完全 WKB 解析と積分表示
— 完全 WKB 解析への一つの入門 —

竹井 義次 (京大・数理研)

Voros に始まり，Pham を中心とするニース大学の人達の寄与により発展してきた「完全 WKB 解析 (exact WKB analysis, あるいは complex WKB analysis)」は，微分方程式の解の大域的な性質を調べるのに有効な方法である (cf. [10], [6], [8])．この完全 WKB 解析への一つの入門を兼ねて，このノートでは，Laplace 型方程式を題材に，完全 WKB 解析と解の積分表示との関係を論じる．古典的な積分表示式やそれに対する最急降下法と完全 WKB 解析の関係を調べることにより，完全 WKB 解析 (特に，その中で中心的な役割を果たす WKB 解の Borel 和) の意味合いをより明らかなものにしてみたい．

1 最急降下法

まず，本論への導入として，古典的に良く知られた Airy 方程式の Stokes 現象を取り上げよう．Airy の方程式

$$\frac{d^2u}{dz^2} = zu \tag{1}$$

に対して，次のような漸近挙動をもつ解 (Airy 函数と呼ばれる) が存在する．

$$u(z) \sim \frac{1}{2\sqrt{\pi}} z^{-1/4} \exp\left(-\frac{2}{3}z^{3/2}\right) \qquad (z \to +\infty \text{ のとき}), \tag{2}$$

$$u(z) \sim \frac{1}{\sqrt{\pi}} (-z)^{-1/4} \sin\left(\frac{2}{3}(-z)^{3/2} + \frac{\pi}{4}\right) \qquad (z \to -\infty \text{ のとき}). \tag{3}$$

より詳しく言うと，(2) という漸近挙動をもつ (1) の解 ($z \to +\infty$ で recessive な解) が一意的に定まり，それを実軸に沿って $z \sim -\infty$ まで解析接続すれば $z \to -\infty$ では (3) が成り立つという訳である．この状況を，方程式 (1) の (唯一の) 特異点である無限遠点 $z = \infty$ を中心に見直してみれば，上記の解は $z = \infty$ を除いて正則でありながら，$z = \infty$ に近づく際にはその近づく方向によって漸近挙動が劇的に変化していることになる．「Stokes 現象」とは，このように特異点に近づく方向によって解の漸近挙動が著しく異なる現象を表す言葉である．

では，公式 (2), (3) は，具体的にはどのようにして導出すればよいのだろうか？こうした Stokes 現象やモノドロミー群といったものを計算するとき，よく用いられるの

が解の積分表示式である．良く知られたように，Airy 函数 (以下 $\mathrm{Ai}(z)$ という記号で表す) は次のような積分表示式をもっている．

$$\mathrm{Ai}(z) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\left(\frac{t^3}{3}+zt\right)}dt. \tag{4}$$

この積分表示式が $z \to \infty$ としたときどのような漸近挙動を示すかが問題である．そこで，η を正の大きいパラメータとして

$$z = \eta^{2/3}x, \quad t = -i\eta^{1/3}s \tag{5}$$

というスケール変換 (+ 積分変数の回転) を行って，問題の積分を次の形に書き換えよう．

$$\mathrm{Ai}(z) = \mathrm{Ai}(\eta^{2/3}x) = \frac{\eta^{1/3}}{2\pi i}\int_{-i\infty}^{i\infty} e^{\eta\left(-\frac{s^3}{3}+xs\right)}ds. \tag{6}$$

この積分 (6) は，$f(s,x) \stackrel{\mathrm{def}}{=} -s^3/3 + xs$ を相函数とする (大きなパラメータを含んだ) 標準的な形の積分であり，その漸近展開はいわゆる最急降下法 (method of steepest descents) により求めることができる (cf., e.g., [7])．すなわち，

