

# 1 平面・空間のベクトル

## 1.2 直線・平面の方程式

### 問題 1

つぎで定まる直線の方程式を求めよ。

(1) 点  $A(1, -2, 3)$  を通り、方向ベクトルが  $\mathbf{d} = (3, -2, 1)$  の直線。

(2) 2 点  $A(1, -2, 3)$ 、 $B(1, 2, 0)$  を通る直線

(3) 点  $A(3, 2, 2)$  を通り、直線  $x = \frac{y}{4} = z$  に平行な直線

答

(1)  $\frac{x-1}{3} = \frac{y-(-2)}{-2} = \frac{z-3}{1}$ , 少し整理すると、 $\frac{x-1}{3} = \frac{y+2}{-2} = z-3$ . (2)  $\overrightarrow{AB} = (1, 2, 0) - (1, -2, 3) = (0, 4, -3)$ . 第一成分は方向がゼロだから、 $x-1=0$ ,  $\frac{y-(-2)}{4} = \frac{z-3}{-3}$ , すなわち  $x=1$  の平面内での直線  $z = -\frac{3}{4}y + \frac{3}{2}$  である。 (3) 方向ベクトルは、 $\frac{x}{1} = \frac{y}{4} = \frac{z}{1}$  と平行だから、 $(1, 4, 1)$  である。よって  $\frac{x-3}{1} = \frac{y-2}{4} = \frac{z-2}{1}$ .

### 問題 2

つぎの条件を満たす平面の方程式を求めよ。

(1) 点  $A(-1, 5, 3)$  を通り、 $\mathbf{n} = (2, -5, 7)$  に垂直な平面。

(2) 3 点  $A(1, -1, 1)$ ,  $B(0, 1, 0)$ ,  $C(2, 0, -1)$  を通る平面。

(3) 点  $A(2, -1, 1)$  を通り、 $x$  軸に垂直な平面。

(4) 平面  $x + 2y + 3z = 1$  に平行で、点  $A(2, 1, 1)$  を通る平面。

答

(1)  $2(x+1)+(-5)(y-5)+7(z-3)=0$ ,  $2x-5y+7z=-6$ . (2) 平面の方程式を  $ax+by+cz=d$  において、条件から係数を定める。 
$$\begin{cases} a \cdot 1 + b \cdot (-1) + c \cdot 1 = d \\ a \cdot 0 + b \cdot 1 + c \cdot 0 = d \\ a \cdot 2 + b \cdot 0 + c \cdot (-1) = d \end{cases}, \begin{cases} a - b + c = d \\ b = d \\ 2a - c = d \end{cases} . \text{つまり、}$$
  $a=d, c=d$  となるから、 $dx+dy+dz=d$  となる。 $d=0$  は平面とならないから、 $d \neq 0$  として割り算をして、平面の方程式は  $x+y+z=1$  を得る。

[別解]

(3)

(4)

### 問題 3

xyz 空間内に 2 点  $A(-1, 4, 3)$ ,  $B(2, 3, 5)$  がある。

(1) 直線  $AB$  の方程式を表せ。

(2) この直線と垂直に交わるような平面の方程式の形を表せ。

(3) 平面の方程式が点  $C(2, 3, 7)$  含むよう移動した方程式を定めよ。

- (4) このときの平面と直線の交点を求めよ。

答

問題 4

2 つの平面の方程式  $x - y + 2z - 1 = 0$ ,  $2x + y + z + 4 = 0$  についてつぎの問いに答えよ。

- (1) 平面が交わってできる直線、すなわち交線の方程式を求めよ。
- (2) 2 平面のなす角  $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$  を求めよ。
- (3) 2 平面の交線を含み、点  $P(1, 1, 1)$  を通る平面の方程式を求めよ。

答

問題 5

xy 平面では、点  $P(p, q)$  と直線  $ax + by + c = 0$  との距離は

$$\frac{|ap + bq + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

で与えられ、xyz 空間の場合には点  $P(p, q, r)$  と直線  $ax + by + cz + d = 0$  との距離は

$$\frac{|ap + bq + cr + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

となることを用い、つぎを求めよ。

- (1) xy 平面で直線  $ax + by + c = 0$  と原点との間の距離。
- (2) 点  $P(-3, 2, -2)$  と直線  $x - 2y + 2z = -4$  との距離。
- (3) 平行な 2 平面  $3x + 3y - 4z = 2$ ,  $3x + 3y - 4z = 5$  の距離 (各平面の 2 点を結ぶときの最短距離)。

答