

### 3 行列式

#### 3.1 行列式の定義

##### 問題 1

- (1) 4 個の場合の順列  $4! = 24$  個を書き並べ、偶順列か奇順列かを調べよ。  
 (2) 順列はあみだ籤と一対一対応する。3 個あるいは 4 個の場合のそれぞれの順列に対応するあみだ籤をつくりなさい。その横棒が偶数か奇数で順列の符号数と対応していることを確かめよ。

【解】(1)

$$\begin{aligned} \text{sign}\{1, 2, 3, 4\} &= 1, & \text{sign}\{1, 2, 4, 3\} &= -1, & \text{sign}\{1, 3, 2, 4\} &= -1, & \text{sign}\{1, 3, 4, 2\} &= 1, \\ \text{sign}\{1, 4, 2, 3\} &= 1, & \text{sign}\{1, 4, 3, 2\} &= -1, & \text{sign}\{2, 1, 3, 4\} &= -1, & \text{sign}\{2, 1, 4, 3\} &= 1, \\ \text{sign}\{2, 3, 1, 4\} &= 1, & \text{sign}\{2, 3, 4, 1\} &= -1, & \text{sign}\{2, 4, 1, 3\} &= -1, & \text{sign}\{2, 4, 3, 1\} &= 1, \\ \text{sign}\{3, 1, 2, 4\} &= 1, & \text{sign}\{3, 1, 4, 2\} &= -1, & \text{sign}\{3, 2, 1, 4\} &= -1, & \text{sign}\{3, 2, 4, 1\} &= 1, \\ \text{sign}\{3, 4, 1, 2\} &= 1, & \text{sign}\{3, 4, 2, 1\} &= -1, & \text{sign}\{4, 1, 2, 3\} &= -1, & \text{sign}\{4, 1, 3, 2\} &= 1, \\ \text{sign}\{4, 2, 1, 3\} &= 1, & \text{sign}\{4, 2, 3, 1\} &= -1, & \text{sign}\{4, 3, 1, 2\} &= -1, & \text{sign}\{4, 3, 2, 1\} &= 1 \end{aligned}$$

24 個ある順列のうち、半数の 12 が正 (偶置換) であり、残りは負 (奇置換)。

(2) 略

##### 問題 2

行列式の値を求めよ。

$$(1) \det \begin{vmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{vmatrix} \quad (2) \det \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 3 & 3 & 3 \end{vmatrix} \quad (3) \det \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

【解】(1)  $\det \begin{vmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{vmatrix} = \cos \theta \cdot \cos \theta - \sin \theta(-\sin \theta) = 1$ . (注) この行列は時計方向への回転を表す。ただし反対方向では角度を  $\theta$  から  $-\theta$  に替える。

$$(2) \det \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 3 & 3 & 3 \end{vmatrix} = 1 \cdot 2 \cdot 3 + 0 \cdot 0 \cdot 3 + 0 \cdot 2 \cdot 3 - 1 \cdot 0 \cdot 3 - 0 \cdot 2 \cdot 3 - 0 \cdot 2 \cdot 3 = 6.$$

$$(3) \det \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 1 \cdot 2 \cdot 0 + 1 \cdot 0 \cdot 3 + 1 \cdot 2 \cdot 0 - 1 \cdot 0 \cdot 0 - 1 \cdot 2 \cdot 0 - 1 \cdot 2 \cdot 3 = -6.$$

##### 問題 3

つぎを示せ。

$$(1) \det \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ x_1 & x_2 \end{vmatrix} = x_2 - x_1 \quad (2) \det \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 \end{vmatrix} = (x_2 - x_1)(x_3 - x_1)(x_3 - x_2)$$

【解】(1)  $\det \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ x_1 & x_2 \end{vmatrix} = 1 \cdot x_2 - 1 \cdot x_1 = x_2 - x_1.$

(2)

$$\det \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 \end{vmatrix} = \det \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & x_2 - x_1 & x_3 - x_1 \\ 0 & x_2^2 - x_1^2 & x_3^2 - x_1^2 \end{vmatrix} = \det \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & x_3 - x_1 \\ x_2^2 - x_1^2 & x_3^2 - x_1^2 \end{vmatrix} = (x_2 - x_1)(x_3 - x_1) \times$$

$$\det \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ x_2 - x_1 & x_3 - x_1 \end{vmatrix} = (x_2 - x_1)(x_3 - x_1)(x_3 - x_2).$$

#### 問題 4

つぎを示せ。

$$\det \begin{vmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{vmatrix} = (a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca)$$