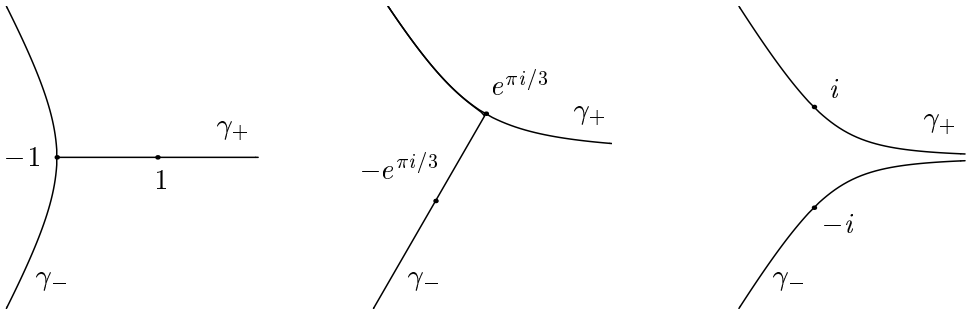
(I) 問題の積分を，その相函数 f の鞍点 (f の積分変数に関する微分が消える点) を通る $\mathrm{Re}\, f$ の最急降下路 ($-\mathrm{grad}\, f$ の解曲線，すなわち $\mathrm{Re}\, f$ が最も早く減少する曲線) に沿う積分に分解し，

(II) そして，各々の最急降下路に沿う積分の漸近展開については，鞍点法を適用する．(つまり，各最急降下路に沿う積分については，鞍点の近傍以外からの寄与が指数函数的に小さいことに注意して，まず鞍点 $s = s_0$ の近傍で $f(s) = f(s_0) - \sigma^2$ という (s から σ への) 変数変換を行い，次に振幅にあたる部分を鞍点で Taylor 展開した上で，最後に項別に $\int e^{-\eta\sigma^2}a_n\sigma^n d\sigma$ という形の積分を実行して漸近展開を求める .)

Airy 函数 $\mathrm{Ai}(z)$ の場合，積分表示式 (6) が x をパラメータとして含んでいるために，こうした鞍点や最急降下路が x の偏角と共に変化する．その結果，最急降下法を用いて得られる漸近展開の形が x の偏角に依存して変わることになる．

例えば $x = 1$ (i.e., $\arg x = 0$) のとき，相函数 $f(s,1)$ は 2 つの鞍点 $s = \pm 1$ をもつ．虚軸に沿う問題の積分 (6) は，このうち特に $s = -1$ を通る最急降下路 γ_- に沿う積分に等しい (Figure 1 の左図参照) ので，従ってその漸近展開は鞍点 $s = -1$ での Taylor 展開から計算される．公式 (2) はその第 1 項を書き下したものである．

これに対して，$\arg x$ の値を次第に大きくして行くと，Figure 1 が得られる．相函数 f の鞍点 $s = \pm x^{1/2}$ は原点の回りを反時計回りに回転し，それに応じて最急降下路も次第に変形されていく．特に $\arg x = 2\pi/3$ において，鞍点 $s = -e^{\pi i/3}$ を通る最急降下路 γ_- が他の鞍点 $s = e^{\pi i/3}$ に突っ込むという現象が観察され (中央の図参照)，それを境



($x = 1$ のとき)　　($x = e^{2\pi i/3}$ のとき)　　($x = -1$ のとき)

Figure 1 : 積分 (6) の鞍点と最急降下路

として最急降下路のパターンが右図のように変化する．そして $x = -1$ (i.e., $\arg x = \pi$) では，問題の積分 (6) は 2 つの鞍点 $s = \pm i$ を通る最急降下路 $\gamma_\pm$ に沿う積分の和として表され，その漸近展開は 2 つの鞍点からの寄与の和として与えられることになる．この第 1 項を計算したのが漸近公式 (3) に他ならない．

こうして，Airy 方程式 (1) に対する Stokes 現象が，積分表示式に最急降下法を適用することにより導出された．では，より一般の方程式に対して同様の解析を行うことは可能だろうか？解が積分表示式をもつような方程式は限られており，この一般化は決して簡単ではない．しかし，不可能でもない．実際，完全 WKB 解析というのは，この積分表示に対する最急降下法を一般化する理論と考えることができるのである．以下，その辺りの状況を見ていくことにしよう．

2　WKB 解とその Borel 和

前節で Airy 函数の Stokes 現象を導出する際，(5) というスケール変換を行った．この (5) は微分方程式 (1) を

$$\frac{d^2u}{dx^2} = \eta^2 x u \tag{7}$$

という形に変換する．これは (η を Planck 定数の逆数と考えれば) $Q(x) = x$ をポテンシャルにもつ 1 次元 Schrödinger 方程式である．こうした Schrödinger 方程式のように，大きなパラメータ η (> 0) を含んだ方程式の解の性質を論じるのが (完全) WKB 解析である．この節では，次節への準備として，完全 WKB 解析において中心的な役割を果たす WKB 解とその Borel 和について解説する．

