加群について

千葉大学大学院理学研究院 松田茂樹

目次

1　序

1.1　概要

(1.1.1). この文章はホモロジー代数を学ぶ前に, 環上の加群について知っておいて欲しいことをまとめたものである。基本的な定義はなるべく書くようにしたが, 群, 環, 体などについて, ある程度学習したことのある人を想定している。

(1.1.2). 加群においては, 商加群, 直積, 直和, 核, 余核, テンソル積, 局所化などの概念があるが, この文章ではなるべく普遍性に注目した説明をした。すなわち, 定義そのものを普遍性を用いて行ったり, 構成的な定義をする場合でも普遍性を説明するようにした。この方法は, 初めてこれらの概念に触れる場合には, イメージが湧きにくく, あまり良いやり方とは言えないかもしれないが, 一度基本的な概念を学んだ人が, 全体を整理しなおすという立場からは有効な方法であると思う。

この文章で普遍性を強調した説明をする理由の一つは, テンソル積の理解にある。テンソル積は環や加群の理論においては極めて重要であるが, これにまつわる性質を証明するには, 普遍性を用いて定義する方が簡明である。一方, テンソル積のイメージをつかむには具体的な計算ができる必要があるが, それには直和や局所化, 核, 余核などといった他の概念との関係や, 完全列についての性質を知らねばならない。が, その証明は直和などの概念についての普遍性や, 随伴関手などの圏論的な知識を知らないと煩雑なものになる。したがって, 加群の理論全体を普遍性を通して圏論的に理解しなおさないと, そのような証明が自然なものとして理解できず, 結果としてテンソル積についての具体的な計算ができなくなってしまい, 苦手意識だけが残るという結果になりがちである。それを避けるのが一つの目的である。

もう一つの理由は, 普遍性は完全列や図式と相性が良いことである。完全列や図式追跡を用いた計算は加群の理論において非常に有効であるし, そのような計算方法は, この先ホモロジー代数などにおける進んだ概念を学習していく際には不可欠でもある。こういった手法に早くから慣れておくことは大事なことと思われる。

1.2　注意

(1.2.1). この文章全体を通し, 特に断りのない限り, 環とは (可換とは限らない) 単位環, つまり積についての単位元が存在する環を表すものとする。特殊な場合を除き, 積についての単位元は 1 で表し, 加法についての単位元は 0 で表す。また環の準同型は, 1 を 1 に写すものとする。また写像 $f : X \to Y$ が単射であるとき $f : X \hookrightarrow Y$, 全射であるとき $f \twoheadrightarrow Y$ と書くことがある。

2　加群の基本概念

2.1　環上の加群

(2.1.1) 定義. A を環とする。**左 A 加群** (**left A-module**) とは, アーベル群 $(M, +)$ と, **スカラー倍**と呼ばれる演算 $A \times M \to M$; $(a, x) \mapsto ax$ の組で次を満たすもの。

(1) $a \in A$, $x, y \in M$ に対し $a(x + y) = ax + ay$.

(2) $a, b \in A$, $x \in M$ に対し $(a+b)x = ax + bx$.
(3) $a, b \in A$, $x \in M$ に対し $(ab)x = a(bx)$.
(4) $x \in M$ に対し $1x = x$.

通常は演算を省略して単に M を左 A 加群とする, などという。同様にスカラー倍を右から作用させることで**右 A 加群**も定義できる。A が可換環の場合は単に A **加群**という。

(2.1.2) 定義. A, B を環とする。M が (A, B) **双加群** (**(A, B)-bimodule**) ないしは (A, B) 加群とは次が成立すること。

(1) M は左 A 加群かつ右 B 加群。
(2) $a \in A$, $b \in B$, $x \in M$ に対し, $(ax)b = a(xb)$.

(2.1.3). B が環 A 上の環, つまり $f : A \to B$ なる環準同型があるとき, $a \in A$, $b \in B$ に対して $ab = f(a)b$, $ba = bf(a)$ と定めれば, B に左 A 加群と右 A 加群の構造が入る。これにより, B は (A, A) 双加群とみなせる。

(2.1.4). 以下, 特に断りがないときは, A が非可換なら A 加群とは左 A 加群を表すものとする。A が可換なら左 A 加群はそのまま右 A 加群とみなせるので, これらを区別する必要はない。また, 同様に特に断らない限り A-Mod で左 A 加群の圏を表す。

(2.1.5) 例. A を環とするとき, 一つの元 0 だけからなる集合 $\{0\}$ に, 加法を $0 + 0 = 0$, スカラー倍を, $a \in A$ に対し $a0 = 0$ で定義すると, $\{0\}$ は A 加群である。これを**零加群**と呼ぶ。通常, 零加群は $\{0\}$ ではなく 0 と略記することが多い。零加群はあくまで元ではなく集合なので記号の濫用であるが, 文脈から判断できるので, きちんと文章を読む習慣ができていれば誤解することはないだろう。

(2.1.6) 例. (1) A が体の時は, A 加群はベクトル空間に他ならない。したがって A 加群の概念はベクトル空間の概念の一般化とみなせる。
(2) すべてのアーベル群は自然に $\mathbb{Z}$ 加群とみなせる。
(3) A 自身は左 (あるいは右) A 加群の構造を持つ。
(4) K^n を体 K 上の n 次元数ベクトル空間とする。$M_n(K)$ を K の元を成分とする n 次正方行列の全体からなる環とするとき, K^n は, 元を列ベクトルとみなした場合は左 $M_n(K)$ 加群, 行ベクトルとみなした場合は, 右 $M_n(K)$ 加群。
(5) 体 K の元を成分とする $m \times n$ 行列の全体 $M_{m,n}(K)$ は $\big(M_m(K), M_n(K)\big)$ 双加群。

(2.1.7) 定義. A 加群 M, N に対し, 加群としての準同型 $f : M \to N$ がスカラー倍を保つとき, つまり

(1) $x, y \in M$ に対し, $f(x + y) = f(x) + f(y)$,
(2) $a \in A$, $x \in M$ に対し, $f(ax) = af(x)$

が成立するとき, f を A 上の**準同型** (**homomorphism**), ないしは **A 準同型** (A-homomorphism) という。また, 単に A 加群の**射** (**morphism**) ともいう。A 加群の準同型 f が全単射であるときは, 逆写像 f^{-1} も A 加群の準同型である。このとき f は A 上の**同型** (**isomorphism**) ないしは **A 同型** (A-isomorphism) と呼ばれる。右 A 加群の場合も同様に定義する。A 上で考えていることが明らかな場合には単に準同型や同型ということもある。M から M 自身への準同型は**自己準同型** (**endomorphism**) という。更に同型であれば**自己**

同型 (**automorphism**) という。

(2.1.8) 定義. A 加群 M の加法群としての部分群 N が A のスカラー倍について閉じているとき, N は M の A **部分加群**ないしは M の部分 A 加群と呼ばれる。環 A 自身を左 A 加群とみるとき, その A 部分加群を A の**左イデアル**という。同様に右 A 部分加群を**右イデアル**という。左イデアルかつ右イデアルであるものを**両側イデアル**という。A が可換環の場合はこれらの概念は同じとみなせるので, 単に**イデアル** (**ideal**) と呼ぶ。

(2.1.9). この文章では環論についてはあまり詳しく復習しない。上ではイデアルの定義を書いたが, 後の部分では素イデアルや極大イデアルなどの性質にある程度慣れていることを前提にしている。

(2.1.10) 定義. この文章では, 環の準同型 $A \to B$ が与えられたとき, B を A 上の**環** (**ring** over A) ないしは ***A* 環** (***A*-ring**) という。また A を可換環とするとき, 環 B で A 加群の構造を持ち, 更に

$$a \in A,\ x, y \in B \text{ に対し},\ (ax)y = x(ay) = a(xy)$$

が成立するものを A **代数** (A-**algebra**) とか A 上の**多元環**と言う。(2.1.11) で述べるように, もう少し広い意味で A 代数を定義することもある。A を可換環とするとき, 環 B に A 代数としての構造を与えることは, 環準同型 $A \to B$ で, その像が B の中心, すなわち $\{x \in B \mid \forall y \in B,\ xy = yx\}$ に含まれるものを与えることと同じである。特に B も可換環の場合, 環準同型 $A \to B$ があれば B を A 代数とみなせる。B, C を A 代数とするとき, B から C への A 代数の準同型とは, 環準同型 $f : B \to C$ であってかつ A 加群としての準同型でもあるもの, つまり,

(1) $x, y \in B$ に対し, $f(x + y) = f(x) + f(y)$.
(2) $x, y \in B$ に対し, $f(xy) = f(x)f(y)$.
(3) $a \in A$, $x \in B$ に対し, $f(ax) = af(x)$.
(4) $f(1) = 1$.

であるものを言う。特に f が同型なら f を A 代数の**同型**と呼ぶ。

(2.1.11) 補足. 目的によっては, 可換環 A 上の多元環ないしは A 代数を, 上の定義よりも弱い次のような条件を満たすものと定義する場合もある。つまり A 加群 R であって, かつ積演算 $R \times R \to R;\ (x, y) \mapsto xy$ が定義され, この積が A 双線形, つまり次が成立するものをすべて A 代数と呼ぶことがある。

(1) $x, y, z \in R$ に対し, $(x + y)z = xz + yz$.
(2) $x, y, z \in R$ に対し, $x(y + z) = xy + xz$.
(3) $a \in A$, $x, y \in R$ に対し, $(ax)y = x(ay) = a(xy)$.

たとえばリー代数は積についての結合律を満たさない。これに加えて, 積演算が結合的 (つまり $(xy)z = x(yz)$) であるなら結合的 A 代数などと呼ぶ。

(2.1.12) 定義 (商加群). A を環, M を左 A 加群, N をその部分 A 加群とするとき, $x, y \in M$ に対し $x \sim y \Leftrightarrow x - y \in N$ とすると, $\sim$ は同値関係である。この同値関係で割った商集合を M/N と書く。この場合, $x \in M$ を代表元とする M/N の同値類は $x + N = \{x + y \mid y \in N\}$ である。M/N は M から誘導される演算によって A 加群の構造を持つ。実際, 簡単のために $x + N$ を $[x]$ と書くとき, $x - x' \in N$, $y - y' \in N$ であれば $(x + y) - (x' + y') = (x - x') + (y - y') \in N$ であり, また $a \in A$ に対し $ax - ax' = a(x - x') \in N$

であることから $[x]+[y]:=[x+y]$, $a[x]:=[ax]$ と定めると, これは代表元の取り方によらず well-defined であることが簡単に確かめられる。すると結合律や分配律などは, M の演算についての同様の性質から言える。M/N をこのように A 加群とみなしたものを**商加群** (**quotient module**) ないしは**剰余加群**と呼ぶ。このとき $\varphi : M \to M/N;\ x \mapsto [x]$ という写像は A 準同型である。逆に言うと, M/N の A 加群の構造は φ が A 準同型になるように定義しているとも言える。この φ を**自然な準同型**あるいは**標準的な準同型**という。

(2.1.13) 定義 (剰余環). A を可換環, $I \subset A$ をイデアルとするとき, 商加群としての A/I に更に積構造を $[a][b]:=[ab]$ で定義することにより A/I は可換環の構造を持つ。これを**剰余環** (**residue ring**) という。特に A/I が体である場合は**剰余体** (**residue field**) という。このとき自然な準同型 $\varphi : A \to A/I$ は環の準同型で, これにより A/I を A 代数とみなせる。

(2.1.14) 例. $I \subset A$ を左イデアルとするとき, 左 A 加群 M に対し

$$IM = \left\{ \sum_{i=1}^{r} a_i x_i \;\middle|\; r \in \mathbb{N},\ a_i \in I,\ x_i \in M \right\}$$

は M の部分 A 加群になる。したがって M/IM なる商加群が定義される。A が可換環であれば, M/IM は A/I 加群になる。実際, $a \in A$, $x \in M$ に対し $(a+I)(x+IM) = ax + IM$ と定めると, $a - a' \in I$, $x - x' \in IM$ のとき $ax - a'x' = (a-a')x + a'(x-x') \in IM$ であることからスカラー倍の演算が well-defined に定まる。

2.2 普遍性

(2.2.1). 現代の代数学においては, 特に一般論を構築する場合には

構成よりも機能が大切

であるという哲学がある。加群の理論においては, 商加群, 局所化, テンソル積, 順極限, 逆極限, 直和, 直積などの概念が出てくるが, これらの間の関係を見ていく際には, これらの対象がどう「構成」されるかということよりも, これらがどのような「機能」を持つかが大切になる。より正確には後で説明する「普遍性」による特徴付けが重要になってくる。特にテンソル積や極限が関わる議論を普遍性なしで行うことは, 少なくとも非効率的である。

(2.2.2). もう少し具体的に説明しよう。例えば A 加群 M の部分 A 加群 N に対する商加群 M/N は, M に $x \sim y \Leftrightarrow x - y \in N$ なる同値関係を入れたときの剰余類の集合に A 加群の構造を入れたものとして構成される。しかし, 一般論を展開する上では

(1) $\varphi : M \to M/N$ という全射準同型の存在。
(2) $x - y \in N \iff \varphi(x) = \varphi(y)$.

という性質がより重要である。そしてこの性質から $j : N \to M$ を包含写像として

(a) $\varphi \circ j = 0$.
(b) $\psi : M \to P$ なる A 加群の射で, $\psi \circ j = 0$ なるものに対し, $f : M/N \to P$ で $\psi = f \circ \varphi$ なるものが一意的に存在する。

という命題が成立することがわかる。実際 (a) は明らか。また (b) のような ψ が与えられたとき, M/N の元は $\varphi(x)$ と書けるので, f を $f(\varphi(x)) = \psi(x)$ で定めると, $\varphi(x) = \varphi(y)$ なら $x - y \in N$ より $\psi(x) = \psi(y)$ だから f は well-defined であり, ψ が A 準同型であることから f もそうであることがわかる。φ が全射であることから f の一意性も言える。この (a), (b) という性質が商加群 M/N と標準的全射 $\varphi : M \to M/N$ が持つ「機能」である。そして, 商加群に関わる様々な命題は, この「機能」に注目した方がすっきり証明できることが多い。(a), (b) のような性質は普遍性と呼ばれ, 商加群はこの普遍性によって特徴付けられる。(この「特徴付けられる」ということの意味は, 次の直積と直和に場合に詳しく説明する。) 特にテンソル積が関わる場合には, もし普遍性を使わなければ, 理論展開は恐しく複雑で分かりにくいものになってしまう。そのため, こうした「機能」に注目する方法は現代的な数学においては不可欠とも言える。またこのような見方をする際には, 商加群を単に M/N という加群ではなく, M/N なる加群と $\varphi : M \to M/N$ という準同型の組 $(M/N, \varphi)$ と見る必要があることを注意しておく。

(2.2.3) (可換図式). 上のように他の加群との関係を見るには, 対象と射を図にして考えると理解しやすいことが多い。例えば次のような図式を考えるわけである。

$$\begin{tikzcd} M_1 \arrow[r, "f"] \arrow[d, "p"'] & M_2 \arrow[d, "q"] \\ N_1 \arrow[r, "g"'] & N_2 \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} L \arrow[rr, "\varphi"] \arrow[dr, "\psi"'] & & N \\ & M \arrow[ur, "\mu"'] & \end{tikzcd}$$

このような A 加群とその間の射による図式において, 例えば左の図式においては $p \circ f = g \circ q$, 右の図式においては $\varphi = \mu \circ \psi$ が成立するなら, これらの図式は**可換**であるという。つまり射を合成することで複数の射ができるとき, それらがすべて一致する場合に図式は可換であるというわけである。上で説明した商加群についての普遍性も, 次のような図式を描くことで視覚的に理解ができる。

$$\begin{tikzcd} & & P \\ N \arrow[r, "j"] \arrow[urr, bend left, "0"] & M \arrow[r, "\varphi"] \arrow[ur, "\psi"] & M/N \arrow[u, dotted, "\exists_1 f"'] \end{tikzcd}$$

つまり, $\psi \circ j = 0$ であるとき $\psi = f \circ \varphi$ なる f が一意的に存在する, ということをより視覚的に捉えられる。

2.3 直積と直和

(2.3.1). 通常加群の直積や直和は構成的に定義される場合が多いが, ここでは敢えて普遍性を使った定義をしてみる。実際の構成は, 存在証明である (2.3.9) を見て欲しい。

(2.3.2) 定義 (直積). $(M_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ を A 加群の族とする。このとき (M_λ) の**直積** (**product**) とは加群 $\prod_{\lambda \in \Lambda} M_\lambda$ (誤解の恐れがない場合, しばしば省略して $\prod_\Lambda M_\lambda$, $\prod_\lambda M_\lambda$, $\prod M_\lambda$ などと書く) および, 各 $\lambda \in \Lambda$ に対する

準同型の族 $p_\lambda : \prod M_\lambda \to M_\lambda$ の組 $(\prod M_\lambda, p_\lambda)$ [*1]で, 次の性質を持つもののことである。

> 任意の A 加群 N と各 $\lambda \in \Lambda$ に対する A 準同型 $q_\lambda : N \to M_\lambda$ の族に対し, A 準同型 $f : N \to \prod M_\lambda$ で $f \circ p_\lambda = q_\lambda$, つまり次の図式が可換になるものが一意的に存在する。

(2.3.2.1)
$$\begin{tikzcd} M_\lambda & & N \arrow[ll, "q_\lambda"'] \arrow[dl, dotted, "\exists_1 f"] \\ & \prod M_\lambda \arrow[ul, "p_\lambda"] & \end{tikzcd}$$

この場合の p_λ は**自然な射影**や**標準的射影**などと呼ばれる。また有限個の直積は, $M \times N$ や $L \times M \times N$ などとも書く。

(2.3.3). すべての M_λ がある A 加群 M である場合の $(M_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ の直積を M^Λ と書く。特に $\Lambda = \{1, \dots, n\}$ の場合は M^n とも書く。

(2.3.4). 次に直和を定義する。直和の概念は大学の初年度で学ぶ線形代数でも出てくるが, そこで学ぶのはいわゆる内部直和 (2.3.19) だけであることも多い。実際には次に定義する (外部) 直和と呼ばれるものの方が本質的に重要である。

(2.3.5) 定義 (直和). $(M_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ を A 加群の族とする。このとき (M_λ) の**直和** (**direct sum** ないしは **sum**) とは加群 $\bigoplus_{\lambda\in\Lambda} M_\lambda$ (直積の場合と同様, 誤解が生じない場合は $\bigoplus_\Lambda M_\lambda$, $\bigoplus_\lambda M_\lambda$, などと書く) および, 各 $\lambda \in \Lambda$ に対する準同型の族 $i_\lambda : M_\lambda \to \bigoplus M_\lambda$ の組 $(\bigoplus M_\lambda, i_\lambda)$ で, 次の性質を持つもののことである。

> 任意の A 加群 N と各 $\lambda \in \Lambda$ に対する A 準同型 $j_\lambda : M_\lambda \to N$ の族に対し, A 準同型 $f : \bigoplus M_\lambda \to N$ で $f \circ i_\lambda = j_\lambda$, つまり次の図式が可換になるものが一意的に存在する。

(2.3.5.1)
$$\begin{tikzcd} M_\lambda \arrow[rr, "j_\lambda"] \arrow[dr, "i_\lambda"'] & & N \\ & \bigoplus M_\lambda \arrow[ur, dotted, "\exists 1 f"'] & \end{tikzcd}$$

この場合の i_λ は**包含写像**や**包含準同型**などと呼ばれる。有限個の直和は $M \oplus N$ や $L \oplus M \oplus N$ などとも書く。

(2.3.6). (2.3.9) で示すように, 上の意味での A 加群の直積や直和は常に存在する。その証明で, これらの加群がどう構成されるかも説明するが, その前に定義からこれらが強い意味で一意的に決まることを示そう。

(2.3.7) 命題. 直積は一意的に決まる同型を除いて一意的。つまり, もし $(\prod M_\lambda, p_\lambda)$, (M, q_λ) が共に直積の普遍性を満たすなら, 同型写像 $f : M \to \prod M_\lambda$ であって任意の λ に対して $q_\lambda = p_\lambda \circ f$ なるものが一意的に存在する。

このように, 単に $\prod M_\lambda$ が同型を除いて一意的であるだけでなく, 同型射まで一意的に決まるときは, 簡単のため**強い意味で同型を除いて一意的**ということにする。これは一般的な用語ではないので注意。

(証明). 普遍性から A 準同型 $f : M \to \prod_\lambda M_\lambda$ で下の図式の上の部分が可換になるようなものが存在する。次に, (M, q_λ) も同じ普遍性を持つことから役割を入れ換えることで, A 準同型 $g : \prod_\lambda M_\lambda \to M$ で下の

[*1] これは本来は $(\prod M_\lambda, (p_\lambda)_\lambda)$ などと書くべきであるが, 括弧が多すぎて煩雑になるので, この文書ではこのような省略した書き方をすることにする。

部分が可換になるようなものが存在する。更に, $g \circ f$ も id_M も図式を可換にするので, 同型の一意性から $g \circ f = \mathrm{id}_M$ でなければならない。

$$\begin{tikzcd} M \arrow[dr, "q_\lambda"'] & \prod_{\lambda \in \Lambda} M_\lambda \arrow[l, "g"'] \arrow[d, "p_\lambda"] & M \arrow[l, "f"'] \arrow[dl, "q_\lambda"] \\ & M_\lambda & \end{tikzcd}$$

同様の理由で $f \circ g$ も恒等写像なので, g は f の逆写像であり, したがって f が A 同型であることがわかる。 □

(2.3.8) 命題. 直和は強い意味で同型を除いて一意的。つまり, もし $(\bigoplus M_\lambda, i_\lambda)$, (M, j_λ) が共に直和の普遍性を満たすなら, 同型写像 $f : \bigoplus M_\lambda \to M$ であって $j_\lambda = f \circ i_\lambda$ なるものが一意的に存在する。

(証明). 直積の場合の双対命題である。つまり直積の場合の証明の射の向きを逆にすれば, 直和の場合の証明が得られる。

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "f"] & \bigoplus_{\lambda \in \Lambda} M_\lambda \arrow[r, "g"] & M \\ & M_\lambda \arrow[ul, "j_\lambda"] \arrow[u, "i_\lambda"] \arrow[ur, "j_\lambda"'] & \end{tikzcd}$$

□

(2.3.9) 命題. 任意の A 加群の族に対し, その直積や直和が存在する。

(証明). (直積) $(M_\lambda)_\lambda$ を A 加群の族とする。$\prod M_\lambda$ を集合論的な直積とし, 成分ごとの和やスカラー倍によって和やスカラー倍を定義すると明らかに A 加群になる。またその M_λ への射影 p_λ は A 準同型になる。このとき, (M_λ, p_λ) が普遍性を満たすことを示す。N を A 加群とし, 各 λ に対し $q_\lambda : N \to M_\lambda$ があったとする。$f : N \to \prod M_\lambda$ が $q_\lambda = p_\lambda \circ f$ を満たすなら, $f(x) = (q_\lambda(x))_\lambda$ でなければならないが, 逆にこう定めれば確かに $q_\lambda = p_\lambda \circ f$ である。よって普遍性が満たされる。
(直和) 同様に A 加群の族 $(M_\lambda)_\lambda$ に対し

$$\bigoplus_{\lambda \in \Lambda} M_\lambda = \left\{ (x_\lambda)_\lambda \in \prod_\lambda M_\lambda \;\middle|\; \text{有限個の } \lambda \text{ を除いて } x_\lambda = 0 \right\}$$

と定めると, これは $\prod M_\lambda$ の部分 A 加群である。$i_\lambda : M_\lambda \to \bigoplus M_\lambda$ を $x \in M_\lambda$ を λ 成分が x で他は 0 である元に写す準同型とする。このとき $(\bigoplus M_\lambda, i_\lambda)$ なる組が普遍性を満たすことを言えばよい。N を A 加群とし, 各 λ に対し $j_\lambda : M_\lambda \to N$ があったとする。$(x_\lambda)_\lambda \in \bigoplus M_\lambda$ に対し, $f((x_\lambda)_\lambda) = \sum x_\lambda$ とすれば, $x_\lambda \in M_\lambda$ に対して $j_\lambda(x) = f(i_\lambda(x))$ が成立する。逆にこの式が成立するような f は上のものに限るので, 普遍性の条件が満たされる。 □

(2.3.10). 構成からわかるように, 直和は直積の部分加群なので, 直和に対しても $p_\lambda : \bigoplus M_\lambda \to M_\lambda$ なる自然な射が定まる。これも自然な射影ないしは標準的射影と呼ぶ。また, 有限個の族の場合は A 加群としては直積と直和は同じものである。

(2.3.11) 例. $\mathbb{Z}$ の 2 つの直積 $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ の場合に上の証明を図を見ながら確認してみよう。

$$\begin{tikzcd} \mathbb{Z} & \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \arrow[l, "p_1"'] \arrow[r, "p_2"] & \mathbb{Z} \\ & N \arrow[ul, "q_1"] \arrow[u, dotted, "f"'] \arrow[ur, "q_2"'] & \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} q_1(x) & (q_1(x), q_2(x)) \arrow[l, mapsto, "p_1"'] \arrow[r, mapsto, "p_2"] & q_2(x) \\ & x \arrow[ul, mapsto, "q_1"] \arrow[u, mapsto, "f"'] \arrow[ur, mapsto, "q_2"'] & \end{tikzcd}$$

上の図から, $f(x) = (q_1(x), q_2(x))$ となる射に一意的に決まることがわかる。直和の場合も見てみる。

$$
\begin{tikzcd}
\mathbb{Z} \arrow[r, "i_1"] \arrow[dr, "j_2"'] & \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \arrow[d, dotted, "f"'] & \mathbb{Z} \arrow[l, "i_2"'] \arrow[dl, "j_1"] \\
& N &
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
x \arrow[r, mapsto, "i_1"] \arrow[dr, mapsto, "j_1"'] & (x,0) \arrow[d, mapsto, "f"'] \\
& j_1(x)
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
(0,y) \arrow[d, mapsto, "f"'] & y \arrow[l, mapsto, "i_2"'] \arrow[dl, mapsto, "j_2"] \\
j_2(y) &
\end{tikzcd}
$$

上の式から f は $f(x,y) = f(x,0) + f(0,y) = j_1(x) + j_2(y)$ となる射に一意的に決まる。

(2.3.12). A 加群 M の n 個の直和を $\bigoplus_{i=1}^n M$, $\bigoplus^n M$ ないしは M^n という記号で表す。最後は直積の記号と同じだが, 有限個の族の場合は加群としては, つまり標準的射影や包含写像を忘れれば直積と直和は同型なので, 問題は起きない。

(2.3.13) 定義. M を A 加群, $(u_\lambda)_\lambda$ を M の元の族とする。以下 $\sum a_\lambda u_\lambda$ は有限個の $\lambda \in \Lambda$ を除いて $a_\lambda = 0$ であるような $a_\lambda \in A$ についての $a_\lambda u_\lambda$ の和を表すとする。

(1) M の任意の元が $\sum a_\lambda u_\lambda$ の形に書けるとき, $(u_\lambda)_\lambda$ を M の**生成系** (**system of generator**) という。
(2) $\sum a_\lambda u_\lambda = 0$ なら任意の λ に対し $a_\lambda = 0$ であるとき, $(u_\lambda)_\lambda$ は **1 次独立** (**linearly independent**) であるという。
(3) M の任意の元が $\sum a_\lambda u_\lambda$ の形に一意的に書けるとき, (u_λ) は M の**自由基底** (**free basis**) ないしは**基底** (**basis**) という。

すぐに分かるように, (u_λ) が M の生成系であること, 1 次独立であること, 基底であることは, それぞれ

$$\bigoplus_{\lambda\in\Lambda} A \to M; (a_\lambda) \to \sum a_\lambda u_\lambda$$

なる準同型が全射であること, 単射であること, 同型であることと同値。特に基底であることは生成系かつ 1 次独立であることと同値。M が基底を持つとき, A 加群は**自由** (**free**) であるという。したがって M が自由 A 加群であることは, M がある Λ に対する $\bigoplus_{\lambda\in\Lambda} A$ と同型であることと同値。

(2.3.14) 補足. M の元の族 (u_λ) が 1 次独立なら, $\lambda \neq \mu$ のとき $u_\lambda \neq u_\mu$ だから, 1 次独立な族は部分集合とみなせる。そのため, わざわざ添字を付けず, 「$U \subset M$ を 1 次独立な部分集合とする」とか, 「$U \subset M$ を M の基底とする」といった言い方を用いることも多い。この書き方をするなら, 例えば上の最後の主張は U が M の基底であれば $\bigoplus_U A \to M$; $(a_u) \mapsto \sum a_u u$ なる写像が同型となる, という風に表現できる。

(2.3.15) 定義. A を環, X を勝手な集合とするとき, ***X* を基底とする自由 *A* 加群**とは, $\bigoplus_{x\in X} Ax$ のこととする。これは $\sum_{x\in X} a_x x$ ($a_x \in A$ で有限個の x を除いて $a_x = 0$) という形式和の集合ともみなせる。この場合は $x \in X$ を $1 \cdot x \in \bigoplus_{x\in X} Ax$ と同一視することで X を $M = \bigoplus_{x\in X} Ax$ の部分集合とみなす。すると (2.3.14) の意味で $X \subset M$ は M の基底となる。

(2.3.16). M を (u_λ) を基底とする自由加群とすると, M から A 加群 N への A 準同型 φ は u_λ の行き先を決めることで一意的に決まる。これは $M \simeq \bigoplus_\lambda A$ であることから明らか。

$$
\begin{tikzcd}
Au_\lambda \arrow[r, "\sim"] \arrow[d, hook] & A \arrow[r] \arrow[d, "i_\lambda"'] & N \\
M \arrow[r, "\sim"] & \bigoplus_\lambda A \arrow[ur, dotted, "\exists_1"'] &
\end{tikzcd}
$$

(2.3.17) 定義. A を環とする。A 加群 M が**有限生成** (**finitely generated**) ないしは**有限型** (**of finite type**) とは有限個の元で生成されること。これは A の有限個の直和からの全射準同型 $\bigoplus^r A \to M$ の存在と同値。

(2.3.18). $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ や $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ などは有限生成 $\mathbb{Z}$ 加群である。一方, $\mathbb{Q}$ は $\mathbb{Z}$ 加群として有限生成ではない。実際, $u_1, \ldots, u_r \in \mathbb{Q}$ を有限個の元の組とするとき, u_i の分母の最小公倍数を $y \in \mathbb{Z}$ とすると, $u_i = x_i/y$, $(x_i \in \mathbb{Z})$ とかける。すると, $u_1, \ldots, u_n$ の $\mathbb{Z}$ 係数の一次結合も x/y, $(x \in \mathbb{Z})$ と書けるので, $\bigoplus_{i=1}^r \mathbb{Z} \to \mathbb{Q};\ (a_i) \mapsto \sum a_i u_i$ は決して全射にはならない。

(2.3.19) 補足. M を A 加群, $(N_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ を M の部分 A 加群の族とするとき, (N_λ) の**和** (**sum**) を

$$\sum N_\lambda = \Big\{ \sum_\lambda x_\lambda \in M \mid x_\lambda \in N_\lambda,\ \text{有限個の } \lambda \text{ を除いて } x_\lambda = 0 \Big\}$$

と定義する。(N_λ) の和が**内部直和**であるとは $\bigoplus N_\lambda \simeq \sum N_\lambda$ であること, つまり $\sum N_\lambda$ の元が $\sum x_\lambda$, $(x_\lambda \in N_\lambda)$ の形に一意的に書けることである。

(2.3.20) 定義. A を零環でない可換環とする。M を有限生成な自由加群とすると, M は有限個の元からなる基底を持ち, 以下の命題のように, その元の個数は基底の取り方によらない。これを M の**階数** (**rank**) といい, $\operatorname{rank}_A M$ ないしは $\operatorname{rank} M$ と書く。有限生成自由加群のことを**有限階数自由加群** (**free module of finite rank**) とも呼ぶ。

(2.3.21) 命題. 零環でない可換環 A 上の有限生成自由加群 M は有限個の元からなる基底を持ち, その元の個数は基底の取り方によらず一意的。

(証明). 基本的に線形代数の場合と同様なので, 省略する。 □

(2.3.22) 補足. A が非可換環の場合は, 基底の個数が基底の取り方によって異なるということが起こり得る。ただし, A が斜体の場合や斜体に埋め込める場合は一意的に階数を定義できる。

(2.3.23) 定義 (複積). A を環, M_k $(k = 1, \ldots, n)$ を有限個の A 加群の族とする。(M_k) の**複積** (**biproduct**) とは, 加群 $\bigoplus M_k$ と $p_k : \bigoplus M_k \to M_k$ および $i_k : M_k \to \bigoplus M_k$ $(k = 1, \ldots, n)$ の組 $(\bigoplus M_k, p_k, i_k)$ で次の条件を満たすものである。

(1) $(\bigoplus M_k, p_k)$ は (M_k) の直積。
(2) $(\bigoplus M_k, i_k)$ は (M_k) の直和。
(3) $k = 1, \ldots, n$ に対し, $p_k \circ i_k = \mathrm{id}_{M_k}$.
(4) $k \neq l$ なら, $p_l \circ i_k = 0$.

$$\begin{tikzcd} M_k \arrow[r, shift left, "i_k"] & \bigoplus M_k \arrow[l, shift left, "p_k"] \end{tikzcd}$$

複積は明らかに一意的に定まる同型の違いを除いて一意的である。直積や直和の存在証明における構成からわかるように有限個の族についての A 加群の直積 $(\prod M_k, p_k)$ と直和 $(\bigoplus M_k, i_k)$ は A 加群としては同型, つまり普遍性から定まる標準的な射 $\bigoplus M_k \to \prod M_k$ は同型である。

$$\begin{tikzcd} M_k \arrow[r, "i_k"] \arrow[d, "\mathrm{id}"'] & \bigoplus M_k \arrow[d, "\wr"] \\ M_k & \prod M_k \arrow[l, "p_k"] \end{tikzcd}$$

このとき $\bigoplus M_k$ と $\prod M_k$ を同一視すれば $p_k \circ i_k = \mathrm{id}_{M_k}$ だから, 複積は常に存在する。また, このことから $\sum i_k \circ p_k = \mathrm{id}$ であることもわかる。

(2.3.24) 補足. 圏論的な補足を少ししておく。一般の圏においても, 例えば 0 対象が存在するなら (2.3.23) と同様にしてその圏の複積を定義できる。更に射の集合 $\mathrm{Hom}(X, Y)$ がアーベル群の構造を持ち, 射の合成が分配法則を満たすといった条件があれば, 定義の最後に述べた $\sum_k i_k \circ p_k = \mathrm{id}$ なる式も意味を持つ。このような条件を持つ圏は前加法圏と呼ばれる。逆に一般の圏において 0 対象と複積が存在するなら, それを用いて射の集合 $\mathrm{Hom}(X, Y)$ に加法の演算を定義することもできる。このことは, 加群の圏の一般化であるアーベル圏の理論において大切になる。

2.4 核, 余核

(2.4.1) 定義 (核, 余核). M, N を A 加群, $f : M \to N$ を A 準同型とする。

(1) f の**核** (**kernel**) を $\mathrm{Ker}\, f = \{x \in M \mid f(x) = 0\}$ と包含写像 $i : \mathrm{Ker}\, f \to M$ の組 $(\mathrm{Ker}\, f, i)$ と定める。$\mathrm{Ker}\, f$ は M の部分 A 加群である。

(2) f の**像** (**image**) を $\mathrm{Im}\, f = f(M) = \{y \in N \mid \exists x \text{ s.t. } y = f(x)\}$ と定める。$\mathrm{Im}\, f$ は N の部分 A 加群である。

(3) f の**余核** (**cokernel**) を商加群 $\mathrm{Cok}\, f = N / \mathrm{Im}\, f$ と自然な全射 $p : N \to \mathrm{Cok}\, f$ の組 $(\mathrm{Cok}\, f, p)$ と定める。

上が通常の核や余核の定義だが, これらは普遍性を用いて次のように特徴付けることができる。

(2.4.2) 命題. A 加群の射 $f : M \to N$ に対し, f の核 $(\mathrm{Ker}\, f, i)$ は次の普遍性を満たす。

(1) $f \circ i = 0$.