【解】 $\det \begin{vmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{vmatrix} = \det \begin{vmatrix} a & b & c \\ a+c & b+a & c+b \\ b & c & a \end{vmatrix} = \det \begin{vmatrix} a & b & c \\ a+c & b+a & c+b \\ a+c+b & b+a+c & c+b+a \end{vmatrix} =$

$$(a + b + c) \times \det \begin{vmatrix} a & b & c \\ a+c & b+a & c+b \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (a + b + c) \times \det \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a+c & b+a & c+b \end{vmatrix} =$$

$$(a + b + c) \times \det \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & b-a & c-a \\ 0 & b+a-(a+c) & c+b-(a+c) \end{vmatrix} = (a + b + c) \times \det \begin{vmatrix} b-a & c-a \\ b-c & b-a \end{vmatrix} =$$

$$(a + b + c) \{ (b-a)^2 - (b-c)(c-a) \} = (a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca)$$

#### 問題 5

$$\det \begin{vmatrix} a & b & 0 & 0 \\ c & d & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & b \\ 0 & 0 & c & d \end{vmatrix} = \left( \det \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \right)^2 = (ad - bc)^2$$

【解】 $\det \begin{vmatrix} a & b & 0 & 0 \\ c & d & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & b \\ 0 & 0 & c & d \end{vmatrix} = a \times \det \begin{vmatrix} d & 0 & 0 \\ 0 & a & b \\ 0 & c & d \end{vmatrix} + (-1) \cdot b \times \det \begin{vmatrix} c & 0 & 0 \\ 0 & a & b \\ 0 & c & d \end{vmatrix} = a \cdot d \times \det \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} +$

$$(-1)b \cdot c \times \det \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = (ad - bc) \times \det \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = \left( \det \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \right)^2 = (ad - bc)^2$$

### 3.2 行列式の性質

#### 問題 6

掃き出し計算における 3 つの基本行列に対してその行列式の値を求めよ。 $A = (a_{ij})$ ,  $i, j = 1, 2, \dots, n$  において、

- (1) 対角線上の  $(i, i)$  成分に対し、 $a_{ii} = k$  で、その他は  $a_{ij} = \delta_{ij}$
- (2) 対角線を対称にして、 $(i, j)$  と  $(j, i)$  が成分に対し、 $a_{ij} = 1, a_{ji} = 1$  でその他は  $a_{ij} = \delta_{ij}$ ,
- (3)  $a_{ii} = 1, a_{ij} = k$

【解】上の操作を表す行列のうち、(1) では、行列式は  $k$  となるが、その他の行列式の値は 1 となる。

### 3.3 余因子展開

#### 問題 7

3 次正方行列で行列式を求めるサラスの展開と、これを余因数展開による方法にもとづく結果と比較せよ。

$$\det \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = a_1 b_2 c_3 + a_2 b_3 c_1 + a_3 b_1 c_2 - a_1 b_3 c_2 - a_2 b_1 c_3 - a_3 b_2 c_1$$

【解】サラスの展開式はそのまま、各行と各列からの 3 個ずつ取り出して、置換の符号数 ( $\pm 1$ ) をかける式で得る。余因数展開では、一つの行あるいは列を選んで、その要素に関する余因子の行列式と符号数を掛け合わせればよい。行、列の選び方はどれを選んでも同じ値になる。たとえば、2 行目を選んだとすると、

$$\begin{aligned} & (-1)^{2+1} b_1 \times \det \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix} + (-1)^{2+2} b_2 \times \det \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ c_1 & c_3 \end{vmatrix} + (-1)^{2+3} b_3 \times \det \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix} \\ &= (-1)^{2+1} b_1 (a_2 c_3 - c_2 a_3) + (-1)^{2+2} b_2 (a_1 c_3 - c_1 a_3) + (-1)^{2+3} b_3 (a_1 c_2 - c_1 a_2) \\ &= -a_2 b_1 c_3 + a_3 b_1 c_2 + a_1 b_2 c_3 - a_3 b_2 c_1 - a_1 b_3 c_2 + a_2 b_3 c_1 \end{aligned}$$

となるから、一致していることがわかる。

#### 問題 8

つぎの 4 次正方行列の余因子行列を求めよ。

$$(1) \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ 0 & b & c & d \\ 0 & 0 & c & d \\ 0 & 0 & 0 & d \end{pmatrix} \quad (2) \begin{pmatrix} a & b & 0 & 0 \\ c & d & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & b \\ 0 & 0 & c & d \end{pmatrix}$$