次の方程式を考える．

$$P\psi = \left(\frac{d^m}{dx^m} + q_{m-1}(x)\eta \frac{d^{m-1}}{dx^{m-1}} + \cdots + q_0(x)\eta^m \right) \psi = 0. \tag{8}$$

ここで解 ψ が次の形をもつと仮定しよう．

$$\psi = \exp \int_{x_0}^{x} S dx, \quad S = \eta S_{-1}(x) + S_0(x) + \eta^{-1} S_1(x) + \cdots \tag{9}$$

(但し x_0 は定点)．これを (8) に代入すれば，S に関する (非線型) 方程式が得られる．例えば 2 階 (i.e., m=2) のときは，

$$S^2 + \frac{dS}{dx} + q_1(x)\eta S + q_0(x)\eta^2 = 0. \tag{10}$$

これより，各 $S_j(x)$ は次を満たすことがわかる．

$$S_{-1}^2 + q_1(x) S_{-1} + q_0(x) = 0, \tag{11}$$

$$2S_{-1}S_j + \sum_{k=0}^{j-1} S_k S_{j-1-k} + \frac{dS_{j-1}}{dx} + q_1(x) S_j = 0 \quad (j \geq 0). \tag{12}$$

すなわち，$S_{-1}(x)$ は 2 次方程式 (11) を満たし，その根を一つ固定すれば，他の $S_j(x)$ は (12) により帰納的に一意に求まる．一般の m に対しても状況は同様で，$S_{-1}(x)$ は

$$S_{-1}^m + q_{m-1}(x) S_{-1}^{m-1} + \cdots + q_0(x) = 0 \tag{13}$$

という m 次方程式の根として定まり，それを一つ固定すれば他の $S_j(x)$ は帰納的に一意に求まる．従って，m 次代数方程式 (“特性方程式”)

$$\xi^m + q_{m-1}(x)\xi^{m-1} + \cdots + q_0(x) = 0 \tag{14}$$

の根を $\xi = \xi_j(x)$ $(j = 1, \ldots, m)$ で表すことにすれば，微分方程式 (8) は

$$\begin{aligned} \psi_j &= \eta^{-1/2} \exp \int_{x_0}^{x} (\eta \xi_j(x) + \cdots)\, dx \\ &= \exp\left(\eta \int_{x_0}^{x} \xi_j(x) dx\right) \sum_{n=0}^{\infty} \psi_{j,n}(x) \eta^{-(n+1/2)} \end{aligned} \tag{15}$$

という形の解をもつことになる .(後の便宜上，$\eta^{-1/2}$ という因子をかけた形を採用した .) これが (8) の WKB 解である．

このように，WKB 解の構成の仕方は至極単純である．しかし，方程式 (8) が特異摂動の方程式 (方程式全体を η^m で割ればわかるように，最高階の微分の項の前に微小なパラメータが掛かるような方程式) であるが故に，WKB 解はほとんどいつも発散してしまう．この発散の困難を切り抜けるために，完全 WKB 解析では Borel 総和法を利用する．

ここで Borel 総和法の定義を思い出しておこう．一般に収束するとは限らない

$$\psi = e^{\eta y_0} \sum_{n \geq 0} \psi_n \eta^{-(n+\alpha)} \quad (\alpha > 0) \tag{16}$$

という形の (η^{-1} の) 無限級数に対して，その Borel 変換 $\psi_B(y)$ (あるいは $\mathcal{B}\psi(y)$) を

$$\psi_B(y) = \mathcal{B}\psi(y) = \sum_{n \geq 0} \frac{\psi_n}{\Gamma(n+\alpha)} (y + y_0)^{n+\alpha-1} \tag{17}$$

で定義する．さらに，その Laplace 積分

$$\Psi \stackrel{\text{def}}{=} \int_{-y_0}^{\infty} e^{-\eta y} \psi_B(y) dy \tag{18}$$