(2) $\forall A$ 加群 L と A 準同型 $g : L \to M$ で $f \circ g = 0$ なるものに対し, $h : L \to \mathrm{Ker}\, f$ で $g = i \circ h$ なるものが一意的に存在する。

$$\begin{tikzcd} L \arrow[d, "\exists_1 h"'] \arrow[dr, "g"] \arrow[drr, bend left, "0"] & & \\ \mathrm{Ker}\, f \arrow[r, "i"] & M \arrow[r, "f"] & N \end{tikzcd}$$

また, f の余核 $(\mathrm{Cok}\, f, p)$ は次の普遍性を満たす。

(1) $p \circ f = 0$.

(2) 任意の A 加群 L と A 準同型 $g : N \to L$ で $g \circ f = 0$ なるものに対し, $h : \mathrm{Cok}\, f \to L$ で $g = h \circ p$ なるものが一意的に存在する。

$$\begin{tikzcd} & & L \\ M \arrow[r, "f"] \arrow[urr, bend left, "0"] & N \arrow[r, "p"] \arrow[ur, "g"] & \mathrm{Cok}\, f \arrow[u, "\exists_1 h"'] \end{tikzcd}$$

逆に, 核や余核をこれらの普遍性を持つものとして, 強い意味で同型を除いて一意的 (cf. (2.3.7)) に定義することができる。

(証明). 最後の, 強い意味で同型を除いて一意的であることは, 直積や直和の場合と同様に示せる。上で定義し

た核や余核が確かに普遍性を満たすことを示そう。

まず $(\mathrm{Ker}\, f, i)$ について。$g : L \to M$ が $f \circ g = 0$ を満たすとき, $\forall x \in L$ に対し, $g(x) \in \mathrm{Ker}\, f$ より $g(x) = i(y)$ なる $y \in \mathrm{Ker}\, f$ が一意的に定まる。このとき $h(x) = y$ と定めれば, $h : L \to \mathrm{Ker}\, f$ は A 準同型で, かつ $g = i \circ h$ となることが確かめられる。逆に $g = i \circ h$ なる h はこのようなものしかないことも明らか。

次に $(\mathrm{Cok}\, f, p)$ について。$g : N \to L$ が $g \circ f = 0$ を満たすとする。p は全射なので, $\forall x \in \mathrm{Cok}\, f$ に対し, $p(z) = x$ なる $z \in N$ が存在するが, このとき $h(x) = g(z)$ と定めると, $h : \mathrm{Cok}\, f \to L$ は well-defined である。実際, $p(z) = p(z')$ なら $p(z - z') = 0$ より $f(w) = z - z'$ なる $w \in M$ が存在するが, このとき $g(z - z') = g \circ f(w) = 0$ より $g(z) = g(z')$ となる。逆に $g = h \circ p$ なる h はこのようなものしかないことも明らか。 $\square$

(2.4.3). A 加群の準同型 $f : M \to N$ に対し, f の核を $(\mathrm{Ker}\, f, \ker f)$, 余核を $(\mathrm{Cok}\, f, \mathrm{cok}\, f)$ と書くこともある。この記法を使うと, $\mathrm{cok}\, f : N \to N/\mathrm{Im}\, f$ であるから, $\mathrm{Im}\, f = \mathrm{Ker}(\mathrm{cok}\, f)$ である。f の像を $\mathrm{Im}\, f$ と $\mathrm{Im}\, f \to N$ なる包含写像の組だと思うなら, これは $(\mathrm{Ker}(\mathrm{cok}\, f), \ker(\mathrm{cok}\, f))$ と書くことができる。

上の像の定義の双対概念として, f の**余像** (**coimage**) を $(\mathrm{Cok}(\ker f), \mathrm{cok}(\ker f))$ で定義する。$\ker f : \mathrm{Ker}\, f \to M$ なので, 実際には $\mathrm{Cok}(\ker f) = M/\mathrm{Ker}\, f$ である。これを $\mathrm{Coim}\, f$ と書くことにする。すると, $\mathrm{Coim}\, f$ から $\mathrm{Im}\, f$ への自然な写像が存在する。このように定義すると, 準同型定理は次のように $\mathrm{Coim}\, f$ と $\mathrm{Im}\, f$ が同型であるという定理だとみなせる。

(2.4.4) 定理 (準同型定理). $f : M \to N$ を A 加群の準同型とするとき,

$$\mathrm{Coim}\, f = M/\mathrm{Ker}\, f \simeq \mathrm{Im}\, f.$$

(証明). $x \in M$ を代表元とする $M/\mathrm{Ker}\, f$ の類を $[x]$ と書くとき, $\overline{f} : M/\mathrm{Ker}\, f \to \mathrm{Im}\, f$ を $\overline{f}([x]) = f(x)$ と定めると, $x - y \in \mathrm{Ker}\, f$ なら $f(x) = f(y)$ なので $\overline{f}$ は well-defined. $\overline{f}([x] - [y]) = \overline{f}([x - y]) = 0$ なら $f(x - y) = 0$ より $x - y \in \mathrm{Ker}\, f$ なので単射でもある。定義から全射だから同型。 $\square$

(2.4.5) 命題. $f : M \to N$ を A 加群の準同型とする。このとき, もし全射準同型 $g : M \to L$ と単射準同型 $h : L \to N$ で $f = h \circ g$ なるものが存在すれば, $L \simeq \mathrm{Coim}\, f$. したがって $L \simeq \mathrm{Im}\, f$ でもある。

$$\begin{tikzcd}
M \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "g"'] & & N \\
& L \arrow[ur, "h"'] &
\end{tikzcd}$$

(証明). h が単射なので, $\mathrm{Ker}\, f \simeq \mathrm{Ker}\, g$ である。すると, g が全射であることから, L は $\mathrm{Cok}(\ker f)$ と同型。つまり $\mathrm{Coim}\, f$ と同型。最後の主張は準同型定理から。 $\square$

2.5 準同型加群 $\mathrm{Hom}_A(M, N)$

(2.5.1) 定義. M, N を左 A 加群とし, M から N への A 準同型全体を $\mathrm{Hom}_A(M, N)$ と書く。$f, g \in \mathrm{Hom}_A(M, N)$ に対し, $f + g$ を $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$ と定めると $\mathrm{Hom}_A(M, N)$ はアーベル群の構造を持つ。これを**準同型加群**と呼ぶ。また M の自己 A 準同型の全体は $\mathrm{End}_A(M)$ と書く。M, N が右 A 加群の場合も同様に $\mathrm{Hom}_A(M, N)$ を定義する (誤解が生じる場合は, 本来は $\mathrm{Hom}_{\text{left-}A}(M, N)$, $\mathrm{Hom}_{\text{right-}A}(M, N)$ のように記号的に区別すべきだが, この文章では文脈で判断できるので, 同じ記号を使う)。A が可換環の場合は,

$a \in A$, $f \in \mathrm{Hom}_A(M,N)$ に対し af を $(af)(x) = a(f(x))$ と定めると, $b \in A$ に対し

$$af(bx) = abf(x) = baf(x) = b(af)(x)$$

となることから af もまた A 準同型である。これにより $\mathrm{Hom}_A(M,N)$ は A 加群の構造を持つ。

(2.5.2) 例. 例えば上で $M = A$ である場合, $f \in \mathrm{Hom}_A(A,N)$ は 1 の行き先を決めれば, 線形性から $f(a) = af(1)$ により一意的に射が決まる。したがって,

$$\mathrm{Hom}_A(A,N) \simeq N;\ f \mapsto f(1)$$

なる写像は加群の同型写像である。特に A が可換環なら, A 加群の同型写像。

2.6 テンソル積 $M \otimes_A N$

(2.6.1). テンソル積は非常に便利な道具であり, これを使いこなすことができれば, 様々な構成が見通し良く出来るようになる。また準同型加群とある意味補完的な役割を果たし, 理論的にも極めて重要なものである。一方で, テンソル積に苦手意識を持つ人もいる。それは, テンソル積は直積や直和とは異なり, その構成からは実体がイメージしにくいことにあるように思う。また, テンソル積の計算がある程度できるようになるためには, 他の構成, 例えば直和や直積, 核, 余核, 逆極限, 順極限, 準同型加群などとの関係を理解しなければならないが, それにはこれらの概念の普遍性による理解や完全列の扱い方, また多少の圏論の知識が必要になり, これまでの構成的な計算とは別の発想が求められる。この視点の変更に心理的な抵抗を感じてしまうと, 苦手意識が生じるようである。

しかし, 逆にこういった方法に一旦慣れてしまうと, 見通しが良く効率的な議論ができるようになり, またそれによって具体的な計算も可能になるため, 実体もイメージできるようになってくる。

(2.6.2). M を右 A 加群 N を左 A 加群, L をアーベル群とする。$M \times N$ から L への写像 $\psi : M \times N \to L$ が A **平衡** (**A-balanced**) とは, 次が成立すること。

(1) $x, x' \in M$, $y \in N$ に対し $\psi(x + x', y) = \psi(x,y) + \psi(x',y)$.
(2) $x \in M$, $y, y' \in N$ に対し $\psi(x, y + y') = \psi(x,y) + \psi(x,y')$.
(3) $a \in A$, $x \in M$, $y \in N$ に対し $\psi(xa, y) = \psi(x, ay)$.

更に, A が可換環で L も A 加群の場合, (3) の代わりに次の (3′) を満たすとき, ψ を A 双線形であるという。

(3′) $a \in A$, $x \in M$, $y \in N$ に対し $\psi(xa, y) = \psi(x, ay) = a\psi(x,y)$.

(2.6.3) 定理. M を右 A 加群, N を左 A 加群とするとき, アーベル群 $M \otimes_A N$ と A 平衡写像 $\varphi : M \times N \to M \otimes_A N$ の組で次の性質を持つものが同型を除き一意的に存在する。

> 任意のアーベル群 L と A 平衡写像 $\psi : M \times N \to L$ に対し, 加群の準同型 $f : M \otimes_A N \to L$ で $f \circ \varphi = \psi$ となる (つまり次の図式が可換になる) ものが一意的に存在する。

(2.6.3.1)
$$\begin{tikzcd} M \times N \arrow[r, "\psi"] \arrow[d, "\varphi"'] & L \\ M \otimes_A N \arrow[ur, dotted, "\exists 1 f"'] & \end{tikzcd}$$

特に A が可換環の場合は, $M \otimes_A N$ には A 加群の構造が入り, φ は A 双線形になる。この場合は, 任意の A 加群 L に対し ψ が A 双線形なら f は A 線形である。逆に $(M \otimes_A N, \varphi)$ を, 任意の A 双線形写像 ψ に対し A 線形写像 f が一意的に決まるという条件で特徴付けることができる。

(証明). 一意性は, 普遍性から直和などの場合と同様にして示すことができる。したがって存在を示せばよい。$M \times N$ を基底とする自由 $\mathbb{Z}$ 加群 (2.3.15) を $F = \bigoplus_{(x,y)\in M\times N} \mathbb{Z}(x,y)$ とする。以下, $M \times N \subset F$ とみなす。このとき $a \in A$, $x, x' \in M$, $y, y' \in N$ に対する

$$\begin{aligned}
&(x + x', y) - (x, y) - (x', y)\\
&(x, y + y') - (x, y) - (x, y')\\
&(xa, y) - (x, ay)
\end{aligned}$$

の形の元すべてで生成される F の部分 $\mathbb{Z}$ 加群を R とする。そして $M \otimes_A N = F/R$ と定める。$(x, y) \in M \times N \subset F$ を代表元とする $M \otimes_A N$ の類を $x \otimes y$ で表すとき, $\varphi : M \times N \to M \otimes_A N$ を $\varphi(x, y) = x \otimes y$ と定める。するとこれらに対して性質 (2.6.3.1) が成立することが確かめられる。実際, 定義から $(x + x') \otimes y = x \otimes y + x' \otimes y$, $x \otimes (y + y') = x \otimes y + x \otimes y'$, $xa \otimes y = x \otimes ay$ であるので φ は A 平衡写像。また $\psi : M \times N \to L$ を A 平衡写像とするとき, $g : F \to L$ なる準同型で $g(x, y) = \psi(x, y)$ なるものが一意的に存在するが (cf. (2.3.16)), このとき R の生成元は g によってすべて 0 に写されるので, g は $M \otimes_A N = F/R$ を経由する (cf. (2.2.2))。

$$\begin{tikzcd}
M \times N \arrow[rr, "\psi"] \arrow[dr, hook] \arrow[ddr, bend right, "\varphi"'] & & L \\
& \bigoplus_{M\times N} \mathbb{Z}(x,y) \arrow[ur, "g"'] \arrow[d] & \\
& M \otimes_A N \arrow[uur, bend right, "f"'] &
\end{tikzcd}$$

したがって, $\psi = f \circ \varphi$ なる f の存在が言える。構成から $f(x \otimes y) = \psi(x, y)$ である。この f は ψ に対し一意的である。実際, $\psi = f \circ \varphi$ であるためには $f(x \otimes y) = f(\varphi(x, y)) = \psi(x, y)$ でなければならないが, $x \otimes y$ ($x \in M$, $y \in N$) は $M \otimes_A N$ の生成元なので, その行き先で f が決まる。以上で $(M \otimes_A N, \varphi)$ が求む普遍性を満たすことが示された。

A を可換環とするとき, $M \otimes_A N$ に A 加群の構造が入ることを示そう。この場合 M を左 A 加群ともみなせる。$a \in A$ に対し $F \to F; (x, y) \mapsto (ax, y)$ なる写像が R を R に写すことはすぐわかる。(自由 A 加群からの A 準同型は基底の行き先で決まる (2.3.16) ことに注意。) よって $M \otimes_A N \to M \otimes_A N$; $x \otimes y \mapsto ax \otimes y$ を誘導する。したがって $a(x \otimes y) := ax \otimes y$ なる A の作用がきちんと定まる。すると, a, $b \in A$, x, $x' \in M$, y, $y' \in N$ に対し $a((x + x') \otimes y) = (ax + ax') \otimes y = ax \otimes y + ax' \otimes y$, $a(x \otimes (y + y')) = ax \otimes (y + y') = ax \otimes y + ax \otimes y'$, $a(b(x \otimes y)) = a(bx \otimes y) = abx \otimes y = ab(x \otimes y)$, $1(x \otimes y) = x \otimes y$ より, この作用について $M \otimes_A N$ は A 加群。$a(x \otimes y) = ax \otimes y = x \otimes ay$ より φ は A 双線形。$(M \otimes_A N, \varphi)$ が普遍性を満たすことを示す。L を A 加群, $\psi : M \times N \to L$ を A 双線形写像とすると, 上の証明と同様に $f : M \otimes_A N \to L$ で $f(x \otimes y) = \psi(x, y)$ なる A 双線形写像 f が一意的に定まることがわかる。このとき $f(a(x \otimes y)) = f(ax \otimes y) = \psi(ax, y) = a\psi(x, y) = af(x \otimes y)$ より f は A 加群の準同型だから普遍性を満たすことがわかる。 $\square$

(2.6.4) 定義. 上の定理で定まる $M \otimes_A N$ と φ の組を, M, N の A 上の**テンソル積** (**tensor product**) と呼ぶ。また, 上でも述べたように $(x, y) \in M \times N$ の $M \otimes_A N$ への像を $x \otimes y$ と書く。

(2.6.5). 上の構成から $M \otimes_A N$ の任意の元は

$$x_1 \otimes y_1 + \cdots + x_n \otimes y_n$$

という有限和の形に表されることがわかる。ただし, この表示は一意的ではない。

(2.6.6). $M \times N$ から $M \otimes_A N$ への射が A 平衡であることから, 次が成立している。

(1) $x, x' \in M$, $y \in N$ に対し $(x + x') \otimes y = x \otimes y + x' \otimes y$,

(2) $x \in M$, $y, y' \in N$ に対し $x \otimes (y + y') = x \otimes y + x \otimes y'$,

(3) $a \in A$, $x \in M$, $y \in N$ に対し $xa \otimes y = x \otimes ay$.

(2.6.7). 定義から, 勝手な A 加群 L に対し A 準同型 $f : M \otimes_A N \to L$ を定めることは, $x \otimes y$ の形の元の行き先のみを

$$\begin{aligned} &f((x + x') \otimes y) = f(x \otimes y) + f(x' \otimes y), \\ &f(x \otimes (y + y')) = f(x \otimes y) + f(x \otimes y'), \\ &f(xa \otimes y) = f(x \otimes ay) \end{aligned}$$

という関係が成立するように定めることと同じである。そこで, しばしば $f : M \otimes N \to L$ を $f(x \otimes y)$ を次のようになるように定める, などという言い方をすることがある。(2.6.8) および (2.6.9) 参照。

(2.6.8) 定義. M, P を右 A 加群, N, Q を左 A 加群とするとき $f : M \to P$, $g : N \to Q$ という A 準同型に対し,

$$\begin{array}{ccc} M \times N & \xrightarrow{f \times g} & P \times Q \\ \downarrow & & \downarrow \\ M \otimes_A N & \underset{f \otimes g}{\dashrightarrow} & P \otimes_A Q \end{array}$$

によってアーベル群の準同型 $f \otimes g : M \otimes_A N \to P \otimes_A Q$ が定まる。つまり, $f \otimes g$ は $(f \otimes g)(x \otimes y) = f(x) \otimes g(y)$ となるような準同型である。

(2.6.9). A が可換環の場合, A 準同型 $M \otimes_A N \to N \otimes_A M$ を $x \otimes y \mapsto y \otimes x$ となるように定めることができる。この写像は 2 つ合成すれば元にもどり恒等写像になるので, 同型写像である。よって A 加群として $M \otimes_A N \simeq N \otimes_A M$.

(2.6.10). M, N が具体的に与えられた場合でも, $M \otimes_A N$ が実際にどんな構造をしているかはよくわからないことも多い。しかし, A が体, M, N がベクトル空間の場合や, より一般に M ないしは N が自由 A 加群である場合は以下に述べるように簡単である。

(2.6.11) 命題. A を環, M を右 (resp. 左) A 加群とするとき

$$M \otimes_A A \simeq M \quad (\text{resp. } A \otimes_A M \simeq M).$$

(証明). M が右 A 加群の場合のみ示す。$\varphi : M \times A \to M$; $(x, a) \mapsto xa$ とすれば, (M, φ) がテンソル積の普遍性を満たすことを言えばよい。φ が A 平衡であることはすぐに確かめられる。また $M \times A$ から A 加群 L への A 平衡写像 $\psi : M \times A \to L$ に対し, $\psi(x, a) = \psi(xa, 1)$ より, $f : M \to L$ を $f(x) = \psi(x, 1)$ で定めれば, $f \circ \varphi = \psi$ となり, また $(x, 1)$ の像を考えれば, $f \circ \varphi = \psi$ なる f がこれしかないこともわかる。よって M と $\varphi : M \times A \to M$ は (2.6.3.1) の性質を満たすので, $M \otimes_A A \simeq A$ である。 $\square$

(2.6.12) 命題. 直和とテンソル積は可換。つまり, M_i $(i \in I)$ を右 A 加群の族, N_j $(j \in J)$ を左 A 加群の族とするとき,

$$\left(\bigoplus_{i \in I} M_i\right) \otimes_A \left(\bigoplus_{j \in J} N_j\right) \simeq \bigoplus_{(i,j) \in I \times J} (M_i \otimes_A N_j)$$

(証明). 普遍性を使うと次のように証明できる。まず, 次の図式を考えることで右辺から左辺への A 準同型 f が定まる。

$$\begin{tikzcd} \bigoplus_{i,j} (M_i \otimes_A N_j) \arrow[r, dotted, "f"] & \left(\bigoplus_i M_i\right) \otimes_A \left(\bigoplus_j N_j\right) \\ M_i \otimes N_j \arrow[u] \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

また, $\bigoplus_i M_i \times \bigoplus_j N_j \to \bigoplus_{(i,j)} (M_i \otimes N_j)$ を $(x_i, y_j) \mapsto (x_i \otimes y_j)_{(i,j)}$ で定めると, これは A 平衡なので,

$$\begin{tikzcd} \left(\bigoplus_i M_i\right) \otimes_A \left(\bigoplus_j N_j\right) \arrow[r, dotted, "g"] & \bigoplus_{i,j} (M_i \otimes_A N_j) \\ \bigoplus_i M_i \times \bigoplus_j N_j \arrow[u] \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

により, 左辺から右辺への A 準同型 g が定まる。(2.3.7) と同様に合成 $f \circ g$, $g \circ f$ が恒等写像になることも言えるので両辺は同型。 $\square$

(2.6.11) および (2.6.12) より次のことがわかる。

(2.6.13) 例. K を体, V, W を有限次 K ベクトル空間とし, $v_1, \ldots, v_m$ を V の基底, $w_1, \ldots, w_n$ を W の基底とすれば, $V \otimes_K W$ は $\{v_i \otimes w_j \mid 1 \leq i \leq m,\ 1 \leq j \leq n\}$ を基底とするベクトル空間である。従って

$$\dim_K V \otimes_K W = \dim_K V \times \dim_K W.$$

例えば, $\mathbb{R}^2 \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{R}^3 \simeq \mathbb{R}^6$.

(2.6.14) 例. K を体, V, W を K ベクトル空間, $f : V \to V$, $g : W \to W$ を線形変換とする。すると普遍性から $f \otimes g : V \otimes_K W \to V \otimes_K W$ という線形変換が定まる。$v_1, \ldots, v_n$, $w_1, \ldots, w_m$ をそれぞれ V と W の基底とすると, $v_i \otimes w_j$ $(i = 1, \ldots, n,\ j = 1, \ldots, m)$ が $V \otimes W$ の基底であり, $f(v_k) = \sum a_{ik} v_i$, $g(w_l) = \sum b_{jl} w_j$ とすると $f \otimes g(v_k \otimes w_l) = \sum_{i,j} a_{ik} b_{jl} v_i \otimes w_j$. 例えば $\dim V = \dim W = 2$ なら f, g の (v_1, v_2) および (w_1, w_2) についての表現行列を $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$ とするとき, $f \otimes g$ の $(v_1 \otimes w_1,\ v_1 \otimes w_2,\ v_2 \otimes w_1,\ v_2 \otimes w_2)$ に関する表現行列は次のような 4 次正方行列となる。

$$\begin{pmatrix} a_{11} B & a_{12} B \\ a_{21} B & a_{22} B \end{pmatrix}.$$

(2.6.15) 例. $M \simeq \bigoplus^n A$ であれば, $M \otimes_A N \simeq \bigoplus^n N$.

