

1 【解】

(1) ベクトルの和は各成分 (要素) を加えるから、 $\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ から、 $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2+1 \\ -1+(-1) \\ 1+0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

したがって、ノルムは各成分の 2 乗和の平方根とするから、 $|\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}| = \sqrt{3^2 + (-2)^2 + 1^2} = \sqrt{14}$.

(2) 内積の定義は、成分どうしを掛け合わせるから、 $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = {}^t\boldsymbol{a}\boldsymbol{b} = 2 \cdot 1 + (-1) \cdot (-1) + 1 \cdot 0 = 2 + 1 = 3$.

(3) 2 つのベクトルの挟む角を θ とすると、 $\cos \theta = \frac{(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})}{|\boldsymbol{a}| \cdot |\boldsymbol{b}|}$ である。この分母の値は、 $|\boldsymbol{a}| = \sqrt{2^2 + (-1)^2 + 1^2} = \sqrt{6}, |\boldsymbol{b}| = \sqrt{1^2 + (-1)^2 + 0^2} = \sqrt{2}$ となるから、 $\cos \theta = \frac{3}{\sqrt{6}\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$. この条件を満たす $0 \leq \theta \leq \pi$ は、 $\theta = \frac{\pi}{6} = 30^\circ$ である。

| | | | | | |
|----------|-------------|-----|---|-----|----------------------------|
| 答 (1) | $\sqrt{14}$ | (2) | 3 | (3) | $\frac{\pi}{6} = 30^\circ$ |
|----------|-------------|-----|---|-----|----------------------------|

2 【解】

$$\begin{array}{l} \left| \begin{array}{ccc|c} \boxed{2} & 0 & 4 & \cdots r_1 \\ 1 & 2 & 2 & \cdots r_2 \\ a & a & 1 & \cdots r_3 \end{array} \right| \Rightarrow \left| \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & \cdots r_1 \times 1/2 = r_4 \\ 0 & \boxed{2} & 0 & \cdots r_2 - 1 \times r_4 = r_5 \\ 0 & 0 & 1 - 2a & \cdots r_3 - a \times r_4 = r_6 \end{array} \right| \Rightarrow \left| \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & \cdots r_4 = r_7 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots r_5/2 = r_8 \\ 0 & 0 & \boxed{1-2a} & \cdots r_6 = r_9 \end{array} \right| \\ \Rightarrow \left| \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & \cdots r_7 - 2 \times r_{12} = r_{10} \\ 0 & 1 & 0 & \cdots r_8 = r_{11} \\ 0 & 0 & 1 & \cdots r_9/(1-2a) = r_{12} \end{array} \right| \end{array}$$

この行列の (3, 3) 成分が 0 であると、つぎのステップに進めない。階数が 3 となるためには、この成分が $1 - 2a \neq 0$ でなければならない。つまり、 a の値が $\frac{1}{2}$ 以外でなければならない。

| | |
|---|---------------------------|
| 答 | $a \neq \frac{1}{2}$ となる値 |
|---|---------------------------|

3 【解】

与えられた行列の関係式において、左辺の第 1 項を移項し、その行列の差を計算する。

$2X = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -2 & -4 \end{pmatrix}$. したがって $X = (-1) \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ となる。

| | |
|---|---|
| 答 | $X = (-1) \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ |
|---|---|

(裏面に問題が続きます)

4 【解】

$$\left| \begin{array}{cccc|c} \boxed{1} & 2 & -1 & 0 & \cdots r_1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & \cdots r_2 \\ 1 & 3 & 1 & 1 & \cdots r_3 \end{array} \right| \Rightarrow \left| \begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & 0 & \cdots r_1 = r_4 \\ 0 & \boxed{1} & 2 & 1 & \cdots r_2 = r_5 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & \cdots r_3 - 1 \times r_4 = r_6 \end{array} \right| \Rightarrow \left| \begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -5 & -2 & \cdots r_4 - r_8 = r_7 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & \cdots r_5 = r_8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots r_6 - r_8 = r_9 \end{array} \right|$$

したがって、階数は2となる。

| | |
|---|--|
| 答 | $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -5 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, 階数は2 |
|---|--|

5 【解】

一次結合の関係式は係数を x, y とおいて、 $\boldsymbol{a} = x\boldsymbol{b} + y\boldsymbol{c}$ となるから、それぞれの値の関係式では $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + 2y \\ 3x + 3y \\ 0 \end{pmatrix}$ 。したがって、各成分では $\begin{cases} x + 2y = 0 \\ 3x + 3y = 0 \\ 1 = 0 \end{cases}$ 。この3つの関係式を満たす x, y があるとき、すなわち、方程式を解くことができるならば、一次結合で表されることになす。しかし3番目の関係式から、この3つを同時に満たすものは存在しない。したがって、ベクトルの関係では一次結合では表せない。

| | |
|---|------------|
| 答 | 一次結合では表せない |
|---|------------|

6 【解】

直観的にみると、 $a = b$ とすると、第1列と第2列は同じとなるから、 $a - b$ を因数にもつことがわかる。同様に $b - c, c - a$ も因数。したがってこれらの積の定数倍が答えとなる。あるいは3行3列であるから、直接展開した式を因数分解することで答えができる。いま行列式の式変形から計算してみる。

$$\det \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ bc & ca & ab \end{vmatrix} \stackrel{\text{(転置)}}{=} \det \begin{vmatrix} 1 & a & bc \\ 1 & b & ca \\ 1 & c & ab \end{vmatrix} \stackrel{\text{(2, 3行の掃き出し)}}{=} \det \begin{vmatrix} 1 & a & bc \\ 0 & b-a & ca-bc \\ 0 & c-a & ab-bc \end{vmatrix} \stackrel{\text{(1列の展開)}}{=} \det \begin{vmatrix} b-a & ca-bc \\ c-a & ab-bc \end{vmatrix}$$
$$\stackrel{\text{(括り出し)}}{=} (b-a)(c-a) \times \det \begin{vmatrix} 1 & -c \\ 1 & -b \end{vmatrix} = (a-b)(b-c)(c-a)$$

| | |
|---|-------------------|
| 答 | $(a-b)(b-c)(c-a)$ |
|---|-------------------|

7

【解】直線は $\frac{x - (-1)}{1} = \frac{y - 0}{1} = \frac{z - 0}{2}$ であるから、点 $(-1, 0, 0)$ を通り、方向ベクトルは $(1, 1, 2)$ である。また平面 $1 = 2x + 2y + z = (x, y, z) \cdot {}^t(2, 2, 1)$ から、法線ベクトルは $(2, 2, 1)$ である。いま求める平面の法線ベクトルを (a_1, a_2, a_3) とすると、2つのベクトルに $(1, 1, 2)$ と $(2, 2, 1)$ に直交する。それぞれの内積に対する値がゼロとなる。よって $2a_1 + 2a_2 + a_3 = 0, a_1 + a_2 + 2a_3 = 0$ を満たす。これを解くと、 $a_1 = c, a_2 = -c, a_3 = 0$ である。これを法線ベクトルとし、点 $(-1, 0, 0)$ を含むような平面は $a_1(x - (-1)) + a_2(y - 0) + a_3(z - 0) = 0$ であるから、 $x + 1 - y = 0$ 。すなわち $x - y = -1$ で、 z 軸にそって上下に移動できる平面である。

| | |
|---|--------------|
| 答 | $x - y = -1$ |
|---|--------------|

(以上)