(但し，積分路は正の実軸に平行に取るものと約束する) が意味をもつとき，Ψ を最初に与えられた級数 ψ の Borel 和と呼ぶ．Borel 和 Ψ を (発散) 級数 ψ の代用物と考えるのが Borel 総和法である．

この Borel 総和法の定義は，初めて目にした人にはやや人為的な印象を与えるかも知れない．しかしこの総和法は，解析的には非常に自然なものである．例えば $\{y > 0\}$ に台をもつ $\mathbb{R}$ 上の函数 $\phi(y)$ に対して，その Laplace 変換

$$\hat{\phi}(\eta) = \int e^{-\eta y} \phi(y) dy \tag{19}$$

を考える．特に，$y^\mu Y(y)$ ($Y(y)$ は Heaviside の函数，すなわち $\{y > 0\}$ の特性函数) の Laplace 変換は

$$\widehat{y^\mu Y}(\eta) = \Gamma(\mu + 1) \eta^{-(\mu+1)} \tag{20}$$

で与えられる．これと (17) を比べればわかるように，Borel 変換は実は逆 Laplace 変換 (正確には，その形式巾級数への形式的な拡張) なのである．従って，Laplace 積分 (18) で定義される Borel 和は，自然に元の級数の (Laplace 変換を経由した) 解析的な代用物と見なせる．実際，最初の級数 ψ が収束級数の場合はその Borel 和 Ψ も収束して元の級数に一致するし，ψ が発散級数であっても，Borel 和 Ψ が意味をもつならその ($\eta \to +\infty$ での) 漸近展開が ψ と一致することが証明できる．このように，Borel 総和法というのは解析的に自然な総和法である．

完全 WKB 解析では，収束しない WKB 解 (15) に対して，独立変数 x を単なるパラメータと見なした上で，η についての Borel 総和法 (但し $\alpha = 1/2$) を適用して意味づけを行う．つまり，WKB 解 ψ_j それ自身の代わりに，その Borel 変換 $\psi_{j,B}$ や Borel 和 Ψ_j の性質を調べるのである (Borel 変換の定義式 (17) の分母に現れる Γ 函数のおかげで，Borel 変換の収束性は元の級数の収束性に比べて格段に良くなることに注意．例えば，WKB 解の Borel 変換はいつでも収束する .) ただ，Borel 総和法それ自身の自然さと，WKB 解の意味づけという当面の問題に Borel 総和法が適しているかどうかとは，また別の問題である．WKB 解の Borel 和が本当に自然な対象であるかどうか？— この問いを積分表示との関連で論じるのが，このノートの具体的な目的である．

3　完全 WKB 解析と最急降下法の関係について

前節の最後に述べた問いに答えるために，以下，微分方程式 (8) の係数 $q_j(x)$ が 1 次式

$$q_j(x) = c_j x + d_j \quad (c_j, d_j \in \mathbb{C}) \tag{21}$$

である Laplace 型の場合を考察する．Laplace 型方程式の場合（大きなパラメータ η を含んだ）Laplace 変換

$$\hat{\psi}(\xi) = \int e^{-\eta x\xi}\psi(x)dx, \quad \psi(x) = \int e^{\eta x\xi}\hat{\psi}(\xi)d\xi \tag{22}$$

により (8) は 1 階の方程式に変換されるので，その 1 階方程式を具体的に解くことにより，次のような解の積分表示式が得られる．

$$\psi(x) = \int e^{\eta x\xi}e^{\eta g(\xi)}\frac{1}{C(\xi)}d\xi, \tag{23}$$

但し

$$C(\xi) = c_{m-1}\xi^{m-1} + \cdots + c_0, \quad D(\xi) = \xi^m + d_{m-1}\xi^{m-1} + \cdots + d_0, \tag{24}$$

$$g(\xi) = \int^{\xi} \frac{D(\xi)}{C(\xi)}d\xi. \tag{25}$$

（§1 で扱った Airy 函数の積分表示はその特別な場合 .) 従って，Laplace 型方程式の解析においては，積分表示式 (23) を利用した §1 で論じたような最急降下法，および完全 WKB 解析という 2 つのアプローチが可能である．我々は，この 2 つの関係を明らかにしたい．