(2.6.16) (係数拡大). $\varphi : A \to B$ を環の準同型とする。左 A 加群 M に対し, (2.1.3) のように, B を (A, A) 双加群とみなし, $\varphi^* M = B \otimes_A M$ とする。$\varphi^* M$ は B の左 A 加群としての構造から左 B 加群とみなせる。これを M の B への**係数拡大**という。

(2.6.17) 補足. また, A 加群の射 $f: M \to N$ に対し $\varphi^*(f) = \mathrm{id} \otimes f : B \otimes_A M \to B \otimes_A N$ とすると, φ^* は左 A 加群の圏から左 B 加群の圏への関手を定める。

$$\begin{array}{ccc} A\text{-Mod} & \xrightarrow{\varphi^*} & B\text{-Mod} \\ M & \longmapsto & B \otimes_A M \end{array}$$

右 A 加群についても同様に係数拡大 $M \otimes_A B$ による関手が定義できる。右 A 加群についても同様に係数拡大 $M \otimes_A B$ が定義できる。

(2.6.18) 命題. A, B を環, L を右 A 加群, M を (A, B) 加群, N を左 B 加群とする。このとき,

$$(L \otimes_A M) \otimes_B N \simeq L \otimes_A (M \otimes_B N).$$

(証明). $z \in N$ を固定するとき $L \times M \to L \otimes_A (M \otimes_B N)$; $(x, y) \mapsto x \otimes (y \otimes z)$ は A 双線形なので, $L \otimes_A M \times N \to L \otimes_A (M \otimes_B N); (x, y, z) \mapsto x \otimes (y \otimes z)$ という射ができる。これが B 双線形であることも簡単に確かめられるので, $(L \otimes_A M) \otimes_B N \to L \otimes_A (M \otimes_B N); (x \otimes y) \otimes z \mapsto x \otimes (y \otimes z)$ という射ができる。逆の射も全く同様に定義できる。これらが互いに逆写像であることは自明である。 □

(2.6.19). 上の命題から, $L \otimes_A M \otimes_B N$ という書き方をしても混同の恐れはないことがわかる。なお, A が可換環の場合に, r 個の A 加群のテンソル積を $M_1 \otimes_A \cdots \otimes_A M_r$ と $\varphi: M_1 \times \cdots \times M_r \to M_1 \otimes_A \cdots \otimes_A M_r$ なる射の組で, 任意の「多重 A 線形」な A 加群への射 $\varphi: M_1 \times \cdots \times M_r \to N$ が φ を一意的に経由するような普遍性を持つものとして定義することもでき, それが上のように順にテンソル積を取っていったものと同型になることも示せる。証明は書かないが, 簡単に推測できるだろう。

(2.6.20) 系. A を可換環, B を可換 A 代数, M, N を A 加群とすると, $M \otimes_A B$, $N \otimes_A B$ を B 加群とみなせる。このとき

$$(M \otimes_A N) \otimes_A B \simeq (M \otimes_A B) \otimes_B (N \otimes_A B).$$

(証明). (右辺) $\simeq M \otimes_A (B \otimes_B (N \otimes_A B)) \simeq M \otimes_A N \otimes_A B$. □

2.7 環のテンソル積

(2.7.1) 定義. A を可換環, B, C を A 代数 (2.1.10) とすると, B, C は A 加群とみなすことができる。このとき, A 加群としてのテンソル積 $B \otimes_A C$ には, $(b \otimes c)(b' \otimes c') = bb' \otimes cc'$ が成り立つような積の演算が一意的に存在し, それにより $B \otimes_A C$ は A 代数となる。この構造を持った $B \otimes_A C$ を B, C の A 代数としての**テンソル積**という。B, C が可換環であれば, $B \otimes_A C$ も可換環である。

(2.7.2). 上の定義の状況で,

$$\begin{aligned} i_B &: B \to B \otimes_A C;\ b \mapsto b \otimes 1 \\ i_C &: C \to B \otimes_A C;\ c \mapsto 1 \otimes c \end{aligned}$$

という自然な A 代数の準同型が定まる。B ないしは C が可換環であれば, これらにより, $B \otimes_A C$ は B 代数ないしは C 代数となる。

(2.7.3). 環のテンソル積の例を作るため, 多項式環についての記号を導入しておく。$\varphi: A \to B$ を可換環の準同型とする。このとき A 係数の多項式 $f = f(X) = a_0 + a_1 X + \cdots + a_n X^n \in A[X]$ に対し, その係数を φ

で写すことで, $(\varphi f)(X) = \varphi(a_0) + \varphi(a_1)X + \cdots + \varphi(a_n)X^n \in B[X]$ なる B 係数の多項式が得られる。これを φ による f の像と呼ぶ。この対応は明らかに和や積を保つので, 準同型

$$A[X] \to B[X]\,;\ f \mapsto \varphi f$$

が得られる。誤解が生じないときにはしばしば φf を f と書くことがある。同様に変数の数が増えた場合でも

$$A[X_1, \ldots, X_n] \to B[X_1, \ldots, X_n]$$

が定義される。

(2.7.4) 命題. A を可換環, $A[X]$ を X を不定元とする多項式環, B を可換な A 代数とする。これは $A \to B$ なる可換環の準同型を与えることと同等 ((2.1.10) 参照)。このとき, 次の B 代数としての同型がある。

$$B \otimes_A A[X] \simeq B[X]$$

ただし, 左辺は可換環のテンソル積 (§2.7) とみなしている。

(証明). $A[X]$ は A 加群としては $\bigoplus_{n=0}^{\infty} AX^n$ と同型である。ただし, AX^n は X^n を基底とする階数 1 の自由 A 加群を表す。(2.6.12) より $B \otimes_A A[X] \simeq B \otimes_A \bigoplus_{n=0}^{\infty} AX^n \simeq \bigoplus_{n=0}^{\infty} BX^n \simeq B[X]$ だから, A 加群としては同型であることがわかる。ここで左辺の積は定義より $(b \otimes f)(b' \otimes f') = bb' \otimes ff'$ となるようなものだが, これは右辺では $(bf)(b'f') = bb'ff'$ に対応する。ただし, f の $B[X]$ における像も同じ記号で表している。両辺の積の構造はこのような積から決まるので, 積も保つことがわかる。更に, この同型は明らかに B 加群としての同型でもあるから, B 代数の同型 (2.1.10) であることがわかる。 □

(2.7.5) 系. $A \to B$ を可換環の準同型とすると, 次の同型がある。

$$B \otimes_A A[X_1, \ldots, X_n] \simeq B[X_1, \ldots, X_n].$$

(証明). (2.7.4) より帰納的に示せる。 □

(2.7.6) 系. A を可換環とすると, 次の同型がある。

$$A[X_1, \ldots, X_m] \otimes_A A[Y_1, \ldots, Y_n] \simeq A[X_1, \ldots, X_m, Y_1, \ldots, Y_n]$$

(証明). (2.7.5) で, B も多項式環の場合を考えればよい。 □

2.8 準同型加群とテンソル積 (1)

(2.8.1) 命題. A, B を環とする。また, M を左 A 加群, L を (B, A) 双加群とすると, $L \otimes_A M$ は自然な左 B 加群の構造を持つ。

(証明). 実際, $b \in B$, $z \otimes x \in L \otimes M$ に対し $b(z \otimes x) = bz \otimes x$ とすることで B の作用が定まり, 左 B 加群の構造を持つ。 □

(2.8.2). A, B を環, L を (B, A) 双加群とする。(2.8.1) より, 左 A 加群 M に対し, $F(M) = L \otimes_A M$ とおくと, $F(M)$ は左 B 加群。また $f : M \to M'$ を A 加群の射とすると, $F(f) = \mathrm{id} \otimes f : L \otimes_A M \to L \otimes_A M'$

は B 加群の射。したがって, 左 A 加群の圏 A-Mod から左 B 加群の圏 B-Mod への関手 F が定まる。

$$\begin{array}{ccc} A\text{-}\mathsf{Mod} & \xrightarrow{F} & B\text{-}\mathsf{Mod} \\ M & \longmapsto & L \otimes_A M \end{array}$$

この場合, $F(f)$ の定義は自然にわかるので, 省略して関手 F を $F(M) = L \otimes_A M$ と定めるなどということも多い。また, この関手を $L \otimes_A -$ のように表記することもある。この関手は, (2.6.16) の係数拡大の一般化ともみなせる。

(2.8.3) 命題. L を (B, A) 双加群, N を左 B 加群とするとき, $\mathrm{Hom}_B(L, N)$ は自然に左 A 加群の構造を持つ。

(証明). $a \in A$, $f : L \to N$ に対し, $(af)(z) = f(za)$ とすることで A の作用を定める。すると, a, $a' \in A$ に対し $((aa')f)(z) = f(zaa') = a'f(za) = a(a'f(z))$ となることから確かに左 A 加群になる。 □

(2.8.4). A, B を環, L を (B, A) 双加群とするとき, (2.8.1) より, 左 B 加群 N に対して $G(N) = \mathrm{Hom}_B(L, N)$ は左 A 加群になる。また左 B 加群の射 $g : N \to N'$ に対し, $G(g) : \mathrm{Hom}_B(L, N) \to \mathrm{Hom}_B(L, N'); h \mapsto g \circ h$ は A 加群の準同型である。実際, $h \in \mathrm{Hom}_B(L, N)$ に対し $(ah) \mapsto (z \mapsto g((ah)(z)))$ だが, $g((ah)(z)) = g(h(za)) = (a(g \circ h))(z)$. したがって, 左 B 加群の圏から左 A 加群の圏への関手 G が定まる。

$$\begin{array}{ccc} B\text{-}\mathsf{Mod} & \xrightarrow{G} & A\text{-}\mathsf{Mod} \\ N & \longmapsto & \mathrm{Hom}_B(L, N) \end{array}$$

この場合も, 関手 G を $G(N) = \mathrm{Hom}_B(L, N)$ と定めると言ったりする。また, $\mathrm{Hom}_B(L, -)$ とも表記する。

(2.8.5) 定理 (準同型加群とテンソル積). 記号は上の通りとする。このとき $F \dashv G$, すなわち F は G の左随伴関手, G は F の右随伴関手。

$$\begin{array}{ccc} A\text{-}\mathsf{Mod} & \underset{G}{\overset{F}{\rightleftarrows}} & B\text{-}\mathsf{Mod} \\ M & \longmapsto & L \otimes_A M \\ \mathrm{Hom}_B(L, N) & \longleftarrow & N \end{array}$$

具体的には M を左 A 加群, N を左 B 加群とするとき, 次の関手的な加群の同型がある。

$$\mathrm{Hom}_B(L \otimes_A M, N) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_A(M, \mathrm{Hom}_B(L, N)).$$

(証明). 右辺の元 $\varphi : L \otimes_A M \to N$ が与えられたとする。このとき $x \in M$ に対し $\varphi_x : L \to N$ なる写像を $y \in L$ に対し $\varphi_x(y) := \varphi(y \otimes x)$ となるよう定義すると, φ が B 線形であることから $\varphi_x(by) = \varphi(by \otimes x) = b\varphi(y \otimes x)$ なので, $\varphi_x : L \to N$ は B 線形。また $\varphi_{ax}(y) = \varphi(y \otimes ax) = \varphi(ya \otimes x) = \varphi_x(ya) = (a\varphi_x)(y)$ より $\psi : M \to \mathrm{Hom}_B(L, N)$; $x \mapsto \varphi_x$ は A 線形である。よって次の写像が定まる。この写像は明らかに $\mathbb{Z}$ 加群の準同型。

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Hom}_B(L \otimes_A M, N) & \longrightarrow & \mathrm{Hom}_A(M, \mathrm{Hom}_B(L, N)) \\ \varphi & \longmapsto & \psi : x \mapsto (\varphi_x : y \mapsto \varphi(y \otimes x)) \end{array}$$

逆に, 右辺の元 $\psi : x \mapsto \varphi_x$ が与えられたとき, ψ が A 線形であることから $\varphi_{ax}(y) = \varphi_x(ya)$ なので, $L \times M \to N; (y, x) \to \varphi_x(y)$ なる写像は A 平衡であり, したがって $\varphi : L \otimes_A M \to N$; $y \otimes x \mapsto \varphi_x(y)$ なる準同型を誘導する。更に $\mathrm{Hom}_B(L, N)$ を N によって B 加群とみなすとき, φ_x は B 線形だから $b \in B$ に対

し $\varphi(by \otimes x) = b\varphi(y \otimes x)$ より φ は B 線形でもあるから左辺の元を定める。したがって

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{Hom}_B(L \otimes_A M, N) & \longleftarrow & \mathrm{Hom}_A(M, \mathrm{Hom}_B(L, N)) \\ \varphi : y \otimes x \mapsto \varphi_x(y) & \longleftarrow\!\!\shortmid & \psi : x \mapsto (\varphi_x : y \mapsto \varphi_x(y)) \end{array}$$

が定まる。これらは互いに逆写像なので, 同型であることがわかる。 □

(2.8.6) 補足. (3.3.7) で示すように, この同型から $F(M) = L \otimes_A M$ は右完全関手, $G(N) = \mathrm{Hom}_A(L, N)$ は左完全関手であることがわかる。

(2.8.7) 系. A が B 上の環のとき, つまり $\lambda : B \to A$ なる準同型が与えられたときは, 次の加群の同型がある。

$$\mathrm{Hom}_B(M,\ N) \simeq \mathrm{Hom}_A(M,\ \mathrm{Hom}_B(A,\ N)).$$

(証明). 実際, $b \in B$, $a \in A$ に対し, $ba := \lambda(b)a$ と定めることで, A は左 B 加群の構造を持つ。また, $a, a' \in A$, $b \in B$ に対し $b(aa') = \lambda(b)aa' = (\lambda(b)a)a' = (b.a)a'$ より A は (B, A) 加群とみなせる。$L = A$ の場合を考えれば, $A \otimes_A M \simeq M$ なので, 定理より主張を得る。なお, この場合 $A \otimes_A M \simeq M$ において左辺の左 B 加群の構造は右辺の M を λ を通して自然に左 B 加群とみた構造と一致することに注意。 □

(2.8.8) 系. (2.8.7) において特に B が可換環で A が B 代数, つまり $\lambda : B \to A$ の像が A の中心に入る (これは $b, b' \in B$, $a, a' \in A$ に対して $(ba)(b'a') = bb'(aa')$ であることと同値) とすれば, 両辺は B 加群の構造を持ち, 同型は B 加群としての同型となっている。

(2.8.9) 系. (2.8.5) で B が A 上の環で $L = B$ の場合を考えれば次の関手的な加群の同型がある。

$$\mathrm{Hom}_B(B \otimes_A M,\ N) \simeq \mathrm{Hom}_A(M,\ N).$$

特に A が可換環で B が A 代数であれば, 両辺は A 加群の構造を持ち, 同型は A 加群としての同型となる。

(2.8.10). 上の同型は次のように解釈できる。$\varphi : A \to B$ を環の準同型とすると, (2.6.16) より左 A 加群 M に対し, $\varphi^* M = B \otimes_A M$ を対応させる関手 $\varphi^* : A\text{-}\mathsf{Mod} \to A\text{-}\mathsf{Mod}$ が定まる。一方, N を左 B 加群とするとき, $\varphi_* N$ を φ を通して N を A 加群とみなしたものと定義する。すると B 準同型 $g : N \to N'$ は A 準同型でもあるから, φ_* は $B\text{-}\mathsf{Mod}$ から $A\text{-}\mathsf{Mod}$ への関手を定める。(2.8.9) はこの記号を使うと

$$\mathrm{Hom}_B(\varphi^* M, N) \simeq \mathrm{Hom}_A(M, \varphi_* N)$$

と書ける。これは $\varphi^* \dashv \varphi_*$ を意味する。すなわち φ^* は φ_* の左随伴関手, φ_* は φ^* の右随伴関手。

$$\begin{array}{rcl} A\text{-}\mathsf{Mod} & \underset{\varphi_*}{\overset{\varphi^*}{\rightleftarrows}} & B\text{-}\mathsf{Mod} \\ M & \longmapsto & \varphi^* M = B \otimes_A M \\ \varphi_* N = N & \longleftarrow\!\!\shortmid & N \end{array}$$

(2.8.11) 定理 (準同型加群とテンソル積 (2)). A-Mod, B-Mod をそれぞれ右 A 加群の圏, 右 B 加群の圏とする。左加群のときと同様, L が (A, B) 加群のとき, 関手 $F : A\text{-}\mathsf{Mod} \to B\text{-}\mathsf{Mod}$ を $F(M) = M \otimes_A L$, 関手 $G : B\text{-}\mathsf{Mod} \to A\text{-}\mathsf{Mod}$ を $G(N) = \mathrm{Hom}_B(L, N)$ と定めると, $F \dashv G$.

$$\begin{array}{rcl} A\text{-}\mathsf{Mod} & \underset{G}{\overset{F}{\rightleftarrows}} & B\text{-}\mathsf{Mod} \\ M & \longmapsto & L \otimes_A M \\ \mathrm{Hom}_B(L, N) & \longleftarrow\!\!\shortmid & N \end{array}$$

具体的には M を右 A 加群, N を右 B 加群とするとき, 次の関手的な全単射 (実際には加群の同型) がある。

$$\mathrm{Hom}_A(M \otimes_A L, N) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_A(M, \mathrm{Hom}_A(L, N)).$$

(証明). 証明は (2.8.5) と同様。 □

(2.8.12) 系. 上の定理から, (2.8.7) や (2.8.8) が, 右 B 加群 M, N に対しても成立することがわかる。すなわち A が B 上の環, つまり $\lambda : B \to A$ なる準同型が与えられているとすると, $L = A$ の場合を考えることで次の加群の同型が得られる。

$$\mathrm{Hom}_B(M,\ N) \simeq \mathrm{Hom}_A(M,\ \mathrm{Hom}_B(A,\ N)).$$

更に, B が可換環で $\lambda : B \to A$ が A の中心に入るなら, 両辺は B 加群の構造を持ち, 同型は B 加群としての同型である。

(2.8.13) 系. また, (2.8.9) と同様に, M が右 A 加群, N が右 B 加群で, B が A 上の環である場合には次が成立する。

$$\mathrm{Hom}_B(M \otimes_A B,\ N) \simeq \mathrm{Hom}_A(M,\ N).$$

こちらも (2.8.10) と同様な解釈が可能である。またこの場合も, A が可換環で B が A 代数であれば, 両辺は A 加群の構造を持ち, 同型は A 加群としての同型。

2.9 局所化

(2.9.1). 局所化の概念は非可換環の場合にも存在するが, 簡単のためここでは可換環の場合に限定する。

(2.9.2). 局所化とは, 文字通りある点の近くの領域に制限して考えるということである。可換環論などで最初に局所化の定義を見たときには, 何故それが局所化であるのかが分かりにくいかもしれないが, 関数環の場合を考えると理解しやすい。例えば $\mathbb{C}[x]$ という多項式環に x の逆元を加えて, $\mathbb{C}[x, 1/x]$ という環を作ったとする。このとき関数の定義域は狭くなる。つまり, $\mathbb{C}[x]$ の元を関数とみたとき, その関数は $\mathbb{C}$ 全体で定義できるに対し, $\mathbb{C}[x, 1/x]$ の元, 例えば $1/x$ は $x = 0$ では定義されない。更にに $x - 1$ の逆元を加えて $\mathbb{C}[x, 1/x, 1/(x-1)]$ という環を作ると, 更に $x = 1$ という点を除くことになる。つまり逆元を加えることは, 定義域を制限するということになる。このことを踏まえて局所化の定義から見ていくことにする。

(2.9.3). A を可換環とするとき, 部分集合 $S \subset A$ が**積閉集合** (**multiplicative set**) であるとは, 次の 2 条件を満たすことである。

(1) $1 \in S$,
(2) $x, y \in S$ なら $xy \in S$.

積閉集合 S の元が可逆になるような環を定義しよう。

(2.9.4). 直積 $A \times S$ に次のような同値関係を入れる。

$$(a, s) \sim (a', s') \Leftrightarrow \exists t \in S \text{ s.t. } t(s'a - sa') = 0.$$

これは同値関係である。実際, 反射律は, $1(sa - sa) = 0$ より成立。また対称律は, $(a, s) \sim (a', s')$ なら, $t(s'a - sa') = 0$ より $t(sa' - s'a) = 0$ なので, $(a', s') \sim (a, s)$ であることから。推移律は, $(a, s) \sim$

$(a', s') \sim (a'', s'')$ のとき, $t(s'a - sa') = t'(s''a' - s'a'') = 0$ なる $t, t' \in S$ が存在するので, $ts'a = tsa'$, $t's''a' = t's'a''$ より, $(ts'a)s''t' = (tsa')s''t' = ts(t's''a') = ts(t's'a'')$ だから, $tt's'(s''a - sa'') = 0$. よって, $(a, s) \sim (a'', s'')$. なお, もし同値関係の定義で $t(s'a - sa')$ なる $t \in S$ が存在するという部分を単に $s'a = sa'$ で置き換えてしまうと, 必ずしも推移律が成立しないことに注意。さて, $A \times S$ をこの同値関係で割った集合 $A \times S/\sim$ を $S^{-1}A$ と書く。また (a, s) で代表される類を $\dfrac{a}{s}$ ないしは a/s と書くことにする。これに次のように和と積を定める。

$$\frac{a}{s} + \frac{a'}{s'} = \frac{as' + a's}{ss'}, \quad \frac{a}{s}\frac{a'}{s'} = \frac{aa'}{ss'}.$$

計算は省略するが, これらの演算は代表元の取り方によらず well-defined で, これによって $S^{-1}A$ が可換環の構造を持つことが確認できる。この可換環の単位元は $1/1$ だが, これを 1 と書く。同様に零元 $0/1$ を 0 と書く。また $\varphi : A \to S^{-1}A$ を $\varphi(a) = a/1$ によって定めると, これは準同型になる。

(2.9.5) 定義 (可換環の局所化). $(S^{-1}A, \varphi)$ を A の S による**局所化**という。$S^{-1}A$ という可換環を局所化と言うことも多い。またこの文章では $\varphi : A \to S^{-1}A$ を局所化とするという言い方もする。

(2.9.6). 上の定義は構成的な定義だが, これを普遍性を用いて捉えなおそう。

(2.9.7) 命題. A の S による局所化 $(S^{-1}A, \varphi)$ は次の普遍性を満たす。また, 局所化はこの普遍性により強い意味で同型を除いて一意的に決まる。

(1) 任意の $s \in S$ に対し, $\varphi(s)$ は $S^{-1}A$ の可逆元。
(2) $\psi : A \to B$ を可換環の準同型で任意の $s \in S$ に対し $\psi(s)$ が可逆元になるようなものとすると, 準同型 $\mu : S^{-1}A \to B$ で $\psi = \mu \circ \varphi$ となるものが一意的に存在する。

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\psi"] \arrow[d, "\varphi"'] & B \\ S^{-1}A \arrow[ur, dotted, "\mu"'] & \end{tikzcd}$$

(証明). 一意性については, 直積や直和と同様に示せる。$(S^{-1}A, \varphi)$ が普遍性を満たすことを示す。$s \in S$ とすると, $1s - s1 = 0$ より $s/1 \cdot 1/s = s/s = 1$ であるから $\varphi(s) = s/1$ は単元。また $\psi : A \to B$ が (2) の仮定の条件を満たす準同型なら $\psi(a) = \mu(a/1) = \mu((s/1)(a/s)) = \psi(s)\mu(a/s)$ より $\mu(a/s) = \psi(s)^{-1}\psi(a)$ でなければならない。逆に μ をこの式で定義しよう。このとき μ は well-defined である。実際, $a/s = a'/s'$ のとき, ある $t \in S$ が存在して $t(s'a - sa') = 0$. すると $\psi(t)(\psi(s')\psi(a) - \psi(s)\psi(a')) = 0$ だが, $\psi(t)$, $\psi(s)$, $\psi(s')$ は単元なので, これを $\psi(t)\psi(s)\psi(s')$ で割って移項すれば $\psi(s)^{-1}\psi(a) = \psi(s')^{-1}\psi(a')$ となる。μ が準同型で, 条件を満たすことは明らかなので, (2) も成立する。 □

(2.9.8). 唯一つの元 0 からなる集合 $\{0\}$ に $0 + 0 = 0$, $0 \cdot 0 = 0$ で和と積を定義した環を**零環** (**zero ring**) という。この場合, 0 が積についての単位元 1 でもある。逆に $1 = 0$ なる環は零環に限る。A を可換環とするとき, $a \in A$ が**零因子** (**zero divisor**) であるとは $0 \neq b \in A$ で $ab = 0$ なるものが存在すること。可換環 A が零環ではなく, かつ 0 以外の零因子を持たないとき, つまり $a \neq 0$, $b \neq 0$ なら $ab \neq 0$ であるとき, A を**整域** (**integral domain** ないしは単に **domain**) という。

(2.9.9). $\varphi : A \to S^{-1}A$ は必ずしも単射とは限らない。例えば S が 0 を含めば, $S^{-1}A$ は零環になる。

(2.9.10) 例. A を整域, $S = A - \{0\}$ とする。このとき, $S^{-1}A$ は体になる。これを A の**商体** (**quotient**

field ないしは **field of fractions**) という。実際, 上の注意より $a/s = 0\,(= 0/1)$ は $a1 = 0s$ と同値なので, $a/s \neq 0$ なら $a \neq 0$. よって $a \in S$ なので, $(a/s)(s/a) = 1$ から 0 でない元はすべて可逆であることが言える。例えば, $\mathbb{Z}$ の商体は $\mathbb{Q}$ であるし, 多項式環 $\mathbb{C}[X]$ の商体は有理関数体 $\mathbb{C}(X)$ である。

(2.9.11). A を可換環とするとき, そのイデアル $\mathcal{P}$ が**素イデアル** (**prime ideal**) とは, $\mathcal{P} \neq A$ であり, かつ $a \notin \mathcal{P}$ かつ $b \notin \mathcal{P}$ なら $ab \notin \mathcal{P}$ であること。素イデアルはイデアルの世界において素数に対応する概念と言える。また, A のイデアル m が**極大イデアル** (**maximal ideal**) とは, A 以外のイデアルの中で包含関係について極大であるものを言う。可換環 A のイデアル I に対し次が成立する。

(1) I が素イデアル $\Leftrightarrow$ A/I が整域。
(2) I が極大イデアル $\Leftrightarrow$ A/I が体。

このことから極大イデアルは素イデアルであることがわかる。

(2.9.12). 可換環 A の素イデアル全体を $\operatorname{Spec} A$ と書き, A の**スペクトラム** (**spectrum**) という。ここでは定義は述べないが, 実際には, これに Zariski 位相と呼ばれる位相を入れて位相空間とみなす。更に, ある自然な方法で局所環付空間の構造を付与したものをアファインスキームと呼ぶ。可換環論では, A を $\operatorname{Spec} A$ 上の関数環とみなすことで幾何的な考察が可能になる。この見方は, A が代数閉体を係数とする多項式環の場合に極大イデアルの集合に制限して考えると自然な見方であることがわかる。以下でも説明するが, 局所化とはこうした幾何的な見方において局所的に考えることに対応している。

(2.9.13). A を可換環, $\mathcal{P}$ を素イデアルとするとき, $S = A \setminus \mathcal{P}$ は積閉集合である。この場合の $S^{-1}A$ を $A_{\mathcal{P}}$ と書き, $\mathcal{P}$ における**局所環** (**local ring**) と呼ぶ。なお, 一般に極大イデアルが 1 つしかない可換環を**局所環** (**local ring**) という。上の $A_{\mathcal{P}}$ は $\mathcal{P}A_{\mathcal{P}}$ を唯一の極大イデアルとする局所環である。

(2.9.14) 例. $A = \mathbb{C}[x]$ を複素数係数の多項式環, $\mathcal{P}$ を (x) なる素イデアルとする。この場合の $A_{\mathcal{P}}$ は

$$\mathbb{C}[x]_{(x)} = \{h/g \in \mathbb{C}(x) \mid g, h \in \mathbb{C}[x],\ x \nmid g\},$$

つまり分母が x で割れない有理関数全体のなす環である。各 $f \in \mathbb{C}[x]_{(x)}$ は, $x = 0$ を含む十分小さな開集合に制限すると, その上の関数とみなせる。実際, $f = h/g$ と書かれる場合, $\mathbb{C}$ から $g(a) = 0$ となるようなすべての点 a を除いた部分を U とすると, f は U 上の関数とみなせる。したがって, $A_{\mathcal{P}}$ は $x = 0$ の近傍で定義された有理関数のなす環というわけである。

(2.9.15) 例. p を素数とするとき, $\mathbb{Z}$ の (p) での局所環は,

$$\mathbb{Z}_{(p)} = \{b/a \in \mathbb{Q} \mid a, b \in \mathbb{Z},\ p \nmid a\},$$

つまり分母が p で割り切れない有理数全体のなす環である。

(2.9.16) 補足. (2.9.14) からわかるように, 幾何的には $\mathbb{C}[X]$ の積閉集合 $S \subset \mathbb{C}[X]$ による局所化とは, ある $f \in S$ に対して $f = 0$ となる部分を除いた部分集合上で定義される関数を考えることを意味するので, 文字通り関数の定義域を局所化していることになる。(2.9.12) で少し説明したように, 一般の可換環 A についてもその素イデアルを点とみなしてできる位相空間 $\operatorname{Spec} A$ を考えると, A をこの空間の上の関数のなす環と見ることができる。つまり, $\mathbb{Z}$ のような一見関数環とみなせないような環であっても, ある位相空間の上の関数環とみなせる。すると, 素イデアル $\mathcal{P} \subset A$ での局所環 $A_{\mathcal{P}}$ はまさに $\mathcal{P}$ なる点の近傍で定義される関数のなす環と

みなせる。現代の代数幾何学はこのような空間を基礎に記述されているが, この観点は可換環論や加群の理論においても重要であるので, ここでも強調しておく。例えば (2.9.18) や (3.7.14) の (iv) の条件, (3.7.20) の証明などを参照のこと。

(2.9.17). A を可換環とする。$f \in A$ に対し, $S = \{f^n \mid n = 0, 1, 2, \ldots\} = \{1, f, f^2, \ldots\}$ は積閉集合である。この場合, $S^{-1}A$ を $A[1/f]$ や $A[\frac{1}{f}]$, あるいは A_f などと書く。

(2.9.18) 例. $A = \mathbb{C}[x]$ とし, $f_1, \ldots, f_r \in A$ とする。これらの元で生成されるイデアルが A, つまり $(f_1, \ldots, f_r) = A$ であるなら $f_1, \ldots, f_r$ は共通零点を持たない。実際, 仮定から $a_1 f_1 + \cdots + a_r f_r = 1$ なる $a_i \in \mathbb{C}[x]$ が存在するが, もし $f_1, \ldots, f_r$ が $x = a$ を共通零点に持てば, 左辺も $x = a$ で零になるはずなので, $1 = 0$ となって矛盾する。このことは, $A[1/f_1], \ldots, A[1/f_r]$ の定義域をすべて合わせると, $\mathbb{C}$ を覆うことができることを意味する。なお, (2.9.16) で述べたスキームの観点から見ると, この場合 $(f_1, \ldots, f_r) = A$ なる条件は $A[1/f_1], \ldots, A[1/f_r]$ の定義域が A の定義域の被覆になっていることを意味する。

(2.9.19). 次に A 加群 M の局所化について説明する。加群の性質は, 局所的に見ると単純になる場合が多い。そして大局的な性質の中には各点での局所的な性質を集めることでわかるものも多い。つまり, 局所的な場合に帰着できる問題が多いということである。この手法は加群の理論において非常に強力である。この点を踏まえて定義を見ていこう。

(2.9.20). A を可換環, $S \subset A$ を積閉集合, M を A 加群とする。$M \times S$ に

(2.9.20.1)
$$(m, s) \sim (m', s') \Leftrightarrow \exists t \in S \text{ s.t. } t(s'm - sm') = 0.$$

で同値関係を入れ, $M \times S$ をこの同値関係で割った集合を $S^{-1}M$ とし, (m, s) の同値類を $\dfrac{m}{s}$ ないしは m/s などと書く。$S^{-1}M$ に

$$\frac{m}{s} + \frac{m'}{s'} := \frac{s'm + sm'}{ss'}, \quad \frac{a}{s}\frac{m}{s'} := \frac{am}{ss'}$$

により和とスカラー倍を定義する。これらの演算は代表元の取り方によらず一意的に決まることがわかる。例えば積については $a/s = a'/s'$, $m/t = m'/t'$ なら, $u, v \in S$ で $u(s'a - sa') = 0$, $v(t'm - tm') = 0$ なるものが存在するが, このとき $uv(s't'am - sta'm') = us'avt'm - usa'vtm' = usa'vt'm - usa'vt'm = 0$ より $am/st = a'm'/s't'$ が言える。この演算について, $S^{-1}M$ は $S^{-1}A$ 加群であることが確かめられる。また, $\varphi : M \to S^{-1}M$ を $\varphi(m) = m/1$ と定めると, φ は A 加群の準同型である。

(2.9.21) 定義 (加群の局所化). $(S^{-1}M, \varphi)$ を M の S による局所化という。環の場合と同様, $S^{-1}M$ を局所化と呼んだり, $\varphi : M \to S^{-1}M$ を局所化と呼んだりする。

(2.9.22). 加群の局所化も, 普遍性を用いた定式化ができる。定式化の仕方はいくつかあるが, 例えば次の命題が成立する。

(2.9.23) 命題. M の S による局所化 $(S^{-1}M, \varphi)$ は, 次の普遍性を持つ。また, この普遍性により強い意味で同型を除いて一意的に決まる。

(1) $S^{-1}M$ は A 加群の構造を拡張した $S^{-1}A$ 加群の構造を持つ。
(2) $\psi : M \to N$ を M から $S^{-1}A$ 加群 N への A 準同型とすると, $S^{-1}A$ 加群の準同型 $\theta : S^{-1}M \to N$ で

$\psi = \theta \circ \varphi$ となるものが一意的に存在する。

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{\psi} & N \\ {\scriptstyle\varphi}\downarrow & \nearrow_{\theta} & \\ S^{-1}M & & \end{array}$$

(証明). 一意性についてはこれまでと同様に証明できる。$S^{-1}M$ が確かに上の条件を満たすことを言う。まず, A 加群 M が, 元の A 加群の構造を拡張した $S^{-1}A$ 加群の構造を持つことは, 任意の $s \in S$ に対して s 倍写像 $\mu_s : M \to M; m \to sm$ が全単射であることと同値であることに注意する。実際, このとき μ_s の逆写像も A 加群の準同型であることや, $\mu_{ss'} = \mu_s\mu_{s'}$ であることなどから $S^{-1}A$ の作用が一意的に決まる。$S^{-1}M$ の場合は $\lambda_s : S^{-1}M \to S^{-1}M; m/t \mapsto m/st$ が μ_s の逆写像になるので, μ_s は全単射で (1) が言える。また, N が $S^{-1}A$ 加群で $\psi : M \to N$ が A 加群の準同型とするとき, 仮に $\psi = \theta \circ \varphi$ なる $S^{-1}A$ 準同型 θ が存在したとすると, $\theta(m/s) = (1/s)\theta(m/1) = (1/s)\psi(m)$ でなければいけないが, 逆にこのように定義すると θ は $S^{-1}A$ 準同型で $\psi = \theta \circ \varphi$ が成立する。よって (2) も成立する。 □

(2.9.24) 系. A を可換環, S を積閉集合, M を A 加群とすると,

$$S^{-1}M \simeq S^{-1}A \otimes_A M$$

(証明). 実際, 上の普遍性は, テンソル積 $S^{-1}A \otimes_A M$ の普遍性と同じである。 □

(2.9.25). A を可換環, S を積閉集合とする。A 加群の射 $f : M \to N$ が与えられたとき, M, N の局所化を $(S^{-1}M, \varphi)$, $(S^{-1}N, \psi)$ とすると, $(S^{-1}M, \varphi)$ の普遍性から

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{f} & N \\ {\scriptstyle\varphi}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\psi} \\ S^{-1}M & \underset{f'}{\to} & S^{-1}N \end{array}$$

を可換にする $f' : S^{-1}M \to S^{-1}N$ が一意的に存在する。このことから次の関手が得られる。

$$\begin{aligned} (A\text{-mod}) &\longrightarrow (S^{-1}A\text{-mod}) \\ M &\longmapsto S^{-1}M \end{aligned}$$

これを局所化による関手ということにする。実際には, これはテンソル積による係数拡大の関手 (2.6.16) の特別な場合, つまり $M \mapsto S^{-1}A \otimes_A M$ なる関手とみなせる。

(2.9.26) 命題. A を可換環, S を積閉集合, M を A 加群で S の元が全単射で作用するものとする。このとき $S^{-1}M \simeq M$.

