-a(a^2-b) & a^2-b & -a & 1 \end{pmatrix}$$

$$(4) \text{ 正則行列であり、逆行列は } \begin{pmatrix} 1 & a & ab & 0 \\ 0 & 1 & b & bc \\ 0 & 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -a & 0 & abc \\ 0 & 1 & -b & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -c \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

## 問題 7

$2 \times 2 = 4$  個の正方行列から作ったブロックで構成される正方行列  $\begin{pmatrix} A & B \\ \mathbf{0} & C \end{pmatrix}$  (ここで  $\mathbf{0}$  はゼロ行列とする) において、 $A, C$  の逆行列があるならば、この逆行列がつぎで与えられることを確かめよ。 $\begin{pmatrix} A^{-1} & -A^{-1}BC^{-1} \\ \mathbf{0} & C^{-1} \end{pmatrix}$

(解)

実際、右側からの積、左側からの積をおこなうとともに単位行列となる。

$$\begin{pmatrix} A & B \\ \mathbf{0} & C \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A^{-1} & -A^{-1}BC^{-1} \\ \mathbf{0} & C^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A^{-1} & -A^{-1}BC^{-1} \\ \mathbf{0} & C^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & B \\ \mathbf{0} & C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & E \end{pmatrix}$$