積分表示式 (23) の相函数 $x\xi + g(\xi)$ を $f(x,\xi)$ で表そう：

$$f(x,\xi) = x\xi + g(\xi). \tag{26}$$

すると，

$$\frac{\partial f}{\partial \xi} = x + \frac{dg}{d\xi} = x + \frac{D(\xi)}{C(\xi)} \tag{27}$$

であるから，$f(x,\xi)$ の鞍点は特性方程式 (14)（今の場合 $D(\xi) + xC(\xi) = 0$ で与えられる）の根 $\xi = \xi_j(x)$ $(j = 1, \ldots, m)$ と一致することがわかる．そこで，鞍点 $\xi_j(x)$ を通る $\mathrm{Re}\, f$ の最急降下路を γ_j として，

$$\psi_j^{\dagger}(x) = \int_{\gamma_j} e^{\eta f(x,\xi)}\frac{1}{C(\xi)}d\xi \tag{28}$$

で定義される (8) の解を考える．§1 の議論から推察されるように，(28) は最急降下法において基本的な役割を果たす解である．

この解と WKB 解の関係を調べるために，(28) において

$$y = -f(x,\xi) = -(x\xi + g(\xi)) \tag{29}$$

という積分変数の変換を行う．鞍点 $\xi_j(x)$ は変換 (29) の特異点であり，そこでは逆変換が 2 つの分枝 $\xi = \xi_\pm(x,y)$ をもつことに注意すれば，次式を得る．

$$\psi_j^\dagger(x) = \int_{\widetilde{\gamma}_j} e^{-\eta y}\left(\varphi_+(x,y) - \varphi_-(x,y)\right) dy, \tag{30}$$

但し，

$$\varphi_\pm(x,y) = \left(C(\xi)\frac{dy}{d\xi}\right)^{-1}\Big|_{\xi=\xi_\pm(x,y)} = -\frac{1}{C(\xi)x + D(\xi)}\Big|_{\xi=\xi_\pm(x,y)} \tag{31}$$

であり，$\widetilde{\gamma}_j$ は $-y_j(x) \stackrel{\text{def}}{=} -f(x,\xi_j(x))$ を始点として正の実軸に平行に走るような積分路を表す (cf. Figure 2，鞍点 $\xi_j(x)$ から 2 方向に出る $\mathrm{Re}\, f$ の最急降下路は，変換 (29) によって共に $\widetilde{\gamma}_j$ に移されることに注意)．

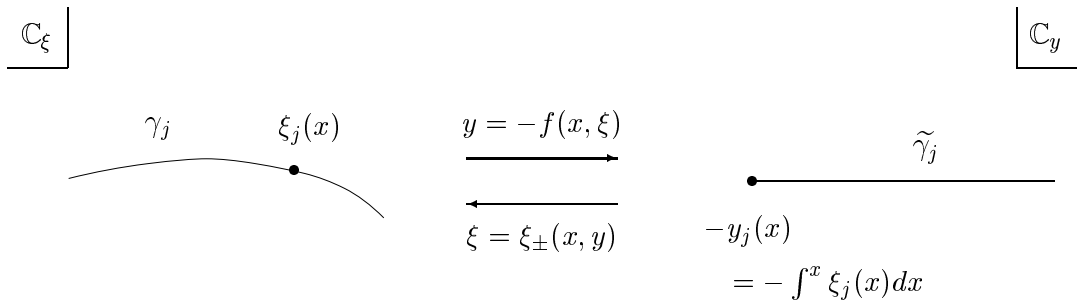


Figure 2

このとき，次が成立する．

Proposition (i) $y_j(x) = f(x,\xi_j(x))$ は $\int^x \xi_j(x)dx$ という形に書ける．
(ii) 作用素 P の Borel 変換

$$\frac{\partial^m}{\partial x^m} + (c_{m-1}x + d_{m-1})\frac{\partial^m}{\partial x^{m-1}\partial y} + \cdots + (c_0 x + d_0)\frac{\partial^m}{\partial y^m} \tag{32}$$