(証明). (M, id_M) は明らかに (2.9.23) の普遍性を満たす。 □

(2.9.27) 系. A を可換環, S を積閉集合, M を A 加群とすると, $S^{-1}A \otimes_A S^{-1}M \simeq S^{-1}M$.

(証明). (2.9.26) で M が $S^{-1}M$ の場合を考えれば, (2.9.24) より言える。 □

(2.9.28) 系. A を可換環, S を積閉集合, M, N を A 加群とすると, $S^{-1}M \otimes_A N \simeq S^{-1}M \otimes_{S^{-1}A} S^{-1}N$.

(証明). (2.9.27) より $S^{-1}M \otimes_A N \simeq S^{-1}M \otimes_{S^{-1}A} S^{-1}A \otimes_A N \simeq S^{-1}M \otimes_{S^{-1}A} S^{-1}N$. □

(2.9.29). $\mathcal{P}$ を A の素イデアルとするとき, $S = A - \mathcal{P}$ による A の局所化を $A_{\mathcal{P}}$ と書くのだった。これに習い $S^{-1}M$ も $M_{\mathcal{P}}$ と表記する。同様に, $f \in A$ に対し A を $S = \{f^n \mid n = 0, 1, 2, \ldots\}$ で局所化した環を $A[1/f]$, A_f などと書くのに習い, この場合の $S^{-1}M$ を $M[1/f]$, M_f などと書く。

(2.9.30) 補題. A を可換環, $f_1, \ldots, f_r \in A$ とする。$(f_1, \ldots, f_r) = A$ なら, 任意の $m_1, \ldots, m_r \in \mathbb{N}$ に対し $(f_1^{m_1}, \ldots, f_r^{m_r}) = A$.

(証明). $(f_1, \ldots, f_r) = A$ なら $\sum_{i=1}^r a_i f_i = 1$ なる a_i が存在するが, このとき任意の m に対し, $(\sum_{i=1}^r a_i f_r)^m = 1$ である。m を十分に大きく取れば, 左辺を展開してできる各項において少なくとも一つの i についての f_i の指数が m_i を越えることから $\sum b_i f_i^{m_i} = 1$ なる $b_i \in A$ が存在する。よって, $(f_1^{m_1}, \ldots, f_r^{m_r}) = A$. □

(2.9.31) 命題. A を可換環, $f_1, \ldots, f_r \in A$ を $(f_1, \ldots, f_r) = A$ なる元の組とする。$j_i : M \to M_{f_i}$ を $j_i(x) = x/1$ なる自然な射とする。このとき A 加群 M に対し, $\varphi : M \to \prod M_{f_i}\,;\, x \mapsto (j_i(x))_i$ は単射。

(証明). $x \in M$ を $\varphi(x) = 0$ なる元とすると, 任意の i に対し $f_i^{m_i} x = 0$ なる m_i が存在する。このとき (2.9.30) と仮定から $\sum a_i f_i^{m_i} = 1$ なる $a_i \in A$ が存在する。よって $x = (\sum a_i f_i^{m_i})x = \sum a_i (f_i^{m_i} x) = 0$ より $x = 0$. □

(2.9.32) 補足. (2.9.18) のような見方をするなら, この結果は局所的に 0 であれば, 全体でも 0 であるということを意味している。また, ここでは証明はしないが, 上の命題の仮定の下でより詳しく次の事実が成立する。

$$M \xrightarrow{\varphi} \prod_i M_{f_i} \overset{\varphi_0}{\underset{\varphi_1}{\rightrightarrows}} \prod_{i,j} M_{f_i f_j} \tag{2.9.32.1}$$

なる図式を考える。ただし, $g_{ij} : M_{f_i} \to M_{f_i f_j}$, $g'_{ij} : M_{f_j} \to M_{f_i f_j}$ を自然な射として φ_0 を $\varphi_1((x_i)_i) = g_{ij}(x_i)$ なる射, φ_1 を $\varphi_1((x_j)_j) = g'_{ij}(x_j)$ なる射とする。例えば $r = 2$ であれば, $g_{11} = \mathrm{id}_{M_{f_1}}$, $g_{22} = \mathrm{id}_{M_{f_2}}$, $g_{12} : M_{f_1} \to M_{f_1 f_2}$, $g_{21} : M_{f_2} \to M_{f_1 f_2}$ であり, φ_0, φ_1 はそれぞれ

$$\begin{tikzcd}
M \arrow[r, "\varphi"] & M_{f_1} \times M_{f_2} \arrow[r, shift left, "\varphi_0"] \arrow[r, shift right, "\varphi_1"'] & M_{f_1} \times M_{f_1 f_2} \times M_{f_2 f_1} \times M_{f_2} \\
x \arrow[r, mapsto] & (g_1(x), g_2(x)) & (x_1, g_{12}(x_1), g_{21}(x_2), x_2) \\
& (x_1, x_2) \arrow[ur, mapsto, bend left] \arrow[r, mapsto] & (x_1, g_{21}(x_2), g_{12}(x_1), x_2)
\end{tikzcd}$$

なる射である。このとき次が成立する。

(1) φ は単射。
(2) φ の像は $\{(x_i) \in \prod M_{f_i} \mid \varphi_1((x_i)) = \varphi_2((x_i))\}$.

つまり, φ が単射というだけでなくその像まで特徴付けることができる。例えば $r = 2$ なら, $(x_1, x_2) \in M_{f_1} \times M_{f_2}$ が M からの像に含まれるのは $g_{12}(x_1) = g_{21}(x_2)$ のとき, つまり x_1 と x_2 の $M_{f_1 f_2}$ への自然な像が一致するときとなる。一般に上の (1), (2) が成立するとき, (2.9.32.1) は完全であるという。この事実は代数幾何的には M から A のスペクトラム $\operatorname{Spec} A$ 上の層が構成できることに対応している。

(2.9.33) 系. (2.9.31) の仮定の下で任意の i に対し $M_{f_i} = 0$ であれば, $M = 0$.

(証明). (2.9.31) より明らか。 □

(2.9.34) 系. A を可換環とする。$f \in A$ に対し, $\varphi_f : M_f \to N_f$ を, 局所化で $\varphi : M \to N$ から誘導される準同型とする。$f_1, \ldots, f_r \in A$ を $(f_1, \ldots, f_r) = A$ なる元の組, φ, $\psi : M \to N$ を A 加群の準同型とするとき, 任意の i に対し $\varphi_{f_i} = \psi_{f_i}$ であれば, $\varphi = \psi$. つまり, 次は単射である。

$$\mathrm{Hom}_A(M, N) \to \prod_i \mathrm{Hom}_{A_{f_i}}(M_{f_i}, N_{f_i}).$$

(証明). $\varphi - \psi$ を考えれば, 任意の i に対し $\varphi_{f_i} = 0$ であれば $\varphi = 0$ となることを言えばよい。

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{\varphi} & N \\ \downarrow & & \downarrow \\ M_{f_i} & \xrightarrow{\varphi_{f_i}} & N_{f_i} \end{array}$$

なる可換図式を考えれば, $x \in M$ とするとき, $\varphi(x)$ の M_{f_i} における像は $\varphi_{f_i}(x/1)$ と一致するので 0 である。よって (2.9.31) より $\varphi(x) = 0$ となるから $\varphi = 0$. □

(2.9.35) 命題. A を可換環, M を A 加群とする。A の素イデアルの集合を $\mathrm{Spec}\, A$, 極大イデアルの集合を $\mathrm{Spm}\, A$ と書く。また, $\mathcal{P} \in \mathrm{Spec}\, A$ に対し, $j_{\mathcal{P}}$ を自然な射 $M \to M_{\mathcal{P}}$ とする。このとき次の射は単射。

$$\varphi : M \to \prod_{m \in \mathrm{Spm}\, A} M_m \,;\ x \mapsto (j_m(x))$$

$\mathrm{Spm}\, A \subset \mathrm{Spec}\, A$ なので, 上のことから $M \to \prod_{\mathcal{P} \in \mathrm{Spec}\, A} M_{\mathcal{P}}$ も単射である。

(証明). $x \in M$ に対し $\varphi(x) = 0$ とする。$I = \{a \in A \mid ax = 0\}$ とおくと, I は明らかにイデアルである。もし $I \neq A$ なら (Zorn の補題により) $I \subset m$ なる極大イデアルがある。$j_m(x) = 0$ より ある $s \in A - m$ で $sx = 0$ なるものが存在するが, これは $I \subset m$ に矛盾。よって $I = A$ であるから, $x = 1 \cdot x = 0$. □

(2.9.36) 系. A を可換環, M を A 加群とすると, 任意の極大イデアル m に対し $M_m = 0$ なら $M = 0$.

(2.9.37) 系. A を可換環, M, N を A 加群とすると, $\mathrm{Hom}_A(M, N) \to \prod_{m \in \mathrm{Spm}\, A} \mathrm{Hom}_{A_m}(M_m, N_m)$ は単射。

(証明). (2.9.34) と同様に考えれば, (2.9.35) より言える。 □

3 複体と完全列

3.1 定義と簡単な性質

(3.1.1). 複体や完全列は, もちろんホモロジー代数の基本的な対象として重要である。しかし, それだけではなく, 単純に計算手段と見ても極めて便利な道具である。これは, 単射, 全射, 準同型定理, 核, 余核などといった加群の理論の基本的な概念が, 完全列の概念を用いることで視覚的に表現でき, 図式を通して有機的につながることによる。この文章ではホモロジー代数に深入りはしないが, 上に述べた理由から, 基本的な定義と計算に役立つ性質, 例えば関手の完全性, 射影的加群, 入射的加群, 平坦性などについて説明する。

(3.1.2). A を環とする。ここでは A 加群の圏における完全列などについて説明する。しかし, ここで説明した事柄の多くは一般に「アーベル圏」と呼ばれる圏においても成立することを前もって注意しておく。

(3.1.3) 定義. A 加群の列

$$M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M''$$

が完全であるとは, $\operatorname{Ker} g = \operatorname{Im} f$ であることをいう。より一般に, A 加群の列

$$\cdots \longrightarrow M^{n-1} \xrightarrow{f^{n-1}} M^n \xrightarrow{f^n} M^{n+1} \xrightarrow{f^{n+1}} \cdots$$

が完全であるとは, 任意の n について

$$M^{n-1} \xrightarrow{f^{n-1}} M^n \xrightarrow{f^n} M^{n+1}$$

が完全であることをいう。特に,“

$$0 \longrightarrow M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M'' \longrightarrow 0$$

という完全列は**短完全列** (**short exact sequence**) と呼ぶ。なお, 両端の 0 は, (2.1.5) で書いたように零加群を表す。0 という元を表すわけではないので注意。

(3.1.4) 補題. (1) $0 \to L \xrightarrow{f} M$ が完全 $\Longleftrightarrow f$: 単射.

(2) $M \xrightarrow{g} N \to 0$ が完全 $\Longleftrightarrow g$: 全射.

(3) $0 \to M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M''$ が完全 $\Longleftrightarrow (M', f)$ が $\operatorname{Ker} g$, つまり g の核の普遍性を満たす。

(4) $M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M'' \to 0$ が完全 $\Longleftrightarrow (M'', g)$ が $\operatorname{Cok} f$, つまり f の余核の普遍性を満たす。

(証明). 証明はどれも簡単なので省略。 □

(3.1.5). 上の補題の事実から, $M \to N$ が単射であることを, $0 \to M \to N$ と書くことで表したり, 全射であることを $M \to N \to 0$ と書くことで表す場合がある。

(3.1.6) 定義. A 加群の列 $(M^n, \mathrm{d}^n)_{n\in\mathbb{Z}}$

$$\cdots \longrightarrow M^{n-1} \xrightarrow{\mathrm{d}^{n-1}} M^n \xrightarrow{\mathrm{d}^n} M^{n+1} \xrightarrow{\mathrm{d}^{n+1}} \cdots$$

が**複体** (**complex**) とは任意の $n \in \mathbb{Z}$ について $\mathrm{d}^n\mathrm{d}^{n-1} = 0$ を満たすこと。つまり $\operatorname{Im} \mathrm{d}^{n-1} \subset \operatorname{Ker} \mathrm{d}^n$ であること。上の複体を $M^\bullet = (M^n, \mathrm{d}^n)_n$ と略記することも多い。

また, **複体の射** $f: M^\bullet \to N^\bullet$ とは射の列 $f = (f^n)$, $f^n: M^n \to N^n$ で任意の $n \in \mathbb{Z}$ に対し $f^{n+1}\mathrm{d}^n = \mathrm{d}^n f^n$ であるもの。

$$\begin{array}{ccccccccc}
\cdots \longrightarrow & M^{n-1} & \xrightarrow{\mathrm{d}^{n-1}} & M^n & \xrightarrow{\mathrm{d}^n} & M^{n+1} & \xrightarrow{\mathrm{d}^{n+1}} & \cdots \\
& \big\downarrow{\scriptstyle f^{n-1}} & & \big\downarrow{\scriptstyle f^n} & & \big\downarrow{\scriptstyle f^{n+1}} & & \\
\cdots \longrightarrow & N^{n-1} & \xrightarrow{\mathrm{d}^{n-1}} & N^n & \xrightarrow{\mathrm{d}^n} & N^{n+1} & \xrightarrow{\mathrm{d}^{n+1}} & \cdots
\end{array}$$

このとき d は**微分** (**differential**) とか**境界作用素** (**boundary operator**) と呼ばれる。

(3.1.7) 定義. A 加群の複体 $M^\bullet = (M^n, \mathrm{d}^n)$

$$\cdots \longrightarrow M^{n-1} \xrightarrow{\mathrm{d}^{n-1}} M^n \xrightarrow{\mathrm{d}^n} M^{n+1} \xrightarrow{\mathrm{d}^{n+1}} \cdots$$

に対し, $\mathrm{H}^n(M^\bullet) = \operatorname{Ker} \mathrm{d}^n / \operatorname{Im} \mathrm{d}^{n-1}$ をこの複体の n 次**コホモロジー群** (**cohomology group**) と呼ぶ。

(3.1.8). 定義から, A 加群の複体 $M^\bullet = (M^n, \mathrm{d}^n)$ が完全であることと各 n に対するコホモロジー群が消える, つまり $\mathrm{H}^n(M^\bullet) = 0$ であることは同値である。

(3.1.9). コホモロジーについてもう少し詳しく見てみよう。A 加群の列 $M^\bullet = M' \xrightarrow{\varphi} M \xrightarrow{\psi} M''$ が複体, つまり $\operatorname{Im}\varphi \subset \operatorname{Ker}\psi$ であるとする。中央のコホモロジーを $\mathrm{H}(M^\bullet) = \operatorname{Ker}\psi / \operatorname{Im}\varphi$ と置くと次のような図式ができる。

$$\begin{tikzcd}
M'' \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "p"'] & M \arrow[r, "\psi"] & M' & \\
\operatorname{Im}\varphi \arrow[r] & \operatorname{Ker}\psi \arrow[r] \arrow[u, "i"'] & \mathrm{H}(M^\bullet) \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

そして, $\mathrm{H}(M^\bullet)$ は $\operatorname{Cok}(\operatorname{Im}\varphi \to \operatorname{Ker}\psi)$ と同一視できる。(2.4.3) より, $\operatorname{Im}\varphi = \operatorname{Ker}(\operatorname{cok}\varphi)$ だったから, コホモロジーは核と余核を用いて構成できることがわかる。

(3.1.10). A 加群の完全列

$$\cdots \xrightarrow{f^{i-2}} M^{i-1} \xrightarrow{f^{i-1}} M^i \xrightarrow{f^i} M^{i+1} \xrightarrow{f^{i+1}} \cdots \tag{3.1.10.1}$$

があれば, $N^i = \operatorname{Im} f^i$ とおくことで $0 \to N^i \to M^i \to N^{i+1} \to 0$ という短完全列ができ, 次が可換になる。

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
 & & & 0 \arrow[dr] & & 0 & & 0 \arrow[dr] & & 0 & \\
 & & & & N^{i-1} \arrow[ur] \arrow[dr] & & & & N^{i+1} \arrow[ur] \arrow[dr] & & \\
\cdots \arrow[rr, "f^{i-2}"] \arrow[dr] & & M^{i-1} \arrow[rrr, "f^{i-1}"] \arrow[urr] & & & M^i \arrow[rr, "f^i"] \arrow[dr] & & M^{i+1} \arrow[rr, "f^{i+1}"] \arrow[ur] & & \cdots & \\
 & N^{i-2} \arrow[ur] \arrow[drr] & & & & & N^i \arrow[ur] \arrow[dr] & & & & \\
0 \arrow[ur] & & & 0 & & 0 \arrow[ur] & & 0 & & &
\end{tikzcd} \tag{3.1.10.2}$$

逆に, (3.1.10.2) なる可換図式で, $0 \to N^i \to M^i \to N^{i+1} \to 0$ がどれも短完全列であるようなものがあれば, 次の補題から中央の水平な列は完全列である。こうして長完全列の問題を短完全列の問題に帰着できる。

(3.1.11) 補題. A を環とする。

(1) A 加群の列 $M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M''$ が完全であれば, $0 \to \operatorname{Im} f \to M \to \operatorname{Im} g \to 0$ は完全列。

(2) 次の可換図式において, 斜めの列がすべて完全列であるとする。

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
 & 0 \arrow[dr] & & 0 & & \\
 & & N' \arrow[ur] \arrow[dr] & & & \\
M' \arrow[rr, "f"] \arrow[urr] & & & M \arrow[rr, "g"] \arrow[dr] & & M'' \\
 & & & & N \arrow[ur] \arrow[dr] & \\
 & & & 0 \arrow[ur] & & 0
\end{tikzcd}$$

このとき $M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M''$ は完全列。

(証明). (1) $\operatorname{Im} g \to M''$ は単射なので, $\operatorname{Ker} g = \operatorname{Ker}(M \to \operatorname{Im} g)$ であり, また $M' \to \operatorname{Im} f$ が全射なので, $\operatorname{Im} f = \operatorname{Im}(\operatorname{Im} f \to M)$ である。このことから自明。

(2) (2.4.5) より, このとき $N' \simeq \operatorname{Im} f$, $N \simeq \operatorname{Im} g$ である。したがって, $\operatorname{Im} f = \operatorname{Im}(N' \to M)$, $\operatorname{Ker} g = \operatorname{Ker}(M \to N)$ である。よって $0 \to N' \to M \to N \to 0$ が完全なら $\operatorname{Im} f = \operatorname{Ker} g$ なので, $M' \to M \to M''$ も完全。 □

(3.1.12) 補題. A 加群の短完全列

(3.1.12.1) $$0 \longrightarrow M' \xrightarrow{i} M \xrightarrow{p} M'' \longrightarrow 0$$

に対し, 次は同値。

(1) $p \circ j = \mathrm{id}_{M''}$ なる $j : M'' \to M$ が存在する。 $0 \longrightarrow M' \underset{i}{\longrightarrow} M \underset{p}{\overset{j}{\leftrightarrows}} M'' \longrightarrow 0$

(2) $q \circ i = \mathrm{id}_{M'}$ なる $q : M \to M'$ が存在する。 $0 \longrightarrow M' \underset{i}{\overset{q}{\leftrightarrows}} M \underset{p}{\longrightarrow} M'' \longrightarrow 0$

このとき, (3.1.12.1) は**分裂** (**split**) するという。このとき, $M \simeq M' \oplus M''$ である。更に, $qi = \mathrm{id}_{M'}$ なる q, $pj = \mathrm{id}_{M''}$ なる j をうまく選ぶと $\mathrm{id}_M = iq + jp$ とできる。

(証明). (1) の j が存在するとする。このとき $y \in M$ に対し $p(y - jp(y)) = 0$ より $i(x) = y - jp(y)$ となる x が存在する。i は単射だから x は一意的。そこで $q : M \to M'$ を $q(y) = x$ となるように定めると, 特に $y = i(x)$ のときは, $x' = q(y) = qi(x)$ なる x' は定義より $i(x') = i(x) - jpi(x) = i(x)$ ($\because pi = 0$) を満たす x' なので, $x' = x$. よって $qi(x) = x$ だから $qi = \mathrm{id}$ なので, (2) が言える。なお定義より $y = jpy + iqy$ なので, $\mathrm{id} = iq + jp$ であることに注意。

逆に (2) が成立するとする。任意の $z \in M''$ は $z = p(y)$ とかける。このとき $j : M'' \to M$ を $j(z) = y - iq(y)$ となるように定める。これは y の取り方によらない。実際 $z = p(y')$ のとき $y - y'$ を y で置き換えて考えれば, $z = 0$, つまり $p(y) = 0$ のとき $y - iq(y) = 0$ を示せばよいが, このとき $y = i(x)$ とかけるので, $y = i(x) = iqi(x) = iq(y)$ より言える。すると $pj(z) = p(y - iq(y)) = p(y) - piq(y) = p(y) = z$ より $pj = \mathrm{id}$ もわかるので, (1) が言える。このときも定義より簡単に $\mathrm{id} = iq + jp$ であることが言える。

最後に (1) ないし (2) が成立するときは $pj = \mathrm{id}$, $qi = \mathrm{id}$, $\mathrm{id} = iq + jp$ なる射の組が見つかるので, $M \simeq M' \oplus M''$ であることもわかる。最後の主張はこのことから明らか。($M \to M' \oplus M''; y \mapsto (q(y), p(y))$, $M' \oplus M'' \to M; (x, z) \mapsto i(x) + j(z)$ は互いの逆写像になっている。) □

(3.1.13) 補題. A を環とする。A 加群について次が成立する。

(1) $p : M \to M''$ に対して $j : M'' \to M$ で $pj = \mathrm{id}_{M''}$ となるものがあれば, $M' = \mathrm{Ker}\, p$ として $M \simeq M' \oplus M''$.
$$M \underset{p}{\overset{j}{\leftrightarrows}} M'' \longrightarrow 0$$

(2) $i : M' \to M$ に対して $j : M \to M'$ で $qi = \mathrm{id}_{M'}$ となるものがあれば, $M'' = \mathrm{Cok}\, i$ として $M \simeq M' \oplus M''$.
$$0 \longrightarrow M' \underset{i}{\overset{q}{\leftrightarrows}} M$$

(証明). (1) 任意の $z \in M''$ に対し, $p(j(z)) = z$ より p は全射。よって $0 \to M' \to M \to M'' \to 0$ は完全列だから, (3.1.12) の (1) の条件が満たされる。

(2) $i(x) = i(x')$ なら $x = qi(x) = qi(x') = x'$ だから, i は単射。よって $0 \to M' \to M \to M'' \to 0$ は完全列だから, (3.1.12) の (2) の条件が満たされる。 □

(3.1.14) 補題. A 加群 M', M, M'' および $i : M' \to M$, $p : M \to M''$, $j : M'' \to M$, $q : M \to M'$ で

$pj = \mathrm{id}$, $qi = \mathrm{id}$, $iq + jp = \mathrm{id}$ なるものが与えられたとする。

$$
\begin{tikzcd}
M' \arrow[r, "i"'] & M \arrow[l, bend right, "q"'] \arrow[r, "p"'] & M \arrow[l, bend right, "j"']
\end{tikzcd}
$$

このとき次は完全列で, かつ j, q により分裂完全列となる。

(3.1.14.1) $$0 \longrightarrow M' \xrightarrow{i} M \xrightarrow{p} M'' \longrightarrow 0$$

(証明). (3.1.13) と同様, $pj = \mathrm{id}$, $qi = \mathrm{id}$ より i は単射で p は全射。$iq + jp = \mathrm{id}$ の左に p, 右に i を合成すると, $piqi + pjpi = pi$ より $pi + pi = pi$ だから $pi = 0$. また, $y \in M$ に対し $p(y) = 0$ なら $iq(y) + jp(y) = y$ より $y = iq(y) \in \operatorname{Im} i$ だから, (3.1.14.1) は完全列。よって (3.1.12) より主張が言える。 $\square$

(3.1.15) 定義. A, B を環, $F : A\text{-}\mathsf{Mod} \to B\text{-}\mathsf{Mod}$ を関手とする。F が**加法的** (**additive**) であるとは, 任意の A 加群 M, M' に対し,

$$\mathrm{Hom}_A(M, M') \to \mathrm{Hom}_B(F(M), F(M'));\ f \mapsto F(f)$$

がアーベル群の準同型であることを言う。

(3.1.16) 補足. 一般に, 射の集合 $\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(X, Y)$ がアーベル群の構造を持ち, 射の合成が双線形であるような圏を**前加法圏**と呼ぶ (2.3.24)。$\mathscr{C}$, $\mathscr{D}$ を前加法圏ととするとき, 関手 $F : \mathscr{C} \to \mathscr{D}$ が**加法的** (**additive**) であるとは, 任意の $X, Y \in \operatorname{Ob}\mathscr{C}$ に対し, $\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(X, Y) \to \mathrm{Hom}_{\mathscr{D}}(F(X), F(Y))$; $f \mapsto F(f)$ がアーベル群の準同型であることを言う。

(3.1.17) 命題. A, B を環とし, F を A-Mod から B-Mod への加法的関手とする。このとき, A 加群の分裂完全系列 $0 \to M' \xrightarrow{i} M \xrightarrow{p} M'' \to 0$ に対し, $0 \to F(M') \xrightarrow{i} F(M) \xrightarrow{p} F(M'') \to 0$ は B 加群の分裂完全系列である。

(証明). $j : M'' \to m$, $q : M \to M'$ を (3.1.12) の条件を満たすような射とする。つまり, $p \circ j = \mathrm{id}$, $q \circ i = \mathrm{id}$, $iq + jp = \mathrm{id}$ が成立しているとする。すると, F の加法性から $F(p) \circ F(j) = \mathrm{id}$, $F(q) \circ F(i) = \mathrm{id}$, $F(i)F(q) + F(j)F(p) = \mathrm{id}$ が成立する。よって (3.1.13) より主張が言える。 $\square$

(3.1.18) 命題. A 加群の複体について,

$$
\begin{aligned}
& 0 \to M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M'' \quad \text{が完全} \\
\iff \quad & \forall L,\ 0 \to \mathrm{Hom}_A(L, M') \to \mathrm{Hom}_A(L, M) \to \mathrm{Hom}_A(L, M'') \quad \text{が完全}
\end{aligned}
$$

(証明). $0 \to M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M''$ が完全であることは, (M', f) が $\operatorname{Ker} g$ であることと同値。この普遍性は, まさに下の列が任意の L について完全であることと同値。

$$
\begin{tikzcd}
 & L \arrow[d, "\exists_1 p"'] \arrow[dr, "q"] \arrow[drr, bend left, "0"] & & \\
0 \arrow[r] & M' \arrow[r, "f"] & M \arrow[r, "g"] & M''
\end{tikzcd}
$$

$$
\begin{array}{ccccccc}
0 \longrightarrow & \mathrm{Hom}_A(L, M') & \longrightarrow & \mathrm{Hom}_A(L, M) & \longrightarrow & \mathrm{Hom}_A(L, M'') \\
 & \cup & & \cup & & \cup \\
 & \exists_1 p & \longmapsto & f \circ p = q & \longmapsto & g \circ q = 0
\end{array}
$$

なお, $(\Leftarrow)$ は $L = A$ の場合を考えてもわかる。 $\square$

(3.1.19) 命題. A 加群の複体について,

$$\begin{aligned} & M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M'' \to 0 \text{ が完全} \\ \iff \quad & \forall N,\, 0 \to \mathrm{Hom}_A(M'', N) \to \mathrm{Hom}_A(M, N) \to \mathrm{Hom}_A(M', N) \text{ が完全} \end{aligned}$$

(証明). 実際, $M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M'' \to 0$ が完全であることは M'' が $\mathrm{Cok}\, f$ の普遍性を満たすことと同値であるが, これはまさに下の列が任意の N について完全であることと同値である。

$$\begin{tikzcd} & & N & \\ M' \arrow[r, "f"] \arrow[urr, bend left, "0"] & M \arrow[r, "g"] \arrow[ur, "q"] & M'' \arrow[r] \arrow[u, dotted, "\exists_1 p"'] & 0 \end{tikzcd}$$

$$\begin{array}{ccccccc} 0 \longrightarrow & \mathrm{Hom}_A(M'', N) & \longrightarrow & \mathrm{Hom}_A(M, N) & \longrightarrow & \mathrm{Hom}_A(M', N) \\ & \cup & & \cup & & \cup \\ & \exists_1 p & \longmapsto & p \circ g = q & \longmapsto & q \circ f = 0 \end{array}$$

□

3.2 図式追跡

(3.2.1). 可換図式においては, ある部分の射が単射, 全射, ないしは同型であることから, 他の部分の射が単射, 全射, ないしは同型であることがわかる場合がある。このように, 図式を考えることで単射, 全射などの性質を調べることを**図式追跡** (**diagram chase**) という。ここでは代表的な例をいくつか説明し, 特に重要な補題を示す。

(3.2.2). 例えば次の可換図式を考えよう。この図式で, 3 つ以上の項がある列は, すべて完全であるとする。この場合で言えば, これは $M_1 \to M_2$ と $M_2 \to N_2$ が単射であることを意味する。この仮定の下では, $M_1 \to N_1$ も単射であると言える。図ではこのことを点線の射を加えた列が完全であるということで表現している。実際, $M_1 \to M_2 \to N_2$ は単射の合成だから単射である。よって可換性から $M_1 \to N_1 \to N_2$ という合成射も単射だから, $M_1 \to N_1$ が単射でなければ矛盾する。

$$\begin{tikzcd} & 0 \arrow[d, dotted] & 0 \arrow[d] \\ 0 \arrow[r] & M_1 \arrow[r] \arrow[d] & M_2 \arrow[d] \\ & N_1 \arrow[r] & N_2 \end{tikzcd}$$

同様に次の図式は, $M_1 \to N_1$ および $N_1 \to N_2$ が全射なら $M_2 \to N_2$ が全射であることを表現している。実際 $M_1 \to N_1 \to N_2$ は全射の合成だから全射であるから, 可換性から $M_1 \to M_2 \to N_2$ も全射。よってもし $M_2 \to N_2$ が全射でなければ矛盾する。

$$\begin{tikzcd} M_1 \arrow[r] \arrow[d] & M_2 \arrow[d] & \\ N_1 \arrow[r] \arrow[d] & N_2 \arrow[r] \arrow[d, dotted] & 0 \\ 0 & 0 & \end{tikzcd}$$

もう少し複雑な例を挙げよう。下の図式は, 点線の射以外の射でなす列がすべて完全なら点線の射を加えてもそうであること, つまり右の縦の射が単射であることを表現している。

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d, dotted] & \\
M' \arrow[r, "f"] \arrow[d, "h'"'] & M \arrow[r, "g"] \arrow[d, "h"] & M'' \arrow[r] \arrow[d, "h''"] & 0 \\
N' \arrow[r, "p"] \arrow[d] & N \arrow[r, "q"] & N'' & \\
0 & & &
\end{tikzcd}$$

これは次のように証明できる。まず g は全射だから任意の M'' の元は $g(x)$ と書ける。$h''(g(x)) = 0$ としよう。すると可換性から $q(h(x)) = 0$. よって, $p(y') = h(x)$ なる $y' \in N'$ が存在するが, h' が全射なので $y' = h'(x')$ と書ける。すると可換性から $h(f(x')) = h(x)$ だが, h は単射なので, $x = f(x')$. すると, $g(x) = g(f(x')) = 0$ となって h'' が単射であることがわかる。