【解】(1) 各要素に対して、すべて計算をしなければならない。たとえば、要素  $(1, 1)$  に対

$$\text{して } A_{11} = (-1)^{1+1} \det \begin{vmatrix} \emptyset & \emptyset & \emptyset & \emptyset \\ \emptyset & b & c & d \\ \emptyset & 0 & c & d \\ \emptyset & 0 & 0 & d \end{vmatrix} = (-1)^{1+1} \det \begin{vmatrix} b & c & d \\ 0 & c & d \\ 0 & 0 & d \end{vmatrix} = bcd, \text{ 要素 } (1, 3) \text{ に対して}$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3} \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ 0 & b & c & d \\ 0 & 0 & c & d \\ 0 & 0 & 0 & d \end{pmatrix} = (-1)^{1+3} \det \begin{vmatrix} 0 & b & d \\ 0 & 0 & d \\ 0 & 0 & d \end{vmatrix} = 0, \text{ 要素 } (2,4) \text{ に対して } A_{24} =$$

$$(-1)^{2+4} \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ a & b & c & d \\ 0 & 0 & c & d \\ 0 & 0 & 0 & d \end{pmatrix} = (-1)^{2+4} \det \begin{vmatrix} a & b & c \\ 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0. \text{ こうして続ければ答えが出る。各}$$

要素の余因子とともに転置を行うことに注意する。結果は

$$\begin{pmatrix} bcd & -bcd & 0 & 0 \\ 0 & acd & -acd & 0 \\ 0 & 0 & abc & -abd \\ 0 & 0 & 0 & abc \end{pmatrix} =$$

$$abcd \begin{pmatrix} 1/a & -1/a & 0 & 0 \\ 0 & 1/b & -1/b & 0 \\ 0 & 0 & 1/c & -1/c \\ 0 & 0 & 0 & 1/d \end{pmatrix} \text{ となる。ただし最後の行列は、要素の値はゼロではないとし}$$

た場合で、割り算をした。与えられた行列とその余因子行列とは  $A\tilde{A} = \det|A| = abcd$  の関係があることで確かめられる。

(2) についても各要素について、余因子を求めたのちに転置を行う。すべての要素について  $ad - bc = \det \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$  が共通であるから、つぎの形で求められる。

$$\begin{pmatrix} d(ad-bc) & -b(ad-bc) & 0 & 0 \\ -c(ad-bc) & a(ad-bc) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & d(ad-bc) & -b(ad-bc) \\ 0 & 0 & -c(ad-bc) & a(ad-bc) \end{pmatrix} = \det \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \begin{pmatrix} d & -b & 0 & 0 \\ -c & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & d & -b \\ 0 & 0 & -c & a \end{pmatrix}$$

### 問題 9

つぎの行列の余因子行列を求めよ。またそれを持ちいて逆行列を求めよ。

$$(1) \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 4 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$(\text{答}) \tilde{A} = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 0 \\ -14 & -1 & 9 \\ -6 & -3 & 9 \end{bmatrix}, A^{-1} = \frac{1}{18}A$$

$$(2) \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 5 & -1 \end{pmatrix}$$

$$(\text{答}) \tilde{A} = \begin{bmatrix} -3 & 9 & 6 \\ 1 & -2 & -1 \\ 5 & -10 & -8 \end{bmatrix}, A^{-1} = \frac{1}{3}A$$

$$(3) \begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 \\ -1 & 0 & 3 \\ 3 & -2 & 5 \end{pmatrix}$$

$$(\text{答}) \tilde{A} = \begin{bmatrix} 6 & 9 & -3 \\ 14 & 16 & -4 \\ 2 & 1 & -1 \end{bmatrix}, A^{-1} = \frac{-1}{6}A$$

$$(4) \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ d & b & 0 \\ e & f & c \end{pmatrix}$$

$$(\text{答}) \tilde{A} = \begin{bmatrix} bc & 0 & 0 \\ -cd & ac & 0 \\ df - be & -af & ab \end{bmatrix}, A^{-1} = \frac{1}{abc}A$$

## 問題 10

クラメル公式をもちいて解をもとめよ。

$$(1) \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \quad (\text{答}) \ x = 7/9, y = 5/9, z = 1/3$$

$$(2) \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 3 & 1 & 5 \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \\ 2 \end{bmatrix} \quad (\text{答}) \ x = 2, y = 3/2, z = -1/2$$

## 問題 11

つぎの行列式の値を余因数展開により求めて示せ。

$$(1) \det \begin{vmatrix} a & -1 & 0 & 0 \\ b & x & -1 & 0 \\ c & 0 & x & -1 \\ d & 0 & 0 & x \end{vmatrix} = ax^3 + bx^2 + cx + d \quad (2) \det \begin{vmatrix} 0 & a & b & c \\ -a & 0 & c & b \\ -b & -c & 0 & a \\ -c & -b & -a & 0 \end{vmatrix} = (a^2 - b^2 + c^2)^2$$

$$(3) \det \begin{vmatrix} x & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & x & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x & -1 \\ a & b & c & d & e \end{vmatrix} = a + bx + cx^2 + dx^3 + ex^5$$

【解】 略