を P_B で表せば，$\varphi_\pm(x,y)$ は次の方程式を満足する．

$$P_B\,\varphi_\pm(x,y)=0. \tag{33}$$

(iii) $y=-y_j(x)$ の近傍において，$\varphi_+-\varphi_-$ は

$$\varphi_+(x,y)-\varphi_-(x,y)=(y+y_j(x))^{-1/2}\,\chi(x,y) \tag{34}$$

と表される．ここで $\chi(x,y)$ は $y=-y_j(x)$ において正則である．

Proof. (i) は

$$\frac{dy_j(x)}{dx}=\frac{d}{dx}\left(x\xi_j(x)+g(\xi_j(x))\right)=\xi_j+x\frac{d\xi_j}{dx}+\frac{dg}{d\xi}(\xi_j)\frac{d\xi_j}{dx}=\xi_j(x) \tag{35}$$

より従う．また (iii) については，$\chi(x,y)$ が半整数巾を含むことを許せば，$\varphi_+-\varphi_-$ が (34) の形に書けることは Puiseux 展開により容易にわかる．さらに，$y=-y_j(x)$ の回りを一周したとき $\varphi_+-\varphi_-$ が $-(\varphi_+-\varphi_-)$ に解析接続されるので，従って (iii) が成り立つ．

(ii) を証明しよう（証明は $\varphi_\pm(x,y)$ のいずれについても同じなので，以下では添字の $\pm$ を省略する．) Cauchy の積分公式より

$$\left(C(\xi)\frac{dy}{d\xi}\right)^{-1}\Bigg|_{\xi=\xi(x,y)}=\frac{1}{2\pi i}\oint\left(C(\xi)\frac{dy}{d\xi}\right)^{-1}\Bigg|_{\xi=\xi(x,y')}\frac{dy'}{y'-y}. \tag{36}$$

ここで $y'=-(x\xi+g(\xi))$ によって y' から ξ に変数変換すれば，次式が得られる．

$$\left(C(\xi)\frac{dy}{d\xi}\right)^{-1}\Bigg|_{\xi=\xi(x,y)}=-\frac{1}{2\pi i}\oint\frac{d\xi}{C(\xi)(y+x\xi+g(\xi))}. \tag{37}$$

従って，$\mu(\xi,z)=1/(C(\xi)(z+g(\xi)))$ と定義すれば，

$$\varphi(x,y)=-\frac{1}{2\pi i}\oint\mu(\xi,y+x\xi)d\xi. \tag{38}$$

さて，今 $P=\sum_{0\le j\le m,k=0,1}a_{jk}x^k\eta^{m-j}(d/dx)^j$（但し $a_{j1}=c_j$, $a_{j0}=d_j$）と書くことにすると，直接計算により

$$\widehat{P}_{B,(\xi,z)}\mu(\xi,z)=\sum_{j,k}a_{jk}\left(\frac{\partial}{\partial z}\right)^{m-k}\left(-\frac{\partial}{\partial\xi}\right)^k\left(\xi^j\mu(\xi,z)\right)=0 \tag{39}$$

が確かめられる．一方，

$$P_B\oint\mu(\xi,y+x\xi)d\xi=\oint\sum a_{jk}x^k\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^j\left(\frac{\partial}{\partial y}\right)^{m-j}\mu(\xi,y+x\xi)d\xi \tag{40}$$

$$= \oint \sum a_{jk} x^k \xi^j \left(\frac{\partial}{\partial y}\right)^m \mu(\xi, y + x\xi) d\xi$$
$$= \oint \sum a_{jk} \left(\frac{\partial}{\partial y}\right)^{m-k} \left(\frac{\partial}{\partial \xi'}\right)^k \left(\xi^j \mu(\xi, y + x\xi')\right)\Big|_{\xi'=\xi} d\xi.$$

ここで，

$$\frac{\partial}{\partial \xi'} \left(\xi^j \mu(\xi, y + x\xi')\right)\Big|_{\xi'=\xi} = \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\xi^j \mu(\xi, y + x\xi)\right) - \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\xi^j \mu(\xi, y + x\xi')\right)\Big|_{\xi'=\xi} \tag{41}$$

を用いて部分積分を行えば，(40) はさらに次のように書き直せる．

$$P_B \oint \mu(\xi, y + x\xi) d\xi = \oint \sum a_{jk} \left(\frac{\partial}{\partial y}\right)^{m-k} \left(-\frac{\partial}{\partial \xi}\right)^k \left(\xi^j \mu(\xi, y + x\xi')\right)\Big|_{\xi'=\xi} d\xi \tag{42}$$
$$= \oint \widehat{P}_{B,(\xi,y)} \mu(\xi, y + x\xi')\Big|_{\xi'=\xi} d\xi.$$