同様に次の図式は点線の射を除いた部分の各列が完全であるとの仮定の下で $M' \to N'$ が全射であることを表現している。

$$\begin{tikzcd}
 & & & 0 \arrow[d] \\
 & M' \arrow[r] \arrow[d] & M \arrow[r] \arrow[d] & M'' \arrow[d] \\
0 \arrow[r] & N' \arrow[r] \arrow[d, dotted] & N \arrow[r] \arrow[d] & N'' \\
 & 0 & 0 &
\end{tikzcd}$$

上の証明を参考に, 自分でこのことを証明してみるとよい。

(3.2.3). 下の 4 つの図式についても証明を自分で考えてみよう。

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d, dotted] & 0 \arrow[d] \\
 & M' \arrow[r] \arrow[d] & M \arrow[r] \arrow[d] & M'' \arrow[d] \\
0 \arrow[r] & N' \arrow[r] & N \arrow[r] & N''
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
M' \arrow[r] \arrow[d] & M \arrow[r] \arrow[d] & M'' \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
N' \arrow[r] \arrow[d] & N \arrow[r] \arrow[d, dotted] & N'' \arrow[d] & \\
0 & 0 & 0 &
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d, dotted] & 0 \arrow[d] & \\
M_1 \arrow[r] \arrow[d] & M_2 \arrow[r] \arrow[d] & M_3 \arrow[r] \arrow[d] & M_4 \arrow[r] \arrow[d] & M_5 \arrow[d] \\
N_1 \arrow[r] \arrow[d] & N_2 \arrow[r] & N_3 \arrow[r] & N_4 \arrow[r] & N_5 \\
0 & & & &
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
 & & & & 0 \arrow[d] \\
M_1 \arrow[r] \arrow[d] & M_2 \arrow[r] \arrow[d] & M_3 \arrow[r] \arrow[d] & M_4 \arrow[r] \arrow[d] & M_5 \arrow[d] \\
N_1 \arrow[r] & N_2 \arrow[r] \arrow[d] & N_3 \arrow[r] \arrow[d, dotted] & N_4 \arrow[r] \arrow[d] & N_5 \\
 & 0 & 0 & 0 &
\end{tikzcd}$$

(3.2.4) 命題 (five lemma). 下の図式において, 水平方向の列は完全であるとする。このとき, もし f_1 が全射, f_2, f_4 が同型, f_5 が単射であれば, f_3 は同型である。この命題はしばしば **5 項補題** (**five lemma**) と呼ばれる。

$$\begin{tikzcd}
M_1 \arrow[r] \arrow[d, "f_1"] & M_2 \arrow[r] \arrow[d, "f_2"] & M_3 \arrow[r] \arrow[d, "f_3"] & M_4 \arrow[r] \arrow[d, "f_4"] & M_5 \arrow[d, "f_5"] \\
N_1 \arrow[r] & N_2 \arrow[r] & N_3 \arrow[r] & N_4 \arrow[r] & N_5
\end{tikzcd}$$

(証明). (3.2.3) の下の 2 つの図式から明らか。 □

(3.2.5) 補題 (蛇の補題 (snake lemma)). 次の図式で, 真中の二つの水平な列が完全であれば, δ : $\operatorname{Ker} f'' \to \operatorname{Cok} f$ が存在して, 外側の列も完全。更に i が単射なら $\operatorname{Ker} f' \to \operatorname{Ker} f$ も単射で, また q が全射なら $\operatorname{Cok} f \to \operatorname{Cok} f''$ も全射。

$$\begin{tikzcd}
& \operatorname{Ker} f' \arrow[r, "i'"] \arrow[d] & \operatorname{Ker} f \arrow[r, "p'"] \arrow[d] & \operatorname{Ker} f'' \arrow[d] \arrow[dddll, rounded corners, "\delta"] & \\
& M' \arrow[r, "i"] \arrow[d, "f'"'] & M \arrow[r, "p"] \arrow[d, "f"'] & M'' \arrow[r] \arrow[d, "f''"'] & 0 \\
0 \arrow[r] & N' \arrow[r, "j"'] \arrow[d] & N \arrow[r, "q"'] \arrow[d] & N'' \arrow[d] & \\
& \operatorname{Cok} f' \arrow[r, "j'"'] & \operatorname{Cok} f \arrow[r, "q'"'] & \operatorname{Cok} f'' &
\end{tikzcd}$$

また, この構成は関手的である。つまり,

$$\begin{tikzcd}
& M' \arrow[rr] \arrow[d, "f'"'] \arrow[ddr] & & M \arrow[rr] \arrow[d, "f"'] \arrow[ddr] & & M'' \arrow[rr] \arrow[d, "f''"'] \arrow[ddr] & & 0 & \\
0 \arrow[r] & N' \arrow[rr] \arrow[ddr] & & N \arrow[rr] \arrow[ddr] & & N'' \arrow[ddr] & & & \\
& & P' \arrow[rr] \arrow[d, "g'"] & & P \arrow[rr] \arrow[d, "g"] & & P'' \arrow[rr] \arrow[d, "g''"] & & 0 \\
& 0 \arrow[r] & Q' \arrow[rr] & & Q \arrow[rr] & & Q'' & &
\end{tikzcd}$$

のような可換図式があれば, 次は可換である。

$$\begin{tikzcd}
\operatorname{Ker} f' \arrow[r] \arrow[d] & \operatorname{Ker} f \arrow[r] \arrow[d] & \operatorname{Ker} f'' \arrow[r, "\delta"] \arrow[d] & \operatorname{Cok} f' \arrow[r] \arrow[d] & \operatorname{Cok} f \arrow[r] \arrow[d] & \operatorname{Cok} f'' \arrow[d] \\
\operatorname{Ker} g' \arrow[r] & \operatorname{Ker} g \arrow[r] & \operatorname{Ker} g'' \arrow[r, "\delta"] & \operatorname{Cok} g' \arrow[r] & \operatorname{Cok} g \arrow[r] & \operatorname{Cok} g''
\end{tikzcd}$$

(証明). 核や余核の普遍性から, 図式が可換であるような射 $i' : \operatorname{Ker} f' \to \operatorname{Ker} f$, $p' : \operatorname{Ker} f \to \operatorname{Ker} f''$, $j' : \operatorname{Cok} f' \to \operatorname{Cok} f$, $q' : \operatorname{Cok} f \to \operatorname{Cok} f''$ が定まることに注意する。δ は次のように定める。$x \in \operatorname{Ker} f''$ に対し, p が全射なので $p(z) = x$ なる $z \in M$ が存在する。このとき $qf(z) = f''p(z) = 0$ より $f(z) \in \operatorname{Ker} q$ だから, $y \in M''$ で $j(w) = f(z)$ なる w が存在する。w の $\operatorname{Cok} f$ の像を y として, $\delta(x) = y$ と定める。z の取り方による違いは $f'(M')$ の元の差の違いなので, δ は well-defined. 次に完全性を示していこう。

($\operatorname{Ker} \delta = \operatorname{Im} p'$). $x = p'(z)$ ($z \in \operatorname{Ker} f$) と書けるなら, $f(x) = 0$ より $\delta(x) = 0$ となるから, $\operatorname{Im} p' \subset \operatorname{Ker} \delta$. 逆に $\delta(x) = 0$ なら, 上の構成において $f'(v) = w$ なる $v \in M'$ が存在する。このとき $fi(v) = jf'(v) = f(z)$ より $f(z - i(v)) = 0$ だから $z - i(v) \in \operatorname{Ker} f$ である。$p'(z - i(v)) = p(z) - pi(v) = p(z) = x$ だから,

$x \in \operatorname{Im} p'$. よって $\operatorname{Ker} \delta \subset \operatorname{Im} p'$ も言える。

$$
\begin{tikzcd}
\operatorname{Ker} f' \arrow[r, "i'"] \arrow[d] & \operatorname{Ker} f \arrow[r, "p'"] \arrow[d] & \operatorname{Ker} f'' \arrow[d] \\
M' \arrow[r, "i"] \arrow[d, "f'"'] & M \arrow[r, "p"] \arrow[d, "f"'] & M'' \arrow[d, "f''"'] \\
N' \arrow[r, "j"'] \arrow[d] & N \arrow[r, "q"'] & N'' \\
\operatorname{Cok} f' & &
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
 & z - i(v) \arrow[r, mapsto] \arrow[d, mapsto] & x \arrow[d, equal] \\
v \arrow[d, mapsto] & z \arrow[r, mapsto] \arrow[d, mapsto] & x \arrow[d, mapsto] \\
w \arrow[r, mapsto] \arrow[d, mapsto] & f(z) \arrow[r, mapsto] & 0 \\
\delta(x) = 0 & &
\end{tikzcd}
$$

$(\operatorname{Im} \delta = \operatorname{Ker} j')$. $y = \delta(x)$ とすると, $p(z) = x$ なる $z \in M$ と $j(w) = f(z)$ なる $w \in N'$ が存在して, y は w の像である。このとき $j'(y)$ は $f(z)$ の $\operatorname{Cok} f$ への像だから 0. よって $\operatorname{Im} \delta \subset \operatorname{Ker} j'$. 逆に $j'(y) = 0$ なら y に写る $w \in N'$ に対し, $j(w) \in \operatorname{Im} f$ だから $j(w) = f(z)$ なる $z \in M$ がある。$qj(w) = 0$ より $p(z) \in \operatorname{Ker} f''$ だから $x = p(z)$ に対し, $\delta(x) = y$. よって $\operatorname{Ker} j' \subset \operatorname{Im} \delta$ も言える。

$(\operatorname{Im} i' = \operatorname{Ker} p')$. $pi = 0$ より $p'i' = 0$ だから $\operatorname{Im} i' \subset \operatorname{Ker} p'$. 逆に $x \in \operatorname{Ker} p'$ なら $p(x) = 0$ より $i(y) = x$ なる $y \in M'$ が存在する。このとき $jf'(y) = fi(y) = f(x) = 0$ だが j は単射なので $y \in \operatorname{Ker} f'$ だから $x \in \operatorname{Im} i'$. よって $\operatorname{Ker} p' \subset \operatorname{Im} i'$ も言える。

$(\operatorname{Im} j' = \operatorname{Ker} q')$. $N' \to \operatorname{Cok} f'$ が全射で $qj = 0$ であることから $q'j' = 0$ が言えるので $\operatorname{Im} j' \subset \operatorname{Ker} q'$. 逆の包含関係を示そう。以下, $\pi : N \to \operatorname{Cok} f$, $\pi' : N' \to \operatorname{Cok} f'$ を自然な全射準同型とする。

$$
\begin{tikzcd}
M' \arrow[r, "i"] \arrow[d, "f'"'] & M \arrow[r, "p"] \arrow[d, "f"'] & M'' \arrow[d, "f''"'] \\
N' \arrow[r, "j"'] \arrow[d, "\pi'"'] & N \arrow[r, "q"'] \arrow[d, "\pi"] & N'' \arrow[d] \\
\operatorname{Cok} f' \arrow[r, "j'"'] & \operatorname{Cok} f \arrow[r, "q'"'] & \operatorname{Cok} f''
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
 & v \arrow[rr, mapsto] & & w \arrow[d, mapsto] \\
u \arrow[r, mapsto] \arrow[d, mapsto] & z - f(v), & z \arrow[r, mapsto] \arrow[ll, phantom] & q(z) \arrow[d, mapsto] \\
y \arrow[rr, mapsto] & & x \arrow[r, mapsto] & 0
\end{tikzcd}
$$

$q'(x) = 0$ なら $\pi(z) = x$ なる $z \in N$ に対し, $q(z)$ の $\operatorname{Cok} f''$ への像は 0 なので, $f''(w) = q(z)$ なる w が存在する。p は全射なので $p(v) = w$ なる $v \in M$ がある。$q(z) = qf(v)$ より $z - f(v) = j(u)$ なる $u \in N'$ が存在する。$y = \pi'(u)$ とすると, $\pi f(v) = 0$ より $j'(y) = \pi j(u) = \pi(z - f(v)) = \pi(z) = x$ だから $x \in \operatorname{Im} j'$. よって $\operatorname{Ker} q' \subset \operatorname{Im} j'$ も言える。以上から外側の列の完全性が言える。i が単射なら i' が単射, q が全射なら q' が全射であることは明らか。最後の関手性についての主張は, 中央の δ が関わるところ以外は, 核や余核の普遍性から明らか。

$$
\begin{tikzcd}
\operatorname{Ker} f'' \arrow[r, "\delta"] \arrow[d] & \operatorname{Cok} f' \arrow[d] \\
\operatorname{Ker} g'' \arrow[r, "\delta"] & \operatorname{Cok} g'
\end{tikzcd}
$$

が可換であることは, δ の定義に戻って考えればわかる。 □

3.3 関手の完全性

(3.3.1) 定義. A, B を環, $F : A\text{-Mod} \to B\text{-Mod}$ を加法的共変関手とする。$M' \to M \to M''$ が完全なら $F(M') \to F(M) \to F(M'')$ が完全のとき F は**完全 (関手)** であるという。$0 \to M' \to M \to M''$ (resp. $M' \to M \to M'' \to 0$) が完全のとき, $0 \to F(M') \to F(M) \to F(M'')$ (resp. $F(M') \to F(M) \to F(M'') \to 0$) が完全なら, F は**左完全** (**left exact**) (resp. **右完全** (**right exact**)) であるという。

(3.3.2) 定義. A, B を環, $G : A\text{-Mod} \to B\text{-Mod}$ を加法的反変関手とする。$M' \to M \to M''$ が完全なら $G(M'') \to G(M) \to G(M')$ が完全のとき G は**完全 (関手)** であるという。また $M' \to M \to M'' \to 0$ (resp. $0 \to M' \to M \to M''$) が完全のとき, $0 \to G(M'') \to G(M) \to G(M')$ (resp. $G(M'') \to G(M) \to G(M') \to 0$) が完全なら, G は**左完全** (**left exact**) (resp. **右完全** (**right exact**)) であるという。

(3.3.3) 命題. 加法的共変関手 $F : A\text{-Mod} \to B\text{-Mod}$ が完全であることは任意の A 加群の短完全列

$$0 \longrightarrow M' \longrightarrow M \longrightarrow M'' \longrightarrow 0$$

に対し,

$$0 \longrightarrow F(M') \longrightarrow F(M) \longrightarrow F(M'') \longrightarrow 0$$

が完全であることと同値。反変関手についても同様に, 短完全列を短完全列に写すなら完全関手である。

(証明). 反変関手の場合は射の向きを逆にするだけなので, 共変関手についてのみ示す。F が完全なら F は短完全列を短完全列に写すので, 逆を示せばよい。A 加群の完全列 $M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M''$ に対し, 次の可換図式を作る。

$$\begin{tikzcd}
 & & 0 \arrow[dr] & & 0 & & & & 0 \\
 & & & \mathrm{Im}\, f \arrow[ur] \arrow[dr] & & & & \mathrm{Cok}\, g \arrow[ur] & \\
 & & M' \arrow[ur] \arrow[rr, "f"] & & M \arrow[rr, "g"] \arrow[dr] & & M'' \arrow[ur] & & \\
 & \mathrm{Ker}\, f \arrow[ur] & & & & \mathrm{Im}\, g \arrow[ur] \arrow[dr] & & & \\
0 \arrow[ur] & & & & 0 \arrow[ur] & & 0 & &
\end{tikzcd}$$

このとき, 斜めの列はすべて完全である。よって仮定から, これを F で写した図式においても斜めの列はすべて完全である。すると, (3.1.11) より $F(M') \to F(M) \to F(M'')$ も完全であることがわかる。 □

(3.3.4) 系. 右完全かつ左完全なら完全である。

(証明). (3.3.3) より明らか。 □

(3.3.5). ここでは圏論における随伴の概念を簡単に説明しておく。$\mathscr{C}, \mathscr{D}$ を圏とする。$\mathscr{C}$ と $\mathscr{D}$ の間の**随伴** (**adjunction**) とは共変関手 $F : \mathscr{C} \to \mathscr{D}$, $G : \mathscr{D} \to \mathscr{C}$ および $\mathscr{C}^\circ \times \mathscr{D}$ から Sets への関手の自然同型 $\eta : \mathrm{Hom}_{\mathscr{D}}(F(-), -) \to \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(-, G(-))$ の組 (F, G, η) のことである。具体的には η は任意の $\mathscr{C}$ の対象 X と $\mathscr{D}$ の対象 Y に対する全単射

$$\mathrm{Hom}_{\mathscr{D}}(F(X), Y) \overset{\eta_{X,Y}}{\xrightarrow{\sim}} \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(X, G(Y))$$

の族であって, 任意の $\mathscr{C}$ の射 $f : X' \to X$ 及び $\mathscr{D}$ の射 $g : Y \to Y'$ に対し, 次が可換になるようなもの。

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}_{\mathscr{D}}(F(X), Y) \arrow[r, "\sim", "\eta_{X,Y}"'] \arrow[d] & \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(X, G(Y)) \arrow[d] & \varphi \arrow[r, mapsto] \arrow[d, mapsto] & \psi \arrow[d, mapsto] \\
\mathrm{Hom}_{\mathscr{D}}(F(X'), Y') \arrow[r, "\sim", "\eta_{X',Y'}"'] & \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(X', G(Y')) & g \circ \varphi \circ F(f) \arrow[r, mapsto] & G(g) \circ \psi \circ f
\end{tikzcd}$$

このとき, F を G の**左随伴関手** (**left adjoint**), G を F の**右随伴関手** (**right adjoint**) と言い,

$$F \dashv G$$

と表記したり, あるいは, 図式の中で

$$\begin{tikzcd} \mathscr{C} \arrow[r, shift left, "F"] \arrow[r, phantom, "\perp"] & \mathscr{D} \arrow[l, shift left, "G"] \end{tikzcd}$$

などと書いたりする。

(3.3.6) 補題. A, B を環, $F : A\text{-}\mathsf{Mod} \to B\text{-}\mathsf{Mod}$, $G : B\text{-}\mathsf{Mod} \to A\text{-}\mathsf{Mod}$ をそれぞれ共変関手で, (F, G, η) を随伴, つまり $F \dashv G$ とする。このとき, もし G (resp. F) が加法的なら F (resp. G) も加法的で, 更に各 A 加群 M, B 加群 N に対して η から定まる全単射 $\eta_{M,N} : \mathrm{Hom}_A(F(M), N) \to \mathrm{Hom}_B(M, G(N))$ はアーベル群の準同型。

(証明). まず G が加法的なら F も加法的で $\eta_{M,N}$ がアーベル群の同型であることを示そう。$g : F(M) \to N$ なる射に対し, 自然同型の性質から次の可換図式を得る。

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Hom}_B(F(M), F(M)) & \xrightarrow{\eta_{M,F(M)}} & \mathrm{Hom}_A(M, GF(M)) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathrm{Hom}_B(F(M), N) & \xrightarrow{\eta_{M,N}} & \mathrm{Hom}_A(M, G(N)) \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} \mathrm{id}_{F(M)} & \longmapsto & \epsilon_M \\ \rotatebox[origin=c]{-90}{$\mapsto$} & & \rotatebox[origin=c]{-90}{$\mapsto$} \\ g & \longmapsto & G(g) \circ \epsilon_M \end{array}$$

$\mathrm{id}_{F(M)} \in \mathrm{Hom}_B(F(M), F(M))$ の $\mathrm{Hom}_A(M, GF(M))$ における像を $\epsilon_M : M \to GF(M)$ とすれば, $\mathrm{Hom}_A(M, G(N))$ への像を 2 通り計算することで, $\eta_{M,N}(g) = G(g) \circ \epsilon_M$ であることがわかる。よって G が加法的, つまり $g \mapsto G(g)$ が準同型なら $\eta_{M,N}$ も加群の準同型。また, $f : M' \to M$ を A 加群の準同型とするとき,

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Hom}_B(F(M), F(M)) & \xrightarrow{\eta_{M,F(M)}} & \mathrm{Hom}_A(M, GF(M)) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathrm{Hom}_B(F(M'), F(M)) & \xrightarrow{\eta_{M',F(M)}} & \mathrm{Hom}_A(M', GF(M)) \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} \mathrm{id}_{F(M)} & \longmapsto & \epsilon_M \\ \rotatebox[origin=c]{-90}{$\mapsto$} & & \rotatebox[origin=c]{-90}{$\mapsto$} \\ F(f) & \longmapsto & \epsilon_M \circ f \end{array}$$

なる図式を考えると, $\eta_{M',F(M)}(F(f)) = \epsilon_M \circ f$ であることがわかる。よって $\eta_{M',F(M)}$ の逆写像を $\theta_{M',F(M)}$ とすると, $f, f' : M' \to M$ に対し

$$F(f + f') = \theta_{M',F(M)}(\epsilon_M \circ (f + f')) = \theta_{M',F(M)}(\epsilon_M \circ f) + \theta_{M',F(M)}(\epsilon_M \circ f') = F(f) + F(f')$$

より F も加法的。

同様に, F が加法的とすると, $f : M \to G(N)$ なる射に対し

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Hom}_B(FG(N), N) & \xrightarrow{\eta_{G(N),N}} & \mathrm{Hom}_A(G(N), G(N)) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathrm{Hom}_B(F(M), N) & \xrightarrow{\eta_{M,N}} & \mathrm{Hom}_A(M, G(N)) \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} \delta_N & \longmapsto & \mathrm{id}_{G(N)} \\ \rotatebox[origin=c]{-90}{$\mapsto$} & & \rotatebox[origin=c]{-90}{$\mapsto$} \\ \delta_N \circ F(f) & \longmapsto & f \end{array}$$

なる可換図式を考えると, $\delta_N : FG(N) \to N$ を $\eta_{G(N),N}(\delta_N) = \mathrm{id}_{G(N)}$ なる射とするとき $\eta_{M,N}(\delta_N \circ F(f)) = f$ であることがわかる。よって $\theta_{M,N}$ を $\eta_{M,N}$ の逆写像とすると $\theta_{M,N}(g) = \delta_N \circ F(f)$ なので, F が加法的なら $\theta_{M,N}$ は準同型で, よって $\eta_{M,N}$ も準同型。また, $g : N \to N'$ を B 加群の準同型とするとき,

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Hom}_B(FG(N), N) & \xrightarrow{\eta_{G(N),N}} & \mathrm{Hom}_A(G(N), G(N)) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathrm{Hom}_B(FG(N), N') & \xrightarrow{\eta_{G(N),N'}} & \mathrm{Hom}_A(G(N), G(N')) \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} \delta_N & \longmapsto & \mathrm{id}_{G(N)} \\ \rotatebox[origin=c]{-90}{$\mapsto$} & & \rotatebox[origin=c]{-90}{$\mapsto$} \\ g \circ \delta_N & \longmapsto & G(g) \end{array}$$

なる図式を考えると, $G(g)=\eta_{G(N),N'}(g\circ\delta_N)$ であることがわかる。よって $g,g':N\to N'$ に対し

$$G(g+g')=\eta_{G(N),N'}((g+g')\circ\delta_N)=\eta_{G(N),N'}(g\circ\delta_N)+\eta_{G(N),N'}(g'\circ\delta_N)=G(g)+G(g')$$

より G は加法的。 □

(3.3.7) 定理. A, B を環, $F:A$-Mod $\to B$-Mod, $G:B$-Mod $\to A$-Mod をそれぞれ共変関手, (F,G,η) を随伴, つまり $F\dashv G$ とする。更に F ないしは G が加法的なら, F は右完全, G は左完全である。つまり, 加法的関手が右随伴関手を持てば右完全, 左随伴関手を持てば左完全である。

(証明). G が左完全であることを示すには (3.1.18) より任意の A 加群 L と B 加群の完全列 $0\to M'\to M\to M$ に対し

$$0\to\mathrm{Hom}_A(L,G(M'))\to\mathrm{Hom}_A(L,G(M))\to\mathrm{Hom}_A(L,G(M''))$$

が完全であることを示せばよいが, 仮定と (3.3.6) よりこの列は

$$0\to\mathrm{Hom}_B(F(L),M')\to\mathrm{Hom}_B(F(L),M)\to\mathrm{Hom}_B(F(L),M'')$$

と同一視できるので, (3.1.18) より完全。F についても (3.1.19) より B 加群 N と A 加群の完全列 $M'\to M\to M''\to 0$ に対し

$$0\to\mathrm{Hom}_B(F(M''),N)\to\mathrm{Hom}_B(F(M),N)\to\mathrm{Hom}_B(F(M'),N)$$

が完全であることを示せばよいが, これは

$$0\to\mathrm{Hom}_A(M'',G(N))\to\mathrm{Hom}_A(M,G(N))\to\mathrm{Hom}_A(M',G(N))$$

と同一視できるので (3.1.19) より完全。 □

(3.3.8) 定理. A, B を環, $M'\xrightarrow{f}M\xrightarrow{g}M''\to 0$ を左 A 加群の完全列, L を (B,A) 加群とすれば, 次は完全列。

$$L\otimes_A M'\xrightarrow{\mathrm{id}\otimes f}L\otimes_A M\xrightarrow{\mathrm{id}\otimes g}L\otimes_A M''\to 0.$$

つまり, $L\otimes_A -$ なる関手は右完全。特に A が可換環で $A=B$ の場合を考えると, 任意の A 加群 L に対し, $L\otimes_A -$ は右完全であることがわかる。

(証明). $F:(A\text{-mod})\to(B\text{-mod})$ を $F(M)=L\otimes_A M$, $G:(B\text{-mod})\to(A\text{-mod})$ を $G(N)=\mathrm{Hom}_B(L,N)$ で定義すると, F, G は明らかに加法的。また (2.8.5) より $F\dashv G$. したがって F は右完全であることから主張が言える。 □

(3.3.9) 補足. ちなみに, $\mathrm{Hom}_B(L,-)$ の左完全性は右随伴関手が左完全であることの証明で使っているので, 上の事実をもって証明とするわけにはいかない。

(3.3.10). $L\otimes_A -$ は左完全とは限らない。例えば $A=B=\mathbb{Z}$, $L=\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ とするとき, $0\to\mathbb{Z}\xrightarrow{n}\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}\to 0$ は完全列であるが, $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ をテンソルすると,

$$\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}\xrightarrow{n}\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}\to 0$$

において, 左の n 倍写像は 0 写像なので, 単射ではない。

(3.3.11) 命題. A, B を可換環とし, $F : A\text{-Mod} \to B\text{-Mod}$ を加法的共変関手とする。$f : M \to N$ を A 加群の射とする。f の核を $(\operatorname{Ker} f, i)$, 余核を $(\operatorname{Cok} f, p)$ とするとき

(1) F が左完全であれば, $F(f)$ の核は $(\operatorname{Ker} F(f), j) = (F(\operatorname{Ker} f), F(i))$.
(2) F が右完全であれば, $F(f)$ の余核は $(\operatorname{Cok} F(f), q) = (F(\operatorname{Cok} f), F(p))$.

(証明). (1) $\operatorname{Ker} f \xrightarrow{i} M$ が核であることは, $0 \longrightarrow \operatorname{Ker} f \xrightarrow{i} M \xrightarrow{f} N$ が完全列であることと同値である。F が左完全なら $0 \longrightarrow F(\operatorname{Ker} f) \xrightarrow{F(i)} F(M) \xrightarrow{F(f)} F(N)$ も完全列であるから, 題意が言える。

(2) 同様に, $N \xrightarrow{p} \operatorname{Cok} f$ が余核であることは $M \xrightarrow{f} N \xrightarrow{p} \operatorname{Cok} f \longrightarrow 0$ が完全列であることと同値である。F が右完全なら $F(M) \xrightarrow{F(f)} F(N) \xrightarrow{F(p)} F(\operatorname{Cok} f) \longrightarrow 0$ も完全列であるから, 題意が言える。証明から分かるように, これらは実際には左完全 (右完全) であることと同値な条件になっている。 □

(3.3.12) 系. 記号は (3.3.11) と同様とする。f の像を $i : \operatorname{Im} f \to N$ とするとき ((2.4.3) 参照), もし F が完全であれば, $F(f)$ の像は $(\operatorname{Im} F(f), j) = (F(\operatorname{Im} f), F(i))$.

(証明). (2.4.3) より, 像は核と余核により $\operatorname{Im} f = \operatorname{Ker}(\operatorname{cok} f)$ と書けるので, (3.3.11) より明らか。 □

(3.3.13) 定理 (コホモロジーと完全関手). A, B を可換環, $F : A\text{-Mod} \to B\text{-Mod}$ を共変関手とする。F が完全であれば, A 加群の複体 $M^\bullet = (M^n, \mathrm{d}^n)$

$$\cdots \longrightarrow M^{n-1} \xrightarrow{\mathrm{d}^{n-1}} M^n \xrightarrow{\mathrm{d}^n} M^{n+1} \xrightarrow{\mathrm{d}^{n+1}} \cdots$$

に対し, $F(\mathrm{H}^n(M^\bullet)) = \mathrm{H}^n(F(M^\bullet))$.