(38), (42), (39) を組み合わせれば，

$$P_B \varphi(x, y) = 0. \tag{43}$$

よって (ii) が示された． □

この Proposition により，積分表示で与えられる解 (28)（あるいは (30)）と WKB 解の関係が次のようにして明らかになる．まず，(iii) により (30) の被積分函数 $\varphi_+ - \varphi_-$ は $y = -y_j(x)$ の近傍において (34) のように表されているので，その逆 Borel 変換（形式 Laplace 変換）は

$$\mathcal{B}^{-1}(\varphi_+ - \varphi_-) = \exp(\eta y_j(x)) \sum_{n=0}^{\infty} \chi_n(x) \eta^{-(n+1/2)} \tag{44}$$

という WKB 解と同じ形の展開をもつことがわかる．しかも，(ii) により

$$P\left(\mathcal{B}^{-1}(\varphi_+ - \varphi_-)\right) = \mathcal{B}^{-1} P_B (\varphi_+ - \varphi_-) = 0 \tag{45}$$

が成立する．従って，(i) により $y_j(x)$ が $\xi_j(x)$ の積分という形に書けている点に注意すれば，WKB 解の一意性（$S_{-1}(x) = \xi_j(x)$ が与えられれば他の $S_j(x)$ は一意に定まるという性質）より，ある定数係数の無限級数 $C(\eta) = C_0 + \eta^{-1} C_1 + \cdots$ が存在して，

$$\mathcal{B}^{-1}(\varphi_+ - \varphi_-) = C(\eta) \psi_j \tag{46}$$

が成り立つことがわかる．すなわち，(30) の被積分函数は，WKB 解 ψ_j の Borel 変換と（正規化因子を除いて）一致する．しかも，上で見たように（cf. Figure 2），(30) の積分路は Borel 和のそれと同じなので，結論として次の定理を得る．

Theorem　積分表示で与えられる解 (28) (あるいは (30)) は，$S_{-1}(x) = \xi_j(x)$ で始まる (適当に正規化された) WKB 解 ψ_j の Borel 和である．

つまり，Laplace 型方程式の場合，前節で述べたような方法で帰納的に構成される WKB 解は，実は積分表示式の各鞍点において鞍点法を適用することにより得られる漸近級数 (解) に他ならない．そして，WKB 解に Borel 和として意味をつけることは，その鞍点を通る最急降下路に沿った積分として与えられる解を考えることと同等なのである．

4　さらなる理論展開について

前節の議論から，完全 WKB 解析というのは，積分表示に対する最急降下法を一般の方程式に拡張した理論と考えることができる．この「入門」を終えるにあたり，完全 WKB 解析のこれ以降の理論展開について，最近の進展も交えていくつかの注意を述べておこう．

4.1　完全最急降下法

上で述べたように，完全 WKB 解析は積分表示に対する最急降下法の一般化と考えられ，Laplace 型方程式以外の方程式に対しても有効である．他方，完全 WKB 解析を用いることにより，積分表示に対する最急降下法を一般化することも可能である．実際，微分方程式 (8) を Laplace 変換 (cf. (22)) して得られる方程式に完全 WKB 解析を応用することにより，そうした一般化 (「完全最急降下法」と呼ばれる) を得ることができる．この「完全最急降下法」については，文献 [3], [4] を参照されたい．

4.2　Stokes 現象と Stokes 曲線

Airy 函数の Stokes 現象の導出において鍵となったのは，$\arg x = 2\pi/3$ において 2 つの鞍点が最急降下路によって結ばれ，その結果として生じた最急降下路の形状の変化であった．一般の Laplace 型方程式に対しても，こうした「ある最急降下路が 2 つの鞍点を結ぶ」という現象が，解の大域的な挙動の解析において重要な役割を演じる．完全 WKB 解析の言葉で言えば，これは「Borel 和を定義する積分路の上に WKB 解の Borel 変換の特異点が存在する」という状況に対応しており (変数変換 (29) により，最急降下路が Borel 和の積分路に，鞍点が Borel 変換の特異点に対応することに注意)，この状況が生じる点では WKB 解の Borel 和に関する「Stokes 現象」が観察される．

こうした WKB 解の Borel 和の Stokes 現象がどこで起こるかを決定するのは，完全 WKB 解析における一つの中心的な問題である．方程式が 2 階の場合は，それが変わり点から出る Stokes 曲線上でのみ起こることが知られている (cf. [10], [6], [8]) ．ここで，変わり点とは，特性方程式 (14) の判別式の零点 (すなわち，その根が重根となるような点) のことであり，また Stokes 曲線とは，そうした変わり点 a を起点にもつ

$$\mathrm{Im} \int_a^x (\xi_j(x) - \xi_{j'}(x))\, dx = 0 \tag{47}$$

(但し $\xi_j(x), \xi_{j'}(x)$ は $\xi_j(a) = \xi_{j'}(a)$ を満たすような特性方程式の 2 根) という式で定義される x-平面内の (実 1 次元) 曲線である．これに対して高階方程式の場合は，Stokes 曲線以外の場所でも WKB 解の Borel 和に関する Stokes 現象が起こり得る (cf. [5], [2])．

完全 WKB 解析と積分表示の対応関係を考慮すれば，「ある最急降下路が 2 つの鞍点を結ぶ」という条件が，まさに WKB 解の Borel 和の間に Stokes 現象が起こるような点の一つの特徴づけを与えている訳である (Cf. [9]. なお，完全最急降下法を用いれば，一般の方程式に対しても同様の特徴づけが得られるものと期待される .)

4.3 接続公式

完全 WKB 解析を用いて解の大域的な挙動を調べる際，WKB 解の Borel 和の Stokes 現象が起こる場所の決定と並んで重要なのが，この Stokes 現象を記述する「接続公式」の具体的な形を求めておくことである．

例えば，最も generic な場合として，単純変わり点 a (すなわち，a は特性方程式の判別式の 1 位の零点) を起点とする Stokes 曲線上での Stokes 現象を考えよう．このとき，WKB 解 (15) の正規化として積分端点 x_0 を変わり点 a 自身に取っておけば，問題の Stokes 曲線を横切って WKB 解の Borel 和を解析接続したとき，Borel 和は次のような変換を受ける．

$$\Psi_j \longmapsto \Psi_j \pm \sqrt{-1}\Psi_{j'}. \tag{48}$$

($\pm$ はどちら向きに Stokes 曲線を横切るかによって決まる .) 単純変わり点におけるこうした接続公式の具体形の導出については，まず Airy の方程式 (7) に関しては直接計算により，次に 2 階の方程式に関しては Airy 方程式への変換を構成することにより，それぞれなされる (cf. [8])．さらに，方程式の分解定理を併せて用いることによって，高階方程式や無限階の方程式に関しても同様の公式が成立することが確かめられる．これについては，本報告集に収められた文献 [1] を参照されたい．

References

[1] 青木貴史：無限階方程式の完全 WKB 解析, 本報告集に掲載.

[2] T. Aoki, T. Kawai and Y. Takei: New turning points in the exact WKB analysis for higher-order ordinary differential equations, Analyse algébrique des perturbations singulières. I, Hermann, 1994, pp. 69–84.

[3] 青木貴史, 河合隆裕, 竹井義次：完全最急降下法を目指して, 数理解析研究所講究録, No. 1168, 2000, pp. 1–40.

[4] T. Aoki, T. Kawai and Y. Takei: On the exact steepest descent method — a new method for the description of Stokes curves, to appear in J. Math. Phys.

[5] H.L. Berk, W.M. Nevins and K.V. Roberts: New Stokes lines in WKB theory, J. Math. Phys., **23**(1982), 988–1002.

[6] E. Delabaere and F. Pham: Resurgent methods in semi-classical asymptotics, Ann. Inst. H. Poincaré, **71**(1999), 1–94.

[7] A. Erdélyi: Asymptotic Expansions, Dover, 1956.

[8] 河合隆裕, 竹井義次：特異摂動の代数解析学 (岩波講座『現代数学の展開』) , 岩波書店, 1998.

[9] Y. Takei: Integral representation for ordinary differential equations of Laplace type and exact WKB analysis, 数理解析研究所講究録, No. 1168, 2000, pp. 80–92.

[10] A. Voros: The return of the quartic oscillator. The complex WKB method, Ann. Inst. H. Poincaré, **39**(1983), 211–338.