(証明). (3.1.9) より, $\mathrm{H}^n(M^\bullet)$ は次のように $\operatorname{Im} \mathrm{d}^{n-1} \to \operatorname{Ker} \mathrm{d}^n$ の余核として表せる。

$$\begin{array}{ccccccc}
M^{n-1} & \xrightarrow{\mathrm{d}^{n-1}} & M^n & \xrightarrow{\mathrm{d}^n} & M^{n+1} & & \\
{\scriptstyle p}\downarrow & & \uparrow{\scriptstyle i} & & & & \\
\operatorname{Im} \mathrm{d}^{n-1} & \longrightarrow & \operatorname{Ker} \mathrm{d}^n & \longrightarrow & \mathrm{H}^n(M^\bullet) & \longrightarrow & 0
\end{array}$$

すると (3.3.11), (3.3.12) より $\operatorname{Im} F(\mathrm{d}^{n-1}) \longrightarrow \operatorname{Ker} F(\mathrm{d}^n) \longrightarrow F(\mathrm{H}^n(M^\bullet)) \longrightarrow 0$ なる完全列を得る。これは $F(\mathrm{H}^n(M^\bullet)) \simeq \mathrm{H}^n(F(M^\bullet))$ を意味する。 □

3.4 有限表示

(3.4.1) 定義. A を環とする。A 加群 M が**有限表示** (**of finite presentation**) とは, 次のような形の完全列が存在すること。

$$\bigoplus^s A \to \bigoplus^r A \to M \to 0.$$

つまり有限生成自由加群からの全射で, その核がまた有限生成であるものがあること。

(3.4.2) 補足. A がネーター環であれば, 有限生成 A 加群はネーターである。つまりすべての部分加群は有限生成である。すると M を有限生成 A 加群とするとき $\bigoplus^r A \to M$ なる全射の核 N も有限生成であるから, 有限生成 A 加群は有限表示でもある。

(3.4.3) 補足. $\varphi : A \to B$ を可換環の準同型とし, これにより B を A 代数とみなす。有限個の B の元の組 $y_1, \ldots, y_n$ で, $A[X_1, \ldots, X_n] \to B$; $X_i \to y_i$ なる A 上の多項式環からの射が全射であるようなものが存在するとき, B は A 代数として**有限生成** (**finitely generated**) ないしは**有限型** (**of finite type**) という。 φ が有限型であると言うこともある。また, このような全射準同型で $\mathrm{Ker}(A[X_1, \ldots, X_n] \to B)$ がイデアルとして有限生成であるものが取れるとき, つまり

$$B \simeq A[X_1, \ldots, X_n]/(f_1, \ldots, f_m)$$

なる A 代数の同型があるとき, B は A 代数として**有限表示** (**of finite presentation**) であるという。φ が有限表示であると言うこともある。また A 上の可換環 B が A 加群として有限型であるとき B は A 上**有限** (**finite**) という。

A 上の可換環は A 加群とみなすこともできるため, 有限生成, 有限型とか有限表示などの言葉を使う際には A 加群としてなのか, A 代数としてなのか注意しなければならない。そのため, A 上の可換環が A 加群として有限型であることを **module-finite** ということもある。

3.5 射影加群, 入射加群

(3.5.1) 定義 (射影加群). A を環とする。A 加群 P が**射影的**とは任意の A 加群の全射 $p : M \to M''$ および, 射 $q : P \to M''$ に対し, $f : P \to M$ で $pf = q$ なるものが存在すること。

$$\begin{tikzcd} P \arrow[d, dotted, "f"'] \arrow[dr, "q"] & & \\ M \arrow[r, "p"'] & M'' \arrow[r] & 0. \end{tikzcd}$$

これは, $M \to M'' \to 0$ が完全なら $\mathrm{Hom}_A(P, M) \to \mathrm{Hom}_A(P, M'') \to 0$ も完全, つまり $\mathrm{Hom}_A(P, -)$ が右完全であることを意味する。もともと $\mathrm{Hom}_A(P, -)$ は (3.1.18) より左完全だったので,

$$P \text{ が射影的} \iff \mathrm{Hom}_A(P, -) \text{ が完全関手。}$$

(3.5.2) 補題. A を環, (P_λ) を左 A 加群の族とする。このとき,

$$\bigoplus P_\lambda \text{ が射影的} \Leftrightarrow \text{任意の } \lambda \text{ に対し } P_\lambda \text{ が射影的。}$$

(証明). 次の図式から自明。

$$\begin{tikzcd} P_\lambda \arrow[r] \arrow[d, dotted] & \bigoplus_\lambda P_\lambda \arrow[d] \arrow[dl, dotted] & \\ M \arrow[r] & N \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

□

(3.5.3) 命題. P が射影的であるとする。このとき, $M' \to M \to M'' \to 0$ が完全列であれば, 任意の $P \to M$ で $P \to M \to M''$ が 0 であるものに対し, $P \to M'$ で下の図式が可換であるものが存在する。

$$\begin{tikzcd} & P \arrow[d] \arrow[dl, dotted] & & \\ M' \arrow[r] & M \arrow[r] & M'' \arrow[r] & 0. \end{tikzcd}$$

(証明). $\mathrm{Hom}_A(P, M') \to \mathrm{Hom}_A(P, M) \to \mathrm{Hom}_A(P, M'') \to 0$ が完全であることから明らか。 □

(3.5.4) 補題. 自由 A 加群 (2.3.13) は射影的である。

(証明). L を自由 A 加群, $p: M \to N$ を全射準同型, $q: L \to N$ を準同型とする。L の基底 u_λ $(\lambda \in \Lambda)$ を固定しておく。p が全射であることから $p(x_\lambda) = q(u_\lambda)$ であるような x_λ が存在する。このとき, $f: L \to M$ を $f(u_\lambda) = x_\lambda$ となるように定めればよい。 □

(3.5.5) 定理. A 加群 P が射影的であることは, P がある自由加群の直和因子となることと同値。

(証明). P が射影的であるとする。自由加群 L から P への全射が存在する。このとき, 射影的であることから

$$\begin{tikzcd} P \arrow[d, dotted] \arrow[dr, "\mathrm{id}"] & & \\ L \arrow[r] & P \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

が可換になる射 $P \to L$ が存在するので, P は L の直和因子になる。逆に P が自由加群 L の直和因子であれば, 全射準同型 $p: L \to P$ と単射準同型 $s: P \to L$ で $p \circ s = \mathrm{id}$ なる組が存在するので, 任意の全射準同型 $q: M \to N$ と準同型 $f: P \to N$ に対し

$$\begin{tikzcd} L \arrow[r, "p"'] \arrow[d, "g"'] & P \arrow[l, bend right, "s"'] \arrow[d, "f"] \arrow[dl, dotted, "gs"] & \\ M \arrow[r, "q"'] & N \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

L が自由でしたがって射影的でもあることから $fp = qg$ なる $g: L \to M$ が存在する。このとき $gs: P \to M$ は $qgs = fps = f$ を満たすので, P が射影的であることがわかる。 □

(3.5.6). 整域 A で, すべてのイデアルが単項, つまり 1 つの元で生成されるものを**単項イデアル整域** (**principal ideal domain**) という。これは, しばしば頭文字を取って **PID** と呼ばれる。$\mathbb{Z}$ や体 k を係数とする 1 変数多項式環 $k[X]$ は代表的な PID の例である。また定義から体も PID である。

(3.5.7) 定理. A が PID であれば, 自由 A 加群の部分加群は自由である。

(証明). Zorn の補題を使う。F を自由 A 加群, $U \subset F$ をその基底とする。したがって $\sum_{u\in U} Au \simeq \bigoplus_{u\in U} A$ である。$M \subset F$ を部分 A 加群とするとき, M が自由であることを示す。P を, U の部分集合 $V \subset U$ で $M \cap \sum_{v\in V} Av$ が自由 A 加群であるようなものと, その場合の $M \cap \sum_{v\in V} Av$ の基底 S の組 (V, S) 全体のなす集合とする。

$$P = \{(V, S) \mid V \subset U,\ M \cap \textstyle\sum_{v\in V} Av \text{ は自由},\ S \text{ は } M \cap \sum_{v\in V} Av \text{ の基底 } \}$$

P に V および S の包含関係で順序を入れると, P は帰納的順序集合である。実際, $L \subset P$ を全順序部分集合とするとき, $W = \bigcup_{(V,S)\in L} V$, $T = \bigcup_{(V,S)\in L} S$ とすると, $M \cap \sum_{w\in W} Aw = \sum_{t\in T} At$ であることが簡単に確かめられるので, (W, T) は L の上界になる。よって, Zorn の補題より, P は極大元 (V_0, S_0) を持つ。このとき $V_0 = U$ を示そう。仮に $V_0 \neq U$ なら, $u \in U - V_0$ が存在する。$V_1 = V_0 \cup \{u\}$ とおく。

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & \sum_{v\in V_0} Av \arrow[r] & \sum_{v\in V_1} Av \arrow[r, "p"] & Au \arrow[r] & 0 \\ 0 \arrow[r] & M \cap \sum_{v\in V_0} Av \arrow[r] \arrow[u] & M \cap \sum_{v\in V_1} Av \arrow[r] \arrow[u] & p(M \cap \sum_{v\in V_1} Av) \arrow[r] \arrow[u] & 0 \end{tikzcd}$$

なる図式を考えると, 上の行は完全系列で, また, $p(M \cap \bigoplus_{V_0} A)$ は Au なる階数 1 の自由加群の部分 A 加群であるから, A のイデアルと同一視できる。A は PID であるから $p(M \cap \bigoplus_V A)$ は (0 となる場合も含めて) 自由加群で, したがって下の完全系列は分裂し, $M \cap \sum_{v \in V_1} Av$ も自由加群となる。その基底を S_1 とおけば, $(V_1, S_1) \in P$ となるから, 極大性に矛盾。よって $V_0 = U$ だから, $M \cap \sum_{V_0} A = M$ で, したがって M の基底が存在する。 □

(3.5.8) 系. A が PID なら, A 加群が射影的であることは, 自由 A 加群であることと同値。

(証明). (3.5.4) より自由加群は射影的。逆に射影的であれば (3.5.5) より自由加群の直和因子なので, (3.5.7) より自由 A 加群。 □

(3.5.9) 補足. R が PID, $A = R[X_1, \ldots, X_n]$ であれば, 任意の有限生成射影的 A 加群は自由である。これは Serre の問題と呼ばれたもので, Quillen-Suslin によって証明された。[Kun85, Chap.4, Th.3.15]

(3.5.10) 補足. A が局所環であれば, 任意の射影的 A 加群は自由である [Mat86, 1,§2,Theorem 2.5].

(3.5.11) 定義 (入射加群). A 加群 Q が**入射的**とは任意の単射 $i : M' \to M$ および $j : M' \to Q$ に対し, $g : M \to Q$ で $j = gi$ なるものが存在すること。

$$\begin{tikzcd} & & Q \\ 0 \arrow[r] & M' \arrow[ur, "j"] \arrow[r, "i"'] & M. \arrow[u, dotted, "g"'] \end{tikzcd}$$

これは $0 \to M' \to M$ が完全なら $\mathrm{Hom}_A(M, Q) \to \mathrm{Hom}_A(M', Q) \to 0$ も完全, つまり $\mathrm{Hom}_A(-, Q)$ が右完全であることを意味する。(3.1.19) より $\mathrm{Hom}_A(-, Q)$ はもともと左完全なので,

$$Q \text{ が入射的} \iff \mathrm{Hom}_A(-, Q) \text{ が完全関手。}$$

(3.5.12) 命題. Q が入射的であるとする。このとき, $0 \to M' \to M \to M''$ が完全列であれば, 任意の $M \to Q$ で $M' \to M \to Q$ が 0 であるものに対し, $M'' \to Q$ で下の図式が可換であるものが存在する。

$$\begin{tikzcd} & & Q & \\ 0 \arrow[r] & M' \arrow[r] & M \arrow[u] \arrow[r] & M'' \arrow[ul, dotted] \end{tikzcd}$$

(証明). $\mathrm{Hom}_A(M'', Q) \to \mathrm{Hom}_A(M, Q) \to \mathrm{Hom}_A(M', Q) \to 0$ が完全であることから明らか。 □

(3.5.13) 補題. A を環, (Q_λ) を左 A 加群の族とする。このとき,

$$\prod Q_\lambda \text{ が入射的} \Leftrightarrow \text{任意の } \lambda \text{ に対し } Q_\lambda \text{ が入射的。}$$

(証明). 次の図式から自明。

$$\begin{tikzcd} & \prod_\lambda Q_\lambda \arrow[r] & Q_\lambda \\ 0 \arrow[r] & M \arrow[u] \arrow[r] & N \arrow[ul, dotted] \arrow[u, dotted] \end{tikzcd}$$

□

(3.5.14) 命題. A 加群 Q が入射的であることは, 任意のイデアル $I \subset A$ に対して $\mathrm{Hom}(A, Q) \to \mathrm{Hom}(I, Q)$ が全射であることと同値。つまり (3.5.11) においては, $M = I$, $N = A$ の場合のみを考えれば十分。

(証明). $N \subset M$ のとき, $\mathrm{Hom}(M, Q) \to \mathrm{Hom}(N, Q)$ が全射であることを言えば十分。$f : N \to Q$ なる射に対し, $N \subset L_\lambda \subset M$ なる部分 A 加群 L_λ と $f_\lambda : L_\lambda \to Q$ で $f_\lambda|_N = f$ となるものの組全体 S を考えると, S は自然な順序について帰納的な順序集合をなす。したがって, Zorn の補題より上限 (L_0, f_0) が存在する。このとき $L_0 = M$ であることを言えばよい。仮に $L_0 \subsetneq M$ なら, $x \in M \setminus L_0$ が存在する。$I = \{a \in A \mid ax \in L_0\}$ とすると, $I \subset A$ はイデアル。$g : I \to Q$ を $g(a) = f_0(ax)$ で定めると, 仮定から g は $g : A \to Q$ に延長できる。$L_1 = L_0 + Ax \subset M$ とし, ここで $f_1 : L_1 \to Q$ を, $y \in L_0$ と $a \in A$ に対し $f_1(y + ax) = f_0(y) + g(a)$ と定めると, $y = ax \in L_0 \cap Ax$ に対しては $f_0(y) = \psi(a)$ なので f_1 は well-defined.

$$\begin{tikzcd} & & & Q \\ 0 \arrow[r] & L_0 \arrow[r] \arrow[urr, bend left, "f_0"] & L_1 \arrow[ur, dotted, "f_1"] & \\ & I \arrow[r] \arrow[u] & A \arrow[u] \arrow[uur, bend right, "g"'] & \end{tikzcd}$$

すると, (L_1, f_1) もまた S に属することになるが, これは (L_0, f_0) が上限であることに反する。したがって $L_0 = M$ でなければならない。 □

(3.5.15) 定義 (divisible). A を可換環とするとき, A 加群 Q が**可除** (**divisible**) とは任意の非零因子 $a \in A$ に対し, a 倍写像が Q の全射を定めること。

(3.5.16) 例. 例えば $A = \mathbb{Z}$ の場合は, $\mathbb{Q}$ や $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}[\frac{1}{p}]/\mathbb{Z}$ (p は素数) は可除加群である。一般に可除 $\mathbb{Z}$ 加群は $\mathbb{Q}$ と $\mathbb{Z}[\frac{1}{p}]/\mathbb{Z}$ の (無限個も含めた) 直和と同型である。($\mathbb{Q}/\mathbb{Z} \simeq \bigoplus_{p:\ \text{素数}} \mathbb{Z}[\frac{1}{p}]/\mathbb{Z}$ に注意。)

(3.5.17) 命題. A を可換環とする。入射 A 加群は可除 A 加群である。

(証明). Q が入射的であるとする。$a \in A$ が零因子でないなら a 倍写像 $\lambda_a : A \to A$ は単射なので, 仮定から $\mathrm{Hom}_A(A, Q) \to \mathrm{Hom}_A(A, Q); f \mapsto f \circ \lambda_a$ は全射。この射は $Q \simeq \mathrm{Hom}_A(A, Q)$ により Q の a 倍写像に対応するので, Q は可除 A 加群。

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Hom}_A(A, Q) \arrow[r] & \mathrm{Hom}_A(A, Q) \arrow[r] & 0 \\ Q \arrow[u, "\wr"] \arrow[r, "a\text{ 倍}"] & Q \arrow[u, "\wr"] & \end{tikzcd}$$

□

(3.5.18) 定理. A が PID なら, A 加群 Q が入射的であることは可除 A 加群であることと同値。

(証明). (3.5.17) より可除 A 加群が入射的であることを示せばよい。Q が可除加群とする。A の任意のイデアルは (a) と書けるので, (3.5.14) より $\mathrm{Hom}_A(A, Q) \to \mathrm{Hom}_A((a), Q)$ が全射であることを言えば十分。$a = 0$ なら自明。$a \neq 0$ のときは $(a) \subset A$ は a 倍写像 $A \to A$ と同一視できるので, 上の図式より $Q \xrightarrow{a\text{ 倍}} Q$ が全射であることと同値。これは Q が可除加群であることから自明である。 □

3.6 平坦性

(3.6.1). A を可換環, M を A 加群とする。(3.3.8) より A 加群 N に $M \otimes_A N$ を対応させる関手 $M \otimes_A -$ は右完全。一方 (3.3.10) にあるように, $M \otimes_A -$ は必ずしも左完全ではない。そこで次のように定義する。

(3.6.2) 定義. A を可換環, M を A 加群とするとき, M が A 上**平坦** (**flat**) であるとは, 任意の A 加群の単射 $N' \to N$ に対し, $M \otimes_A N' \to M \otimes_A N$ が単射であること。これは $M \otimes_A -$ なる関手が左完全であることを意味する。もともと $M \otimes_A -$ は右完全だったので (3.3.8),

$$M \text{ が平坦} \iff M \otimes_A - \text{ が完全関手}$$

また, M が**忠実平坦** (**faithfully flat**) であるとは, 上の逆も成立すること。すなわち $0 \to N' \to N$ が完全であるのは $0 \to M \otimes_A N' \to M \otimes_A N$ が完全であるとき, そのときに限ること。

(3.6.3) 補題. A を可換環とする。自由 A 加群は A 上平坦。

(証明). (2.6.12) より自明。 □

(3.6.4) 命題. A を可換環とする。A 加群 M が射影的なら, M は A 上平坦。

(証明). (3.5.5) より M は自由加群 L の直和因子。したがって, $0 \to M \to L \to N \to 0$ なる分裂完全系列がある。$0 \to N' \to N$ が完全なら, (3.6.3) より自由加群は平坦なので

$$\begin{array}{ccccc}
 & & 0 & & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow \\
0 & \longrightarrow & M \otimes_A N' & \longrightarrow & M \otimes_A N \\
 & & \downarrow & & \downarrow \\
0 & \longrightarrow & L \otimes_A N' & \longrightarrow & L \otimes_A N'
\end{array}$$

なる可換図式において下の行は完全で, また分裂完全系列は $- \otimes_A N'$ によって分裂完全系列に写ることから縦の射はいずれも単射。よって上の行も完全。 □

(3.6.5) 命題. 局所化は完全関手である。すなわち S を可換環 A の積閉集合とするとき, A 加群の列 $M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M''$ が完全なら, $S^{-1}M' \xrightarrow{f'} S^{-1}M \xrightarrow{g'} S^{-1}M''$ も完全。

(証明). 実際, $y/t \in \operatorname{Ker} g'$ なら, $g'(y/t) = 0$ より $ug(y) = g(uy) = 0$ なる $u \in S$ が存在する。すると, $uy = f(x)$ なる $x \in M$ が存在するので, $f'(x/ut) = uy/ut = y/t$ から $y/t \in \operatorname{Im} f'$. □

(3.6.6) 系. $S^{-1}A$ は A 上平坦。

(3.6.7) 命題. A を可換環とする。このとき A 加群の複体 $M^\bullet = M' \xrightarrow{\varphi} M \xrightarrow{\psi} M''$ について, 次は同値

(1) $M' \xrightarrow{\varphi} M \xrightarrow{\psi} M''$ は完全。
(2) $f_1, \ldots, f_r \in A$ を $(f_1, \ldots, f_r) = A$ なる元の組とするとき, 任意の i について $M^\bullet_{f_i} = M'_{f_i} \xrightarrow{\varphi_i} M_{f_i} \xrightarrow{\psi_i} M''_{f_i}$ は完全。
(3) 任意の A の素イデアル $\mathcal{P}$ に対し $M^\bullet_{\mathcal{P}} = M'_{\mathcal{P}} \xrightarrow{\varphi_{\mathcal{P}}} M_{\mathcal{P}} \xrightarrow{\psi_{\mathcal{P}}} M''_{\mathcal{P}}$ は完全。
(4) 任意の A の極大イデアル m に対し $M^\bullet_m = M'_m \xrightarrow{\varphi_m} M_m \xrightarrow{\psi_m} M''_m$ は完全。

ただし, φ_i, $\varphi_{\mathcal{P}}$, φ_m などは φ などから自然に誘導される準同型を表す。

(証明). 局所化は完全関手であり, 極大イデアルは素イデアルなので (1)⇒(2) および (1)⇒(3)⇒(4) は明らか。(2) が成立するとする。$M' \xrightarrow{\varphi} M \xrightarrow{\psi} M''$ の中央のコホモロジー群 $\operatorname{Ker}\psi / \operatorname{Im}\varphi$ を $\mathrm{H}(M^\bullet)$ と書く。(3.6.5) より局所化は完全関手であるので, (3.3.13) より $\mathrm{H}(M^\bullet)_{f_i} = \mathrm{H}(M^\bullet_{f_i}) = 0$. すると (2.9.33) より, $\mathrm{H}(M^\bullet) = 0$

なので, (1) が成立する。同様に (4) が成立するときも, (2.9.36) より (1) が言える。 □

(3.6.8) 系. A を可換環, A 加群の準同型 $\varphi : M \to N$ および $f \in A$ に対し, $S = \{f^k \mid k = 0, 1, 2, \dots\}$ なる積閉集合による局所化によって φ から誘導される準同型を $\varphi_f : M_f \to N_f$ と書く。$f_1, \dots, f_r \in A$ を $(f_1, \dots, f_r) = A$ なる元の組とするとき, 任意の $0 \le i \le r$ に対し $\varphi_{f_i} : M_{f_i} \to N_{f_i}$ が全射ないしは単射ないしは同型であれば, φ も全射ないしは単射ないしは同型。

(証明). $0 \to \operatorname{Ker} \varphi \to M \to N \to \operatorname{Cok} \varphi \to 0$ なる完全系列を考えれば, (3.6.7) より明らか。 □

(3.6.9) 定義. A を可換環, M を A 加群とする。$x \in M$ が**ねじれ元** (**torsion element**) とはある非零因子 $a \in A$ で $ax = 0$ となるものがあるときを言う。特に M がアーベル群のとき, $x \in M$ がねじれ元とは, $\mathbb{Z}$ 加群としてねじれ元であること, つまりある自然数 n に対し $nx = 0$ なること。A 加群 M の元がすべてねじれ元であるときは M は**ねじれ加群** (**torsion module**) という。逆に, ねじれ元が 0 しかない場合は**ねじれがない** (**torsion free**) という。M のねじれ元全体は部分 A 加群である。これを**ねじれ部分** (**torsion part**) という。

(3.6.10) 命題. A を可換環, M を A 加群とする。M が平坦ならねじれがない。

(証明). $0 \neq x \in M$ なる非自明なねじれ元があったとすると, ある非零因子 $a \in A$ で $ax = 0$ なるものが存在する。このとき a 倍写像 $\lambda_a : A \to A$ は単射だが, これに M をテンソルした $\lambda_a \otimes \mathrm{id} : A \otimes_A M \to A \otimes_A M$ は, 自然な同型により $A \otimes_A M$ を M と同一視すると M の a 倍写像である。これは $x \neq 0$ だが $ax = 0$ であることから単射ではないので, M は平坦ではない。 □

(3.6.11) 命題. A が PID のとき, A 加群 M が平坦であることは, ねじれがないことと同値。

(証明). まず M が有限生成 A 加群の場合には, PID 上の有限生成加群の構造定理から A 加群は自由加群と有限生成ねじれ加群の直和に書ける。よってねじれ部分がなければ自由加群なので平坦。

次に M を一般のねじれがない A 加群とする。M は有限生成部分 A 加群の族 $(M_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ の有向順極限 $\varinjlim M_\lambda$ として表される。$M_\lambda \subset M$ より M_λ もねじれがないので, 上で示したように, $f : N' \to N$ を単射とするとき, $f \otimes \mathrm{id}_{M_\lambda} : N' \otimes_A M_\lambda \to N \otimes_A M_\lambda$ は単射。すると順極限とテンソル積の可換性および有向順極限の完全性から $\varinjlim (f \otimes \mathrm{id}_{M_\lambda}) : N' \otimes_A M \to N \otimes_A M$ も単射であることが言える。 □

3.7 準同型加群とテンソル積 (2)

(3.7.1) 命題. A, B を環, M を右 A 加群, L を (B, A) 双加群とすると, $\operatorname{Hom}_A(M, L)$ は自然な左 B 加群の構造を持つ。

(証明). $b \in B$, $f : M \to L$ に対し, $(bf)(z) = bf(z)$ とすることで B の作用を定めればよい。すると $b, b' \in B$ に対し $((bb')f)(z) = b(b'f(z)) = b(b'f)(z) = (b(b'f)(z)$ となることから確かに左 B 加群になる。 □

(3.7.2). A, B を環, L を (B, A) 双加群とすると, (3.7.1) より右 A 加群 M に対し, $H(M) = \operatorname{Hom}_A(M, L)$ は左 B 加群。また右 A 加群の射 $g : M \to M'$ に対し, $H(g) : \operatorname{Hom}_A(M', L) \to \operatorname{Hom}_A(M, L); h \mapsto h \circ g$ は左 B 加群の準同型である。実際, $h \in \operatorname{Hom}_A(L, N)$ に対し $bh \mapsto (z \mapsto b(h(g(z))))$ だが, これは明らかに

$b(h\circ g)$ である。よって, H は右 A 加群の圏から左 B 加群の圏への (反変) 関手。

$$\begin{array}{rcl} \mathsf{Mod}\text{-}A & \xrightarrow{H} & B\text{-}\mathsf{Mod} \\ M & \longmapsto & \mathrm{Hom}_B(M,L) \end{array}$$

(3.7.3). A, B を環, L を (B,A) 双加群とする。右 A 加群 M, 左 B 加群 N に対し, (3.7.1) より $\mathrm{Hom}_A(M,L)$ は左 B 加群であるから, $\mathrm{Hom}_B(\mathrm{Hom}_A(M,L),N)$ が定義される。また, (2.8.3) より $\mathrm{Hom}_B(L,N)$ は左 A 加群であるから, $M\otimes_A \mathrm{Hom}_B(L,N)$ が定義される。ここで,

$$\begin{array}{ccc} M\otimes_A \mathrm{Hom}_B(L,N) & \longrightarrow & \mathrm{Hom}_B(\mathrm{Hom}_A(M,L),N) \\ \cup & & \cup \\ x\otimes\psi & \longmapsto & (\varphi\mapsto\psi(\varphi(x))) \end{array}$$

なるアーベル群の射が存在する。実際, $\varphi\mapsto\psi(\varphi(x))$ は x, ψ について双加法的であり, また $\psi(\varphi(xa))=\psi(\varphi(x)a)=(a\psi)(\varphi(x))$ となることから, A 平衡でもあるので, 確かにこのような射が定義される。

(3.7.4) 命題. M が A 加群として有限生成射影的なら, (3.7.3) の射は同型。

(証明). 実際 $M=A$ なら, 両辺とも $\mathrm{Hom}_B(L,N)$ となるので同型である。したがって, M が有限生成自由加群である場合にも同型。一般には有限生成自由加群 F からの全射 $F\to M\to 0$ の核を M' とすると, $0\to M'\to F\to M\to 0$ は分裂完全系列だから,

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & M'\otimes_A \mathrm{Hom}_B(L,N) & \longrightarrow & F\otimes_A \mathrm{Hom}_B(L,N) & \longrightarrow & M\otimes_A \mathrm{Hom}_B(L,N) & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & \mathrm{Hom}_B(\mathrm{Hom}_A(M',L),N) & \longrightarrow & \mathrm{Hom}_B(\mathrm{Hom}_A(F,L),N) & \longrightarrow & \mathrm{Hom}_B(\mathrm{Hom}_A(M,L),N) & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

なる図式ができ, 上と下の行は分裂完全系列である。したがって真中の縦の射が同型であることから右の縦の射が同型であることがわかる。(水平方向の列は分裂完全系列なので, 射の向きを逆にした完全系列が存在することに注意。) □

(3.7.5). (3.7.3) の射は一般には同型ではない。例えば次のような例がある。

(3.7.6) 例. $A=K$ を体とする。K 上のベクトル空間 V に対し, その双対空間 $\mathrm{Hom}_K(V,K)$ を $V^\vee$ と書く。このとき, 標準的な線形写像 $\varphi: V\to V^{\vee\vee}; x\mapsto(\varphi_x: f\mapsto f(x))$ は常に単射である。実際, $x\neq 0$ なら, x を含む基底を取り, $f: V\to K$ を $f(x)=1$, それ以外の基底を 0 に写す線形写像とすると $\varphi_x(f)=f(x)=1$ であるから, $\varphi_x\neq 0$. しかし一般に全射ではない。より強く次が成立する。

$$\varphi: V\to V^{\vee\vee} \text{ が全単射} \iff \dim_K V<\infty$$

実際, V の基底を $(e_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ とすると, $\bigoplus_{\lambda\in\Lambda} K\simeq V$ より $V^\vee=\mathrm{Hom}_K(\bigoplus K,K)\simeq\prod\mathrm{Hom}_K(K,K)\simeq\prod K$ である。これは, $i_\lambda: K\to\bigoplus_\lambda K$ を自然な包含写像として f に対し $(f\circ i_\lambda(1))_\lambda=(f(e_\lambda))_\lambda$ を対応させる写像。したがって $V^{\vee\vee}\simeq\mathrm{Hom}(\prod K,K)$ であり, この同型では $\psi:\prod K\to K$ に対し, $\phi(f)=\psi((f(e_\lambda))_\lambda)$ なる $\phi: V^\vee\to K$ が対応する。特に, $p_\lambda:\prod K\to K$ を λ 成分への射影とすると, $\psi=p_\lambda$ のときは $\phi(f)=f(e_\lambda)$ であるから, $V\to V^{\vee\vee}; x\mapsto(f\mapsto f(x))$ は

$$\begin{array}{rcl} V & \longrightarrow & \mathrm{Hom}(\prod K,K) \\ e_\lambda & \longmapsto & p_\lambda \end{array}$$

なる写像に対応する。したがって線形性より $\theta : V \to V^{\vee\vee} \simeq \mathrm{Hom}(\prod K, K)$ は

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{\theta} & \mathrm{Hom}_K(\prod K, K) \\ \cup & & \cup \\ \sum a_\lambda e_\lambda & \longmapsto & \sum a_\lambda p_\lambda \end{array}$$

なる写像であることがわかる。$\#\Lambda = \infty$ ならこれが全射ではないことを言えばよい。すべての成分が 1 である元は $\bigoplus K$ には含まれないので, $\bigoplus K \subsetneq \prod K$ である。$W = \mathrm{Cok}(\bigoplus_\Lambda K \to \prod_\Lambda K)$ とするとき, W から K への全射 $q : W \to K$ が存在する。(例えば $0 \neq v \in W$ を適当に選ぶと, $K \to W; 1 \mapsto v$ なる単射ができるが, K は射影的 K 加群なので, $i : K \to W$ は直和因子だから $q : W \to K$ で $q \circ i = \mathrm{id}$ なる射がある。) この q と $\prod K \to W$ の合成を p とするとき, p は θ の像に含まれないことを示そう。実際もし $p = \sum a_\lambda p_\lambda$ と書けたとすると, p は全射なので, $a_\lambda \neq 0$ なる λ が存在するから, 自然な準同型 $\iota : \bigoplus K \to \prod K$ から誘導される

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Hom}(\prod K, K) & \longrightarrow & \mathrm{Hom}(\bigoplus K, K) \\ \sum a_\lambda p_\lambda & \longmapsto & \sum a_\lambda (p_\lambda \circ \iota) \end{array}$$

による像も 0 ではない。一方, $\bigoplus K \to \prod K \to W$ が 0 写像であることから,

$$\begin{array}{ccccc} \mathrm{Hom}(W, K) & \longrightarrow & \mathrm{Hom}(\prod K, K) & \longrightarrow & \mathrm{Hom}(\bigoplus K, K) \\ q & \longmapsto & p & \longmapsto & 0 \end{array}$$

なる合成は 0 写像だから矛盾。よって p は V の像には含まれない。

(3.7.7). (3.7.3) で, 特に B が A 上の環で, $L = B$ である場合を考える。この場合, $\mathrm{Hom}_B(B, N)$ は左 A 加群の構造を持つが, これは $\mathrm{Hom}_B(B, N) \simeq N$ なる同型により, N を $A \to B$ を通して左 A 加群とみなすことに相当するので, 次の射が得られる。

$$\begin{array}{ccc} M \otimes_A N & \longrightarrow & \mathrm{Hom}_B(\mathrm{Hom}_A(M, B), N) \\ x \otimes y & \longmapsto & (\varphi \mapsto y\varphi(x)) \end{array}$$

(3.7.4) より, M が有限生成射影 A 加群なら, この射は同型。

(3.7.8). A, B を環, M を左 B 加群, N を (B, A) 双加群, P を左 A 加群とすると, $\mathrm{Hom}_A(M, N)$ は右 A 加群, $N \otimes_A P$ は左 B 加群であり, 次のような自然な射がある。

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Hom}_B(M, N) \otimes_A P & \longrightarrow & \mathrm{Hom}_B(M, N \otimes_A P) \\ \varphi \otimes x & \longmapsto & (y \mapsto \varphi(y) \otimes x) \end{array}$$

(3.7.9) 命題. M が有限生成 (resp. 有限表示)B 加群, P が平坦 A 加群なら (3.7.8) の射は単射 (resp. 同型)。

(証明). M が有限生成自由 B 加群なら明らかに成立する。F_1, F_0 が自由加群となるような完全列 $F_1 \to F_0 \to M \to 0$ を取る。M が有限生成なら F_0 を階数有限に, M が有限表示なら F_0, F_1 を階数有限に取れる。このとき P が平坦であることから次の可換図式において水平な列はどちらも完全で, また最初の注意より M が有限生成なら真中の縦の射が同型であることから右の縦の射は単射になる。また M が有限表示なら, 真中と右側の縦の射が同型であるので, 5 項補題より左の射も同型。

$$\begin{array}{ccccccc} 0 \to & \mathrm{Hom}_B(M, N) \otimes_A P & \to & \mathrm{Hom}_B(F_0, N) \otimes_A P & \to & \mathrm{Hom}_B(F_1, N) \otimes_A P \\ & \downarrow & & \downarrow \wr & & \downarrow \wr \\ 0 \to & \mathrm{Hom}_B(M, N \otimes_A P) & \to & \mathrm{Hom}_B(F_0, N \otimes_A P) & \to & \mathrm{Hom}_B(F_1, N \otimes_A P). \end{array}$$

□

(3.7.10) 系. A を可換環, M, N を A 加群とする。M が有限表示, N が平坦であれば, 次は同型。

$$\mathrm{Hom}_A(M,A)\otimes_A N \simeq \mathrm{Hom}_A(M,N)$$

(証明). (3.7.9) で, N が A, P が N の場合を考えればよい。 □

(3.7.11) 命題. A を可換環, M, N を A 加群とする。B を A 上の環とする。下のいずれかの条件の下, 次の同型がある。

$$\mathrm{Hom}_A(M,N)\otimes_A B \simeq \mathrm{Hom}_B(M\otimes_A B, N\otimes_A B).$$

(1) M は有限表示 A 加群で, B は平坦 A 加群。
(2) M は有限生成射影的 A 加群。

(証明). (1) (2.8.9) および (3.7.9) より。あるいは (3.7.9) の証明と同様に証明することもできる。

(2) (2.8.9) および (3.7.8) より $\mathrm{Hom}_A(M,N)\otimes_A B \to \mathrm{Hom}(M\otimes_A B, N\otimes_A B)$ なる自然な射がある。M についての仮定から有限生成自由加群 F からの全射 $F\to M$ があるが, これは分裂するので, $0\to L\to F\to M\to 0$ なる分裂完全列ができ, 特に L も有限生成射影的。このとき次の可換図式を考える。

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \longrightarrow & \mathrm{Hom}_A(M,N)\otimes_A B & \longrightarrow & \mathrm{Hom}_A(F,N)\otimes_A B & \longrightarrow & \mathrm{Hom}_A(L,N)\otimes_A B & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow\wr & & \downarrow & & \\
0 & \to & \mathrm{Hom}_B(M\otimes_A B, N\otimes_A B) & \to & \mathrm{Hom}_B(F\otimes_A B, N\otimes_A B) & \to & \mathrm{Hom}_B(L\otimes_A B, N\otimes_A B) & \to & 0
\end{array}$$

中央の縦の射は明らかに同型なので, 左の縦の射は単射であり, また右の縦の射は全射である。横の列が分裂完全列であることから左の縦の射も全射であることがわかるので, 求む同型が得られる。 □

(3.7.12) 系. A を可換環, M, N を A 加群, $S\subset A$ を積閉集合とする。M が有限表示なら,

$$S^{-1}\mathrm{Hom}_A(M,N)\simeq \mathrm{Hom}_{S^{-1}A}(S^{-1}M, S^{-1}N).$$

(証明). (2.9.27) より $S^{-1}M\simeq S^{-1}A\otimes_A M$ であり, また (3.6.6) より $S^{-1}A$ は A 上平坦なので, (3.7.11) (1) より言える。 □

(3.7.13). 次に有限生成射影的加群の特徴付けについての定理を証明する。有限生成射影的加群はいくつかの点で重要なクラスである。まず, 様々な操作について閉じている。例えばテンソル積や準同型加群 (3.7.20), 特に双対, 外積 (5.4.22), また, ベクトル空間の理論の多くの部分が有限生成射影的加群について成立する。これは, 次の定理の (iv) の条件から有限生成射影的とは局所的には有限生成自由加群であるような加群であることによる。

(3.7.14) 定理. A 加群 M について次は同値。

(i) M は有限生成射影。
(ii) M は有限表示平坦。
(iii) 次の自然な射は同型: $\mathrm{Hom}_A(M,A)\otimes_A M\simeq \mathrm{Hom}_A(M,M)$; $\varphi\otimes x\mapsto (y\mapsto x\varphi(y))$.
(iv) $(f_\lambda;\lambda\in\Lambda)=A$ であるような A の元の族 $f_\lambda\in A$ $(\lambda\in\Lambda)$ で各 $M_{f_\lambda}=A_{f_\lambda}\otimes_A M$ が有限生成自由 A_{f_λ} 加群であるようなものが存在する。

なお, (iv) の族 Λ としては有限なものが取れる。

(証明). まず, (i), (ii), (iii) が互いに同値であることを示した後, (iv) がこれらと同値であることを示す。なお (iv) の条件の意味については (2.9.18) を参照のこと。

(i)⇒(ii). M が射影的なら (3.5.5) より M は平坦。また M は有限生成なので, 有限生成自由加群 A^n からの全射があるが, その核を K とすると, 射影性から $0 \longrightarrow K \longrightarrow A^n \longrightarrow M \longrightarrow 0$ は分裂する。特に A^n から K への全射があるので K も有限生成だから, M は有限表示。

(ii)⇒(iii). $L_1 \to L_0 \to M \to 0$ を M の有限表示とする。このとき次の可換図式ができるが, 右の 2 つの縦の射はどちらも同型なので, 左の射も同型になる。

$$\begin{array}{ccccccc}
0 \to & \mathrm{Hom}_A(M,A) \otimes_A M & \to & \mathrm{Hom}_A(L_0,A) \otimes_A M & \to & \mathrm{Hom}_A(L_1,A) \otimes_A M \\
& \downarrow & & \downarrow \wr & & \downarrow \wr \\
0 \longrightarrow & \mathrm{Hom}_A(M,M) & \longrightarrow & \mathrm{Hom}_A(L_0,M) & \longrightarrow & \mathrm{Hom}_A(L_1,M)
\end{array}$$

(iii)⇒(i). 仮定から, $\varphi_i \in \mathrm{Hom}_A(M,A)$, $x_i \in M$ $(i = 1, \ldots, n)$ で $\sum_{i=1}^n x_i\varphi_i = \mathrm{id}$ なるものが存在する。

$$\begin{array}{ccc}
\mathrm{Hom}_A(M,A) \otimes_A M & \longrightarrow & \mathrm{Hom}_A(M,M) \\
\sum_{i=1}^n \varphi_i \otimes x_i & \longmapsto & \mathrm{id}
\end{array}$$

このとき, $\mu : M \to A^n$, $\lambda : A^n \to M$ なる準同型を $\mu(x) = (\varphi_i(x))$, $\lambda(a_i) = \sum_{i=1}^n a_i x_i$ で定義すると, $\lambda \circ \mu(x) = \sum x_i\varphi_i(x) = x$ より $\lambda \circ \mu = \mathrm{id}$.

$$\begin{array}{ccccc}
M & \xrightarrow{\ \mu\ } & A^n & \xrightarrow{\ \lambda\ } & M \\
x & \longmapsto & (\varphi_i(x))_i & \longmapsto & \sum x_i\varphi_i(x)
\end{array}$$

したがって M は A^n の直和因子であるから射影的。また λ は全射であるから有限生成。$A^n \rightleftarrows M \longrightarrow 0$.

(iv)⇒(ii). $(f_\lambda; \lambda \in \Lambda) = A$ は $\sum a_\lambda f_\lambda = 1$ となるような $a_\lambda \in A$ が存在することと同値であるので, Λ は有限集合として構わない。よって $f_1, \ldots, f_r$ の場合に考えればよい。まず $\forall f_i$ に対し M_{f_i} が有限生成なら M も有限生成であることを示す。各 M_{f_i} の A_f 加群としての生成元で, $x_{ij}/1$ $(j = 1, \ldots, n_i)$, $x_{ij} \in M$ なるようなものが取れる。このとき $\forall x \in M$ に対し, $x/1 = \sum b_{ij}x_{ij}/1$ $(b_{ij} \in A)$ と書けることから $f_i^{m_i}(x - \sum_{j=1}^{n_i} b_{ij}x_{ij}) = 0$ なる m_i が存在する。(2.9.30) より $(f_1^{m_1}, \ldots, f_r^{m_r}) = A$ であるから, $1 = \sum a_i f_i^{m_i}$ なる $a_i \in A$ が存在する。すると

$$x = \Big(\sum a_i f_i^{m_i}\Big)x = \sum a_i(f_i^{m_i}x) = \sum_i a_i\Big(f_i^{m_i}\sum_j b_{ij}x_{ij}\Big)$$

より, x は x_{ij} の一次結合で書けることがわかる。よって M は有限生成。すると,

$$0 \longrightarrow L \longrightarrow A^n \longrightarrow M \longrightarrow 0$$

という完全列が存在する。各項の $\{f_i^n \mid n = 0, 1, 2, \ldots\}$ による局所化を取れば, (3.6.5) より

$$0 \longrightarrow L_{f_i} \longrightarrow A_{f_i}^n \longrightarrow M_{f_i} \longrightarrow 0$$

も完全。M_{f_i} が有限生成自由であることから特に射影的で, したがってこの完全系列は分裂するので各 L_{f_i} は有限生成。よって上と同様に L も有限生成。以上から M は有限表示であることがわかる。最後に平坦性を示

す。一般に A 加群の複体 $N^\bullet = N' \to N \to N''$ に対し, その中央のコホモロジー群を $\mathrm{H}(N^\bullet)$ と書くことにする。$N^\bullet$ が完全であるとするとき, $N^\bullet \otimes_A M$:

$$N' \otimes_A M \longrightarrow N \otimes_A M \longrightarrow N'' \otimes_A M \tag{3.7.14.1}$$

が完全であることを言えばよい。それには (3.6.7) より $(N^\bullet \otimes_A M)_{f_i} \simeq N^\bullet_{f_i} \otimes_{A_{f_i}} M_{f_i}$ が完全であることを言えばよい。これは M_{f_i} が自由加群であることから明らか。なお最後の同型は (2.9.28) 参照。

(ii)⇒(iv). A の任意の素イデアル $\mathcal{P}$ に対し $\mathcal{P}$ での局所化を $A_\mathcal{P}$ とする。(3.7.17) より $M_\mathcal{P} \simeq A_\mathcal{P} \otimes_A M$ は有限生成自由 $A_\mathcal{P}$ 加群。よって, ある有限生成自由 A 加群 L に対し, $\varphi : L_\mathcal{P} \simeq M_\mathcal{P}$ なる同型写像が存在する。その逆写像を ψ とする。L, M は仮定から有限表示で, $A_\mathcal{P}$ は A 上平坦なので, (3.7.11) より $\mathrm{Hom}_A(L, M) \otimes_A A_\mathcal{P} \simeq \mathrm{Hom}_{A_\mathcal{P}}(L_\mathcal{P}, M_\mathcal{P})$, $\mathrm{Hom}_A(M, L) \otimes_A A_\mathcal{P} \simeq \mathrm{Hom}_{A_\mathcal{P}}(M_\mathcal{P}, L_\mathcal{P})$ が言える。すると, 一般に A 加群 N に対し, $N_\mathcal{P} \simeq \varinjlim_{f \notin \mathcal{P}} N_f$ であることから, ある $f \in A$ で φ や ψ が $\varphi' : L_f \to M_f$ や $\psi' : M_f \to L_f$ から来るようなものが存在する。更に f を取り換えれば, $\varphi' \circ \psi'$ や $\psi' \circ \varphi'$ が恒等写像であるとしてよい。このような f に対し $L_f \simeq M_f$ となる。各 $\mathcal{P}$ について f を選べば条件を満たす f_λ の族が取れる。 □

(3.7.15) 定理 (中山の補題). A を可換環, M を有限生成 A 加群, $I \subset A$ をイデアルとする。$M = IM$ であれば, ある $a \in A$ で $aM = 0$ かつ $a - 1 \in I$ なるものが存在する。特に $I \subset \mathrm{rad}(A) := \bigcap_{m:\ 極大イデアル} m$ であれば, $M = 0$.

(証明). 証明は省略する。例えば [Mat86, 1,§2,Theorem 2.2] 参照。 □

(3.7.16) 系. A を可換環, M を A 加群, $I \subset A$ をイデアルで $I \subset \mathrm{rad}(A)$ を満たすものとする。このとき A 部分加群 $N \subset M$ で M/N が有限生成で, かつ $M = N + IM$ なるものが存在すれば, $M = N$.

(証明). 中山の補題を M/N に適用すればよい。 □

(3.7.17) 命題. A を局所環とするとき, 有限生成射影的 A 加群 M は有限生成自由 A 加群。

(証明). A の唯一の極大イデアルを m とし, $\kappa = A/m$ を剰余体とする。$M \otimes_A \kappa \simeq M/mM$ の基底の M への持ち上げを $x_1, \ldots, x_n$ とするとき, $e_1, \ldots, e_n$ を基底とする自由 A 加群を L とし, $L \to M$ を $e_i \mapsto x_i$ なるように定める。次の中山の補題の後の系 (3.7.16) から $x_1, \ldots, x_n$ は M の生成元である。実際, $N = \sum_i Ax_i \subset M$, $I = m$ の場合に系を適用すればよい。よって $L \to M$ は全射。その核を $\varphi : K \to L$ とするとき, (x_i) が $M \otimes_A \kappa$ の基底であることから $K \subset mL$. 一方 M は射影的なので, 完全列 $0 \to K \to L \to M \to 0$ は分裂し, $L \simeq K \oplus M$ となる。$\psi : L \to K$ を射影とすると, ψ は全射なので K は有限生成。また $y \in K$ に対し $\varphi(y) \in mL$ より $\varphi(y) = \sum a_i e_i$, $a_i \in m$ と書けるので, $y = \psi\varphi(y) = \psi(\sum a_i e_i) = \sum a_i(\psi(e_i)) \in mN$. よって $K = mK$. すると中山の補題より $K = 0$ であるから $L = M$ で, したがって M は有限生成自由 A 加群。 □

(3.7.18) 補足. 実際には, 有限性の仮定がなくとも, 任意の局所環 A 上の射影加群は自由加群であることが言える。例えば [Mat86, 1,§2,Theorem 2.5].

(3.7.19) 例. 有限生成自由加群なら射影的だが, 有限生成射影的であっても自由加群とは限らない。例としては次のようなものがある。$A = \mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$ とするとき, $I = (2, 1 + \sqrt{-5})$ は単項ではない。(3.7.14) の (iv) の条件の $(f_1, \ldots, f_r)$ として, $(2, 3)$ を取る。$(2, 3) = 1$ である。$A[1/2]$ では $1 \in I[1/2]$ より $I[1/2] = A[1/2]$ で

あり, また $A[1/3]$ では

$$2 = \frac{1-\sqrt{-5}}{3}(1+\sqrt{-5}) \in (1+\sqrt{-5})A[1/3]$$

より $I[1/3] = (1+\sqrt{-5})A[1/3] \simeq A[1/3]$. よって局所的には階数 1 の自由加群であるから (iv) の条件を満たすので, I は有限生成射影的 A 加群。しかし A 加群としては自由ではない。もう少し一般に, Dedekind 環における単項でないイデアルは, 局所的には階数 1 の自由加群なので有限生成射影加群であるが, 自由加群ではない。

(3.7.20) 系. A を可換環, M, N を有限生成射影的 A 加群とする。このとき,

(1) $\mathrm{Hom}_A(M,N)$ は有限生成射影的。
(2) $M \otimes_A N$ は有限生成射影的。

(証明). (1) (3.7.14) の (iv) の条件から有限生成自由加群の場合に帰着することで示せる。つまり, 上の条件から, M に対しある有限個の $f_1,\dots,f_r$ で $(f_1,\dots,f_r)=A$ かつ, 各 i に対し M_{f_i} が有限生成自由 A_{f_i} 加群であるようなものが存在する。N に対しても同様。また, f, g に対し A_{fg} は A_f と A_g の共通の局所化になることから, $f_1,\dots,f_r$ を M, N に対して共通に取ることができる。すると, (3.7.14) の (ii) の条件から M, N は有限表示だから (3.7.12) より

$$\mathrm{Hom}_A(M,N)_f \simeq \mathrm{Hom}_A(M,N)\otimes_A A_f \simeq \mathrm{Hom}_{A_f}(M\otimes_A A_f, N\otimes_A A_f) \simeq \mathrm{Hom}_{A_f}(M_f,N_f)$$

なので, $i=1,\dots,r$ に対し $\mathrm{Hom}_A(M,N)_{f_i}$ は有限生成自由 A_{f_i} 加群。よって (3.7.14) より $\mathrm{Hom}_A(M,N)$ は有限生成射影的。

(2) $f \in A$ に対し, (2.6.20) より

$$(M\otimes_A N)_f \simeq M\otimes_A N\otimes_A A_f \simeq (M\otimes_A A_f)\otimes_{A_f}(N\otimes_A A_f) \simeq M_f\otimes_{A_f} N_f.$$

だから, (1) と同様に有限生成自由加群の場合に帰着でき, その場合は (2.6.12) よりわかる。 □

(3.7.21) 定義. A が一般の可換環の場合を考える。M を有限生成射影 A 加群とすると, A の各素イデアル $\mathcal{P}$ に対し, $A_{\mathcal{P}}$ は局所環であるから, $M_{\mathcal{P}}$ は自由加群である (cf. (3.5.10)). よって, $\mathrm{rank}\, M_{\mathcal{P}}$ が決まる。このとき, $\mathcal{P}$ に対し $\mathrm{rank}\, M_{\mathcal{P}}$ を対応させる関数を**階数関数** (**rank function**) という。これは局所定数関数であることがわかる。この文章では, 階数関数が定数であるとき, M は**定数階数** (**constant rank**) を持つということにする。任意の有限生成自由加群は定数階数を持つ。また, A の被約化 A_{red} (A を巾零根基 $\mathrm{nil}(A)=\{a\in A \mid \exists n\in\mathbb{N},\ a^n=0\}$ で割った剰余環) が整域であれば, 任意の有限生成射影 A 加群は定数階数を持つ。

3.8 テンソル積の計算例

(3.8.1) 命題. $\varphi : A \to B$ を可換環の準同型, $I \subset A$ をイデアルとする。このとき,

$$A/I \otimes_A B \simeq B/IB.$$

ただし, IB は $\varphi(I)$ で生成される B のイデアルを表す。

(証明). A 加群の完全列 $0 \to I \to A \to A/I \to 0$ に B をテンソルすると, (3.3.8) より

$$I \otimes_A B \to A \otimes_A B \to A/I \otimes_A B \to 0$$

は完全。ここで, $I \otimes_A B$ の $A \otimes_A B \simeq B$ への像は IB であるので, $A/I \otimes_A B \simeq B/IB$. □

(3.8.2) 命題. A を可換環, I, $J \subset A$ をイデアルとすると,

$$A/I \otimes_A A/J \simeq A/(I+J).$$

(証明). (3.8.1) より左辺は $(A/J)/I(A/J)$ と同型だが, $J(A/I) = (J+I)/I$ より環の同型定理から $(A/J)/I(A/J) \simeq (A/J)/((I+J)/J) \simeq A/(I+J)$ なので, 題意の式を得る。 □

(3.8.3) 例. $m, n \in \mathbb{Z}$, d を m と n の最大公約数とする。このとき

$$\mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \simeq \mathbb{Z}/d\mathbb{Z}.$$

特に m, n が互いに素であれば, $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} = 0$ である。これは,

$$\mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \simeq (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})/m(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) \simeq (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})/d(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z}/d\mathbb{Z}.$$

のような計算からわかる。

(3.8.4) 例. $f \in \mathbb{Z}[X]$ を整数係数多項式とする。p を素数とし, $\mathbb{F}_p = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ を位数 p の有限体とすると,

$$\mathbb{Z}[X]/(f) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{F}_p \simeq \mathbb{Z}[X]/(f,p) \simeq \mathbb{F}_p[X]/(f).$$

ただし, f の $\mathbb{F}_p[X]$ における像も同じ f という記号で表している。

(3.8.5) 例. (2.9.27) の特別な場合として, 次の同型がある。

$$\mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q} \simeq \mathbb{Q}.$$

(3.8.6) 例. n を自然数とするとき,

$$\mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \simeq 0.$$

実際, $0 \to \mathbb{Z} \xrightarrow{n} \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \to 0$ に $\mathbb{Q}$ をテンソルすることで $\mathbb{Q} \xrightarrow{n} \mathbb{Q} \to \mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \to 0$ なる完全列を得るが, $\mathbb{Q}$ には n 倍は同型で作用するので, その余核は 0 で, したがって $\mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} = 0$ が分かる。

より一般には次が言える。

(3.8.7) 補題. (1) A を可換環, M を A 加群, B を A 代数, $I \subset B$ を B のイデアルとすると,

$$(B/I) \otimes_A M \simeq (B \otimes_A M)/I(B \otimes_A M).$$

(2) A を環, $S \subset A$ を積閉集合, $I \subset A$ をイデアルとする。もし $S \cap I \neq \varnothing$ なら

$$S^{-1}A \otimes_A (A/I) \simeq 0.$$

(証明). (1) $I \to B \to B/I \to 0$ に $\otimes_A M$ すれば, 次の列の完全性からわかる。

$$I \otimes_A M \to B \otimes_A M \to (B/I) \otimes_A M \to 0.$$

(2) は $I \to A \to A/I \to 0$ が完全列であることと, 局所化が完全であることから次の完全列が得られることに注意する。

$$S^{-1}I \to S^{-1}A \to S^{-1}A \otimes_A (A/I) \to 0$$

仮定より $S^{-1}I$ は $S^{-1}A$ の単位元を含むので, 主張が得られる。 □

4 補足

4.1 極限との関係

(4.1.1). 順系, 逆系については, ここでは説明しない。別に配る極限についての文章を参照。

(4.1.2) 命題. A を環, $((M_i)_{i\in I}, (\varphi_\alpha)_{\alpha\in E})$ を右 A 加群の順系, N を左 A 加群とする。このとき,

$$(\varinjlim M_i) \otimes_A N \simeq \varinjlim (M_i \otimes_A N).$$

(証明). 省略。 $\square$

(4.1.3). 一般には, テンソル積は逆極限とは交換可能ではないが, 次のようにある種有限性の仮定の下では可換になる場合がある。

(4.1.4) 命題. A を環, $((M_i)_{i\in I}, (\varphi_\alpha)_{\alpha\in E})$ を右 A 加群の逆系, N を左 A 加群とする。このとき, もし N が有限表示であれば

$$(\varprojlim M_i) \otimes_A N \simeq \varprojlim (M_i \otimes_A N).$$

(証明). 一般に, 任意の左 A 加群 N に対し

$$\begin{tikzcd} M_i \otimes_A N & & (\varprojlim M_i) \otimes_A N \arrow[ll, "\varphi_i\otimes\mathrm{id}"'] \arrow[dl, dotted] \\ & \varprojlim (M_i \otimes_A N) \arrow[ul, "\psi_i"] & \end{tikzcd}$$

により, 次の自然な射が定義される。

$$(\varprojlim M_i) \otimes_A N \to \varprojlim (M_i \otimes_A N)$$

もし N が有限表示であれば, $A^m \to A^n \to N \to 0$ なる完全列が存在するので,

$$\begin{tikzcd} (\varprojlim M_i) \otimes_A A^m \arrow[r] \arrow[d] & (\varprojlim M_i) \otimes_A A^n \arrow[r] \arrow[d] & (\varprojlim M_i) \otimes_A N \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\ \varprojlim (M_i \otimes_A A^m) \arrow[r] & \varprojlim (M_i \otimes_A A^n) \arrow[r] & \varprojlim (M_i \otimes_A N) \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

だが, 左の 2 列の縦の射は明らかに同型なので, 5 項補題より右の射も同型。 $\square$

(4.1.5) 定理. A を可換環とする。任意の A 加群は有限表示 A 加群の有向順極限。

(証明). 省略。 $\square$

(4.1.6) 定理. A を可換環とする。A 加群 M が有限表示であることは, $\mathrm{Hom}_A(M, -)$ が有向順極限と可換であることと同値。

(証明). 省略。 $\square$

5　対称積と外積

5.1　概要

(5.1.1). この節では, 特に断りがない限り A は可換環を表すものとする。ここでは, 加群の圏におけるベクトル空間の双対空間にあたる概念である双対加群を定義して, 特に有限生成射影加群の双対空間について, その性質を詳しく見る。その後, 対称積と外積代数を定義し, その性質を見る。特に外積代数は, 線形代数の行列式についての概念を抽象化, 一般化したものとみなすことができ, 様々な応用がある。この文章でも次の章でノルム写像を定義する際に使っている。

5.2　双対加群

(5.2.1) 定義. 逆に $N = A$ の場合, $\mathrm{Hom}_A(M, A)$ を M の**双対加群**と呼ぶ。これはしばしば M^* または $M^\vee$ などの記号で書かれる。この文章では, M^* と書く。特に $A = K$ が体の場合は, K ベクトル空間 V に対し $V^\vee = \mathrm{Hom}_K(V, K)$ を V の**双対空間**という。

(5.2.2) 命題. M が有限生成射影的なら M^* もそうである。

(証明). (3.7.20) より明らか。 □

(5.2.3) 補題. M, N を A 加群とする。M が有限表示で, N^* が平坦なら

$$M^* \otimes_A N^* \simeq (M \otimes_A N)^*$$

(証明). (3.7.10) および (2.8.11) より

$$M^* \otimes_A N^* \simeq \mathrm{Hom}_A(M, N^*) \simeq \mathrm{Hom}_A(M, \mathrm{Hom}_A(N, A)) \simeq \mathrm{Hom}_A(M \otimes_A N, A) = (M \otimes_A N)^*.$$

□

(5.2.4). A を可換環, M_1, M_2, N_1, N_2 を A 加群とする。$(f, g) \in \mathrm{Hom}_A(M_1, N_1) \times \mathrm{Hom}_A(M_2, N_2)$ に対し, $f \otimes g : M_1 \otimes_A M_2 \to N_1 \otimes_A N_2$ を対応させる写像は A 上多重線形なので,

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}_A(M_1, N_1) \times \mathrm{Hom}_A(M_2, N_2) \arrow[rr] \arrow[dr] & & \mathrm{Hom}_A(M_1 \otimes_A M_2, N_1 \otimes_A N_2) \\
& \mathrm{Hom}_A(M_1, N_1) \otimes_A \mathrm{Hom}_A(M_2, N_2) \arrow[ur, dotted] &
\end{tikzcd}$$

により自然な射 $\mathrm{Hom}_A(M_1, N_1) \otimes_A \mathrm{Hom}_A(M_2, N_2) \to \mathrm{Hom}_A(M_1 \otimes_A M_2, N_1 \otimes_A N_2)$ が存在する。

(5.2.5) 補題. A を可換環, M_1, M_2, N_1, N_2 を A 加群とする。M_1, M_2 が有限生成射影的で N_1, N_2 が平坦なら, (5.2.4) の自然な射は同型。

$$\mathrm{Hom}_A(M_1, N_1) \otimes_A \mathrm{Hom}_A(M_2, N_2) \simeq \mathrm{Hom}_A(M_1 \otimes_A M_2, N_1 \otimes_A N_2).$$

また N_1, N_2 も有限生成射影的なら, この A 加群自身も有限生成射影的。

(証明). (3.7.10) より M が有限表示で, N が平坦なら $\mathrm{Hom}_A(M,N) \simeq M^* \otimes_A N$. また, (3.7.20) より $M_1 \otimes_A M_2$ も有限生成射影的なので, (3.7.14) より $M_1 \otimes_A M_2$ は有限表示で, また (5.2.1) より M_2^* は平坦であるから, (5.2.5) より

$$\begin{aligned}
&\mathrm{Hom}_A(M_1,N_1) \otimes_A \mathrm{Hom}_A(M_2,N_2) \simeq M_1^* \otimes_A N_1 \otimes_A M_2^* \otimes_A N_2 \\
&\simeq M_1^* \otimes_A M_2^* \otimes_A N_1 \otimes_A N_2 \simeq (M_1 \otimes_A M_2)^* \otimes_A (N_1 \otimes_A N_2) \\
&\simeq \mathrm{Hom}_A(M_1 \otimes_A M_2, N_1 \otimes_A N_2).
\end{aligned}$$

(この写像が (5.2.4) の写像と一致することは単純な計算からわかる。) 最後の主張は (3.7.20) より明らか。 □

(5.2.6) 定理. A を可換環, M_i, N_i $(i = 1,\dots,n)$ を有限生成射影的な A 加群とすると, 次の自然な同型がある。

$$\bigotimes_{i=1}^n \mathrm{Hom}_A(M_i,N_i) \simeq \mathrm{Hom}_A\left(\bigotimes_{i=1}^n M_i,\ \bigotimes_{i=1}^n N_i\right)$$

(証明). (5.2.5) を使えば帰納的に示せる。 □

5.3 対称積

(5.3.1) 定義. M, N を A 加群とする。$f : \prod^r M \to N$ を M の r 個の直積から N への写像とする。$(x_i)_i \in \prod^r M$ で, i 成分が x_i であるような $\prod^r M$ の元を表す。f が A 上**多重線形** (**multilinear**) とは, 各成分について線形であること, つまり $0 \le i \le r$ に対し

$$\begin{aligned}
&f(x_1,\dots,x_{i-1},ax_i+by_i,x_{i+1},\dots,x_r) \\
&= af(x_1,\dots,x_{i-1},x_i,x_{i+1},\dots,x_r) + bf(x_1,\dots,x_{i-1},y_i,x_{i+1},\dots,x_r) \qquad (a,b \in A)
\end{aligned}$$

が成立すること。

(5.3.2) 定義. M, N を A 加群とする。多重線形な写像 $f : \prod^r M \to N$ が**対称的** (**symmetric**) とは, 任意の $x_1,\dots,x_r \in M$ および $0 \le i \ne j \le r$ に対し,

$$f(\dots,x_i,\dots,x_j,\dots) = f(\dots,x_j,\dots,x_i,\dots)$$

となること。また, f が**交代的** (**alternating**) とは, $x_1,\dots,x_r \in M$ に対し, もし $x_i = x_j$ かつ $i \ne j$ なる i,j の組があれば, $f(x_1,\dots,x_r) = 0$ となること。

(5.3.3) 定義. M を A 加群とする。M の A 上の r 個の**対称積** (**symmetric product**) とは, 対称的な多重線形写像の中で普遍的なものである。つまり, A 加群 $\mathrm{Sym}_A^r M$ と対称的な多重線形写像 $\varphi : \prod M^r \to \mathrm{Sym}_A^r M$ の組 $(\mathrm{Sym}_A M, \varphi)$ であって, 任意の対称的な多重線形写像 $f : \prod M^r \to N$ に対し, $f = g \circ \varphi$ となるような射 g が一意的に存在するもののこと。

$$\begin{tikzcd}
\prod^r M \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "\varphi"'] & & N \\
& \mathrm{Sym}_A^r M \arrow[ur, dotted, "\exists_1 g"'] &
\end{tikzcd}$$

A 上の対称積であることが明らかな時は, しばしば $\mathrm{Sym}^r M$ のように A を省略する。定義から $\mathrm{Sym}^1 M = M$ である。また便宜的に, $\mathrm{Sym}^0 M = A$ と定める。更に, $r < 0$ の時は $\mathrm{Sym}^r M = 0$ とする。

(5.3.4) 命題. M の A 上の r 個の対称積は強い意味で同型の違いを除いて一意的に存在する。

(証明). 一意性は明らかなので, 存在を示す。M の r 個のテンソル積 $\bigotimes^r M = M \otimes_A \cdots \otimes_A M$ において,

$$(\cdots \otimes \overset{i}{x} \otimes \cdots \otimes \overset{j}{y} \otimes \cdots) - (\cdots \otimes \overset{i}{y} \otimes \cdots \otimes \overset{j}{x} \otimes \cdots) \tag{5.3.4.1}$$

なる元で生成される部分 A 加群を R とし, $\operatorname{Sym}^r M = \bigotimes^r M/R$ とする。また, 自然な射 $\varphi_0 : \prod^r M \to \bigotimes^r M$ と $\varphi_1 : \bigotimes^r M \to \operatorname{Sym}^r M$ の合成写像を φ とする。$\varphi : \prod^r M \to \operatorname{Sym}^r M$ は明らかに対称的多重線形写像。また, $f : \prod^r M \to N$ が対称的多重線形写像であれば, テンソル積の普遍性から f は $\bigotimes^r M$ を経由し, 次の図式の左上を可換にする h が一意的に存在する。

$$\begin{tikzcd} \prod^r M \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\varphi_0"'] & N \\ \bigotimes^r M \arrow[r, "\varphi_1"'] \arrow[ur, dotted, "\exists_1 h"] & \operatorname{Sym}^r M \arrow[u, dotted, "\exists_1 g"'] \end{tikzcd}$$

更に対称性から, (5.3.4.1) の形の元の h による像はすべて 0 であるから $h(R) = 0$ であるので, h は $\operatorname{Sym}^r M$ を経由し, 上の図式の右下の部分を可換にする g が一意的に存在する。$\varphi = \varphi_1 \circ \varphi_0$ に注意すれば, $(\operatorname{Sym}^r M, \varphi)$ が対称積の普遍性を満たすことがわかる。 □

(5.3.5). 上の証明の構成で, $x_1 \otimes \cdots \otimes x_n \in \bigotimes^r M$ の $\operatorname{Sym}^r M$ における像を $x_1 \bullet \cdots \bullet x_n$ と書くことにする。S_r を r 次対称群とすると, 明らかに $\sigma \in S_r$ に対して $x_{\sigma(1)} \bullet \cdots \bullet x_{\sigma(n)} = x_1 \bullet \cdots \bullet x_n$ である。また, $x \in M$ に対し, $x \bullet \cdots \bullet x \in \operatorname{Sym}^n M$ を $x^{\bullet n}$ と書く。

(5.3.6). M を有限生成自由 A 加群とする。M の階数が n のとき, $\operatorname{Sym}^r M$ は階数

$$\binom{n+r-1}{n} = \frac{(n+r-1)!}{n!(r-1)!}$$

の自由加群。

(証明). $e_1, \ldots, e_n$ を基底とすると, 明らかに $\{e_1^{\bullet n_1} \bullet \cdots \bullet e_n^{\bullet n_r} \mid n_1 + \cdots + n_r = n,\ n_i \geq 0\}$ が $\operatorname{Sym}^r M$ の基底である。基底をなす元の個数は n 個のものを r 個の箱に入れる重複組み合わせであるから, $\binom{n+r-1}{n}$ 個。 □

(5.3.7). M を A 加群とする。

$$\begin{array}{ccc} \operatorname{Sym}^r M \times \operatorname{Sym}^s M & \longrightarrow & \operatorname{Sym}^{r+s} M \\ \cup & & \cup \\ (x_1 \bullet \ldots \bullet x_r, y_1 \bullet \ldots \bullet y_s) & \longmapsto & x_1 \bullet \ldots \bullet x_r \bullet y_1 \bullet \ldots \bullet y_s \end{array}$$

によって積を定義することができる。これは明らかに A 線形。

(5.3.8) 定義. 環 R が, $R = \bigoplus_{n=0}^{\infty} R_n$ なる部分加群 R_n への直和分解を持ち, $R_n R_m \subset R_{n+m}$ を満たすとき, R を**次数付環** (**graded ring**) という。

(5.3.9) 定義. M を A 加群とする。

$$\operatorname{Sym} M = \bigoplus_{r=0}^{\infty} \operatorname{Sym}^r M$$

に上のように積を定義したものは A 上の次数付環である。これを**対称代数** (**symmetric algebra**) という。

(5.3.10) 例. M が階数 $n < \infty$ の自由 A 加群であれば, $\operatorname{Sym} M$ は n 変数の多項式環 $A[X_1, \ldots, X_n]$ と同型。

5.4 外積

(5.4.1) 定義. M を A 加群とする。M の A 上の r 個の**外積** (**exterior product**) とは, 交代的な多重線形写像の中で普遍的なものである。つまり, A 加群 $\bigwedge_A^r M$ と交代的な多重線形写像 $\varphi : \prod_{i=1}^r M \to \bigwedge_A^r M$ の組 $(\bigwedge_A^r M, \varphi)$ であって, 任意の交代的な多重線形写像 $f : \prod M^r \to N$ に対し, $f = g \circ \varphi$ となるような射 g が一意的に存在するもののこと。

$$\begin{tikzcd} \prod^r M \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "\varphi"'] & & N \\ & \bigwedge_A^r M \arrow[ur, dotted, "\exists_1 g"'] & \end{tikzcd}$$

この場合, $\varphi(x_1, \ldots, x_r)$ を $x_1 \wedge \cdots \wedge x_r$ と書く。A 上の外積であることが明らかな時は, しばしば $\bigwedge^r M$ のように A を省略する。定義から $\bigwedge^1 M = M$ である。また便宜的に, $\bigwedge^0 M = A$ と定める。更に, $r < 0$ の時は $\bigwedge^r M = 0$ とする。

(5.4.2) 命題. M の A 上の r 個の外積は一意的に決まる同型の違いを除いて一意的に存在する。

(証明). 一意性は明らかなので, 存在を示す。M の r 個のテンソル積 $\bigotimes^r M = M \otimes_A \cdots \otimes_A M$ において,

(5.4.2.1) $$x_1 \otimes \cdots \otimes x_r \quad (x_i \in M,\ \ ある\ i \neq j\ に対し\ x_i = x_j)$$

なる元で生成される部分 A 加群を R とし, $\bigwedge^r M = \bigotimes^r M / R$ とする。また, 自然な射 $\varphi_0 : \prod^r M \to \bigotimes^r M$ と $\varphi_1 : \bigotimes^r M \to \bigwedge^r M$ の合成写像を φ とする。$\varphi : \prod^r M \to \bigwedge^r M$ は明らかに交代的多重線形写像。また, $f : \prod^r M \to N$ が交代的多重線形写像であれば, テンソル積の普遍性から f は $\bigotimes^r M$ を経由し, 次の図式の左上を可換にする h が一意的に存在する。

$$\begin{tikzcd} \prod^r M \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "\varphi_0"] \arrow[ddr, bend right, "\varphi"'] & & N \\ & \bigotimes^r M \arrow[ur, dotted, "\exists_1 h"'] \arrow[d, "\varphi_1"] & \\ & \bigwedge^r M \arrow[uur, dotted, bend right, "\exists_1 g"'] & \end{tikzcd}$$

更に交代性から, (5.4.2.1) の形の元の h による像はすべて 0 であるから $h(R) = 0$ であるので, h は $\bigwedge^r M$ を経由し, 上の図式の右下の部分を可換にする g が一意的に存在する。$\varphi = \varphi_1 \circ \varphi_0$ に注意すれば, $(\bigwedge^r M, \varphi)$ が外積の普遍性を満たすことがわかる。 □

(5.4.3). 上の構成からすぐに分かるように, $\bigwedge^r M$ の元は

$$x_1 \wedge \cdots \wedge x_r$$

の形の元の一次結合で表すことができる。普遍性から, 写像などの構成をこの形の元について定めることで行うことができる場合が多いので, 以下では特に断りなくそのような記述の仕方をする。

(5.4.4). $f : M \to N$ を A 加群の準同型とすると, $\prod^r M \to \bigwedge^r N$; $(x_i) \mapsto f(x_1) \wedge \cdots \wedge f(x_r)$ は交代的多重線形写像なので, 普遍性から $\wedge^r f : \bigwedge^r M \to \bigwedge^r N$ なる写像が誘導される。したがって $\bigwedge^r$ は A 加群の圏 A-Mod から A-Mod への関手を定めている。

(5.4.5) 命題. $\bigwedge^r M$ において

(1) $(\cdots \wedge x \wedge \cdots \wedge x \wedge \cdots) = 0$.
(2) $(\cdots \wedge x_i \wedge \cdots \wedge x_j \wedge \cdots) = -(\cdots \wedge x_j \wedge \cdots \wedge x_i \wedge \cdots)$.

(証明). (1) は定義から自明。(2) は, 例えば $M \wedge M$ においては

$$0 = (x+y) \wedge (x+y) = x \wedge x + x \wedge y + y \wedge x + y \wedge y = x \wedge y + y \wedge x$$

から $x \wedge y = -y \wedge x$ がわかる。一般の場合も i 番目と j 番目の成分について同じ考察を行えばよい。 □

(5.4.6) 系. r 次対称群 S_r の元 $\sigma \in S_r$ の符号を $\operatorname{sgn}(\sigma)$ と書くことにすると, $\bigwedge^r M$ において

$$x_{\sigma(1)} \wedge \cdots \wedge x_{\sigma(r)} = \operatorname{sgn}(\sigma) x_1 \wedge \cdots \wedge x_r.$$

(証明). (5.4.5) の (2) より明らか。 □

(5.4.7). 外積を用いることで行列式を定義できる。K を体, V を K 上 2 次元のベクトル空間とし, e_1, e_2 をその基底とする。$f \in \operatorname{End}_K(V)$ を V の線形変換とし, (e_1, e_2) についての表現行列を $A = (a_{ij})$, つまり $f(e_1) = a_{11}e_1 + a_{21}e_2$, $f(e_2) = a_{12}e_1 + a_{22}e_2$, とする。$V \times V \to V \wedge V$; $(x, y) \mapsto f(x) \wedge f(y)$ は明らかに多重線形でかつ交代的であるから $V \wedge V \to V \wedge V$; $x \wedge y \mapsto f(x) \wedge f(y)$ なる射が誘導される。$V \wedge V$ は 1 次元 K ベクトル空間で, 基底として $e_1 \wedge e_2$ が取れる。このとき

$$\begin{aligned} f(e_1) \wedge f(e_2) =& (a_{11}e_1 + a_{21}e_2) \wedge (a_{12}e_1 + a_{22}e_2) \\ =& a_{11}a_{12}e_1 \wedge e_1 + a_{11}a_{22}e_1 \wedge e_2 + a_{21}a_{12}e_2 \wedge e_1 + a_{21}a_{22}e_2 \wedge e_2 \\ =& (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})e_1 \wedge e_2 = \det A(e_1 \wedge e_2) \end{aligned}$$

である。これを一般化して次を得る。

(5.4.8) 定理. A を可換環, M を階数 n の自由 A 加群, $e_1, \ldots, e_n$ を M の基底とし, A 線形写像 $f : M \to M$ の $(e_1, \ldots, e_n)$ についての表現行列を $X = (x_{ij})$ とすると, 後で示すように (5.4.20), $\bigwedge^n M$ は $e_1 \wedge \cdots \wedge e_n$ を基底とする階数 1 の自由 A 加群である。このとき f から誘導される射 $\bigwedge^n M \to \bigwedge^n M$ は $\det X$ 倍写像。

(証明). (5.4.5) の (1) および (5.4.6) より

$$\begin{aligned} & f(e_1 \wedge \cdots \wedge e_n) = \Big(\sum_{i_1} x_{i_1 1} e_{i_1}\Big) \wedge \cdots \wedge \Big(\sum_{i_1} x_{i_1 1} e_{i_n}\Big) = \sum_{i_1, \ldots, i_n} x_{i_1 1} \cdots x_{i_n n} e_{i_1} \wedge \cdots \wedge e_{i_n} \\ =& \sum_{\sigma \in S_n} x_{\sigma(1)1} \cdots x_{\sigma(n)n} e_{\sigma(1)} \wedge \cdots \wedge e_{\sigma(n)} = \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) x_{\sigma(1)1} \cdots x_{\sigma(n)n} e_1 \wedge \cdots \wedge e_n \\ =& (\det X) e_1 \wedge \cdots \wedge e_n \end{aligned}$$

となることから主張が言える。 □

(5.4.9) 命題. A を可換環, M を A 加群, B を可換 A 代数とするとき,

$$(\textstyle\bigwedge_A^r M) \otimes_A B \simeq \bigwedge_B^r (M \otimes_A B).$$

(証明). 簡単のため $r = 2$ の時に説明するが, r が一般の場合も同様にできる。$\widetilde{f} : M \times M \times B \to \bigwedge_B^2 (M \otimes_A B)$ を $\widetilde{f}((x, y, b)) = (x \otimes 1) \wedge (y \otimes b)$ で定義する。$M \times M \times B$ を右の B への作用で B 加群とみなすと, $\widetilde{f}$ は A

上多重線形かつ B 線形で, $(x,x,1)$ の行き先は 0 である。よって外積とテンソル積の普遍性から, 次の図式を可換にする $f:(\bigwedge_A^2 M)\otimes_A B\to\bigwedge_B^2(M\otimes_A B)$ が一意的に存在する。

$$\begin{tikzcd} M\times M\times B \arrow[r, "\widetilde{f}"'] \arrow[d] & \bigwedge_B^2(M\otimes_A B) \\ M\otimes_A M\otimes_A B \arrow[r] \arrow[ur] & (\bigwedge_A^2 M)\otimes_A B \arrow[u, "f"'] \end{tikzcd}$$

逆に $\widetilde{g}:(M\otimes_A B)\times(M\otimes_A B)\to(\bigwedge_A^2 M)\times B$ を $\widetilde{g}((x\otimes b),(y\otimes c))=(x\wedge y)\otimes bc$ で定めると, 行き先が x,y について A 線形であることから $\widetilde{g}$ は well-defined で, また明らかに B 双線形であり, 更に $(x\otimes b,x\otimes b)$ の行き先 $x\wedge x\otimes b^2$ が 0 であることから交代的でもあるので, 次の図式を可換にする g が一意的に存在する。

$$\begin{tikzcd} (M\otimes_A B)\times(M\otimes_A B) \arrow[r, "\widetilde{g}"] \arrow[d] & (\bigwedge_A^2 M)\otimes_A B \\ (M\otimes_A B)\otimes_B(M\otimes_A B) \arrow[r] \arrow[ur] & \bigwedge_B^2(M\otimes_A B) \arrow[u, "g"'] \end{tikzcd}$$

ここで, $M\otimes_A M\otimes_A B\simeq(M\otimes_A B)\otimes_B(M\otimes_A B)$ に注意すれば, 普遍性から $f\circ g$ や $g\circ f$ は恒等写像であるので, 題意が言える。 $\square$

(5.4.10) 命題. M, N を A 加群とすると,

$$\bigwedge^r(M\oplus N)\simeq\bigoplus_{s+t=r}\Big((\bigwedge^s M)\otimes_A(\bigwedge^t N)\Big)$$

(証明). まず $r=2$ の場合に説明する。

$$(M\oplus N)\otimes(M\oplus N)\simeq(M\otimes M)\oplus(M\otimes N)\oplus(N\otimes M)\oplus(N\otimes N)$$

であるが, このとき左辺の $(x,y)\otimes(x,y)$ は右辺では $(x\otimes x,x\otimes y,y\otimes x,y\otimes y)$ に対応することから, 左辺において, $(x,y)\otimes(x,y)$ なる形の元で生成される部分 A 加群 R は, 右辺では

$$\begin{aligned} R_{2,0}&=\langle x\otimes x\,;\ x\in M\rangle\subset M\otimes M\\ R_{1,1}&=\langle (x\otimes y,y\otimes x)\,;\ x\in M,\ y\in N\rangle\subset(M\otimes N)\oplus(N\otimes M)\\ R_{0,2}&=\langle y\otimes y\,;\ y\in N\rangle\subset N\otimes N \end{aligned}$$

なる部分 A 加群の直和に対応している。$M\otimes M/R_{2,0}\simeq\bigwedge^2 M$, $((M\otimes N)\oplus(N\otimes M))/R_{1,1}\simeq M\otimes N$, $N\otimes N/R_{0,2}\simeq\bigwedge^2 N$ であることから

$$\bigwedge^2(M\oplus N)\simeq(\bigwedge^2 M)\oplus(M\otimes N)\oplus(\bigwedge^2 N)$$

がわかる。同様に $r=3$ の場合も

$$\begin{aligned}\bigotimes^3(M\oplus N)\simeq&\Big(\bigotimes^3 M\Big)\oplus\Big((M\otimes M\otimes N)\oplus(M\otimes N\otimes M)\oplus(N\otimes M\otimes M)\Big)\\ &\oplus\Big((M\otimes N\otimes N)\oplus(N\otimes M\otimes N)\oplus(N\otimes N\otimes M)\Big)\oplus\Big(\bigotimes^3 N\Big)\end{aligned}$$

のように分解した後, $(x,y)\otimes(x,y)\otimes(z,w)$, $(x,y)\otimes(z,w)\otimes(x,y)$, $(z,w)\otimes(x,y)\otimes(x,y)$ に対応する右辺の元を考え, そのような元で生成される A 部分群で割ることで

$$\bigwedge^3(M\oplus N)\simeq(\bigwedge^3 M)\oplus(\bigwedge^2 M\otimes N)\oplus(M\otimes\bigwedge^2 N)\oplus(\bigwedge^3 N)$$

なる同型が得られる。一般の r の場合も, $\bigotimes^r(M\oplus N)$ を M と N の合計 r 個のテンソル積の直和に分解した後, M, N をテンソルした数のそれぞれの合計が等しいもので分類し, r 個の中の 2 つの位置に注目して上と同様の考察を行うことで題意の式が得られる。 $\square$

(5.4.11) 系. $M_1,\dots,M_k$ を A 加群とすると,

$$\bigwedge^r\Big(\bigoplus_{i=1}^k M_i\Big)\simeq\bigoplus_{s_1+\cdots+s_k=r}\Big(\bigotimes_{i=1}^k(\bigwedge^{s_i}M_i)\Big)$$

(証明). (5.4.10) を繰り返し使えばよい。 $\square$

(5.4.12) 定義. M を A 加群とするとき,

$$\bigwedge M=\bigoplus_{r=0}^{\infty}\bigwedge^r M$$

と定めると, これは

$$\begin{array}{ccc}\bigwedge^i M\times\bigwedge^j M & \longrightarrow & \bigwedge^{i+j}M\\ \cup & & \cup\\ (x_1\wedge\cdots\wedge x_i,y_1\wedge\cdots\wedge y_j) & \longmapsto & x_1\wedge\cdots\wedge x_i\wedge y_1\wedge\cdots\wedge y_j\end{array}$$

から定まる積の演算を持ち, 次数付環とみなせる。これを M の**外積代数** (**exterior algebra**) と呼ぶ。例えば $\bigwedge^i M$ の元は $x_1\wedge\cdots\wedge x_i$ の形の元の一次結合で書けるので, 上から積が決まることに注意。$\alpha\in\bigwedge^i M$ に対し, $\deg\alpha=i$ と書く。

(5.4.13). 外積代数の言葉を使うと, (5.4.10), (5.4.11) は, 次のような次数付環の同型で表現できる。

$$\bigwedge(M\oplus N)\simeq(\bigwedge M)\otimes(\bigwedge N),$$
$$\bigwedge\Big(\bigoplus_{i=1}^k M_i\Big)\simeq\bigotimes_{i=1}^k(\bigwedge M_i).$$

(5.4.14) 命題. $\alpha\in\bigwedge^i M$, $\beta\in\bigwedge^j M$ に対し $\alpha\wedge\beta=(-1)^{ij}\beta\wedge\alpha$.

(証明). α や β が $x_1\wedge\cdots\wedge x_i$ や $y_1\wedge\cdots\wedge y_j$ の形の場合に帰着できる。その場合は明らか。 $\square$

(5.4.15). (5.2.1) のように, A 加群 M に対し, $M^*=\mathrm{Hom}_A(M,A)$ と書く。以下,

$$\mu:\bigwedge^r M^*\to\mathrm{Hom}_A(\bigwedge^m M,\bigwedge^{m-r}M)$$

なる射を定義していく。実際の定義は (5.4.17) を参照。まず $r=1$ の場合から考えよう。$\varphi\in M^*$ に対し, $\widetilde{\lambda}^r_\varphi:\prod^r M\to\bigwedge^{r-1}M$ を $\widetilde{\lambda}^r_\varphi(x_1,\dots,x_r)=\sum_{i=1}^r(-1)^{i-1}\varphi(x_i)x_1\wedge\cdots\wedge\widehat{x_i}\wedge\cdots\wedge x_r$ と定める。ただし $x_1\wedge\cdots\wedge\widehat{x_i}\wedge\cdots\wedge x_r$ は x_i の項を取り除いたものを意味する。これは明らかに多重線形で, また $i\neq j$ に対

し $x_i = x_j$ なら $(-1)^{i-1}\cdots\wedge\widehat{x_i}\wedge\cdots\wedge x_j\wedge\cdots$ と $(-1)^{j-1}\cdots\wedge x_i\wedge\cdots\wedge\widehat{x_j}\wedge\cdots$ が打ち消し合うので交代的でもあるから, $r\geq 0$ に対し

$$\lambda_\varphi^r : \bigwedge^r M \to \bigwedge^{r-1} M\,;\ x_1\wedge\cdots\wedge x_r \mapsto \sum_{i=1}^{r}(-1)^{i-1}\varphi(x_i)x_1\wedge\cdots\wedge\widehat{x_i}\wedge\cdots\wedge x_r$$

となるような射 λ_φ^r が誘導される。例えば

$$\begin{aligned}&\lambda_\varphi^2(x_1\wedge x_2) = \varphi(x_1)x_2 - \varphi(x_2)x_1\\&\lambda_\varphi^3(x_1\wedge x_2\wedge x_3) = \varphi(x_1)x_2\wedge x_3 - \varphi(x_2)x_1\wedge x_3 + \varphi(x_3)x_1\wedge x_2\end{aligned}$$

などとなる。以後, しばしば r を省略して λ_φ と書く。このとき, 次が成立することが簡単に確かめられる。

(1) $x\in M$ なら $\lambda_\varphi(x) = \varphi(x)$.
(2) $\alpha\in\bigwedge^i M,\ \beta\in\bigwedge^j M$ なら $\lambda_\varphi(\alpha\wedge\beta) = \lambda_\varphi(\alpha)\wedge\beta + (-1)^{\deg\alpha}\alpha\wedge\lambda_\varphi(\beta)$.

逆に, λ_φ はこの性質によって特徴付けられる。

(5.4.16) 補題. $\varphi,\psi\in M^*$ に対し

(1) $\lambda_\varphi\circ\lambda_\varphi = 0$.
(2) $\lambda_\psi\circ\lambda_\varphi = -\lambda_\varphi\circ\lambda_\psi$.

(証明). $x_1\wedge\cdots\wedge x_r$ に対し

$$\begin{aligned}&\lambda_\psi\circ\lambda_\varphi(x_1\wedge\cdots\wedge x_r) = \lambda_\psi\left(\sum_{i=1}^{r}(-1)^{i-1}\varphi(x_i)\cdots\wedge\widehat{x_i}\wedge\cdots\right)\\&=\sum_{i=1}^{r}(-1)^{i-1}\left(\sum_{j=1}^{i-1}(-1)^{j-1}\varphi(x_j)\varphi(x_i)\cdots\wedge\widehat{x_j}\wedge\cdots\wedge\widehat{x_i}\wedge\cdots\right.\\&\qquad\left.+\sum_{j=i+1}^{r}(-1)^{j-2}\psi(x_j)\varphi(x_i)\cdots\wedge\widehat{x_i}\wedge\cdots\wedge\widehat{x_j}\wedge\cdots\right)\\&=\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{i-1}(-1)^{i+j-2}\psi(x_j)\varphi(x_i)\cdots\wedge\widehat{x_j}\wedge\cdots\wedge\widehat{x_i}\wedge\cdots\\&\qquad+\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=i+1}^{r}(-1)^{i+j-1}\psi(x_j)\varphi(x_i)\cdots\wedge\widehat{x_i}\wedge\cdots\wedge\widehat{x_j}\wedge\cdots\end{aligned}$$

ここで, 1 番目の 2 重和を i と j を入れ換えてから変形すれば

$$\begin{aligned}&\sum_{j=1}^{r}\sum_{i=1}^{j-1}(-1)^{i+j-2}\psi(x_i)\varphi(x_j)\cdots\wedge\widehat{x_i}\wedge\cdots\wedge\widehat{x_j}\wedge\cdots\\&=\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=i+1}^{r}(-1)^{i+j-2}\psi(x_i)\varphi(x_j)\cdots\wedge\widehat{x_i}\wedge\cdots\wedge\widehat{x_j}\wedge\cdots\end{aligned}$$

なることに注意すると, 上の和は

$$\sum_{1\leq i<j\leq r}(-1)^{i+j-1}\big(\varphi(x_i)\psi(x_j) - \psi(x_i)\varphi(x_j)\big)\cdots\wedge\widehat{x_i}\wedge\cdots\wedge\widehat{x_j}\wedge\cdots$$

と一致する。このことから (1), (2) は明らか。 $\square$

(5.4.17). 自然数 $0 \leq r \leq m$ および A 加群 M に対し, $\widetilde{\mu} : \prod^r M^* \to \mathrm{Hom}_A(\bigwedge^m M, \bigwedge^{m-r} M)$ を $\widetilde{\mu}(\varphi_1, \dots, \varphi_r) = \lambda_{\varphi_r} \circ \cdots \circ \lambda_{\varphi_1}(x_1 \wedge \cdots \wedge x_m)$ と定めると, これは明らかに多重線形であり, また (5.4.16) より $i \neq j$ に対して $\varphi_i = \varphi_j$ であれば $\widetilde{\mu}(\varphi_1, \dots, \varphi_r) = 0$ であることから交代的でもある。よって $\widetilde{\mu}$ から

$$\mu : \bigwedge^r M^* \to \mathrm{Hom}_A(\bigwedge^m M, \bigwedge^{m-r} M)$$

なる μ が誘導される。

(5.4.18). 上の写像 μ を具体的に書いてみよう。まず記号を用意する。$X = \{a_1, \dots, a_n\}$ を $a_1 < \cdots < a_n$ のように順序付けられた n 個の元の集合とする。このとき, X の部分集合 $Y = \{a_{i_1}, \dots, a_{i_k}\}$ (ただし $a_{i_1} < \cdots < a_{i_k}$) に対し, その補集合を $\{a_{j_1}, \dots, a_{j_{n-k}}\}$ (ただし $a_{j_1} < \cdots < a_{j_{n-k}}$) とするとき, Y の元を左に寄せる置換の符号を $\epsilon(X, Y)$ と書く。すなわち

$$\epsilon(X, Y) = \mathrm{sgn}\begin{pmatrix} a_1 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & a_n \\ a_{i_1} & \cdots & a_{i_k} & a_{j_1} & \cdots & a_{j_{n-k}} \end{pmatrix}$$

と定める。すると, まず a_{i_1} を左隣と $i_1 - 1$ 回交換して左に寄せ, 次に a_{i_2} を同様に $i_2 - 2$ 回左隣りと交換して a_{i_1} の隣りに寄せ, という操作を続けていけば, 互換を $(i_1 - 1) + \dots (i_k - k)$ 回繰り返すことで上の置換が実現できることから, 符号は次の計算で求められることがわかる。

$$\epsilon(X, Y) = (-1)^{(i_1-1)+\dots(i_k-k)}.$$

明らかに $\epsilon(X, X) = \epsilon(X, \varnothing) = 1$ である。以下, X として自然数からなる集合に通常の順序を与えたものを考える。例えば $\epsilon(\{2,3\}, \{3\}) = \mathrm{sgn}\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} = -1$, $\epsilon(\{1,2,5\}, \{2,5\}) = \mathrm{sgn}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 2 & 5 & 1 \end{pmatrix} = 1$ などとなる。すると, S_r を r 次対称群として, μ が次のような写像であることが帰納的に確かめられる。

$$\begin{aligned}
&\mu(\varphi_1 \wedge \cdots \wedge \varphi_r)(x_1 \wedge \cdots \wedge x_m) \\
&= \sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_r \leq m} (-1)^{(i_1-1)+\cdots+(i_r-r)} \sum_{\sigma \in S_r} \mathrm{sgn}(\sigma) \prod_{j=1}^{r} \varphi_{\sigma(j)}(x_{i_j}) \cdots \wedge \widehat{x_{i_1}} \wedge \cdots \wedge \widehat{x_{i_j}} \wedge \cdots \wedge \widehat{x_{i_r}} \wedge \cdots \\
&= \sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_r \leq m} \epsilon(\{1, \dots, m\}, \{i_1, \dots, i_r\}) \det\bigl((\varphi_k(x_{i_j}))_{jk}\bigr) \cdots \wedge \widehat{x_{i_1}} \wedge \cdots \wedge \widehat{x_{i_j}} \wedge \cdots \wedge \widehat{x_{i_r}} \wedge \cdots .
\end{aligned}$$

これは, $[m] = \{1, \dots, m\}$ とし, $I = \{i_1, \dots, i_r\} \subset [m]$ $(i_1 < \cdots < i_r)$ に対し, $x_I = x_{i_1} \wedge \cdots \wedge x_{i_r}$, $\varphi_I = \varphi_{i_1} \wedge \cdots \wedge \varphi_{i_r}$ など書くことにすると, $I = \{1, \dots, m\}$, $J = \{1, \dots, r\}$ として

$$\mu(\varphi_J)(x_I) = \sum_{K \subset [m],\ \#K = r} \epsilon(I, K) \det((\varphi_k(x_j))_{j \in J, k \in K}) x_{I-K}$$

と書ける。ただし, $(\varphi_k(x_j))_{jk}$ は, $K = \{k_1, \dots, k_r\}$ $(k_1 < \cdots < k_r)$ とするとき (j, l) 成分が $\varphi_{k_l}(x_j)$ である行列を表す。例えば $r = 2$, $K = \{2, 3\}$ なら, 次のような行列である。

$$\begin{pmatrix} \varphi_2(x_1) & \varphi_3(x_1) \\ \varphi_2(x_2) & \varphi_3(x_2) \end{pmatrix}.$$

(5.4.19). 特に $m = r$ なら, μ は次の写像になる。

$$\begin{aligned}
\bigwedge^r M^* &\xrightarrow{\quad\mu\quad} \bigl(\bigwedge^r M\bigr)^* \\
\varphi_1 \wedge \cdots \wedge \varphi_r &\longmapsto \Bigl(x_1 \wedge \cdots \wedge x_r \mapsto \det\bigl(\varphi_j(x_i)\bigr)\Bigr)
\end{aligned}$$

(5.4.20) 命題. M を A 上階数 n の有限生成自由加群とすると, $\bigwedge^r M$ は階数 $\binom{n}{r}$ の有限生成自由 A 加群。

(証明). $e_1, \ldots, e_n$ を M の基底とするとき $\{e_{i_1} \wedge \cdots \wedge e_{i_r} \mid 1 \le i_1 < \cdots < i_r \le n\}$ が $\bigwedge^r M$ の基底となることを示そう。これらの元が生成元であることは明らか。1 次独立であることを示す。$e_1^*, \ldots, e_n^* \in M^*$ を $e_1, \ldots, e_n$ の双対基底とする。$I = \{i_1, \ldots, i_r\} \subset \{1, \ldots, n\}$ $(i_1 < \cdots < i_r)$ に対し $e_I = e_{i_1} \wedge \cdots \wedge e_{i_r}$, $e_I^* = e_{i_1}^* \wedge \cdots \wedge e_{i_r}^*$ と書くと, (5.4.19) より, $I, J \subset \{1, \ldots, n\}$ で $\#I = \#J = r$ なるものに対し

$$e_J^*(e_I) = \begin{cases} 1 & (I = J) \\ 0 & (I \ne J) \end{cases}$$

である。すると $0 = \sum a_I e_I \in \bigwedge^r M$ とするとき, 両辺に e_J^* を作用させれば $0 = a_J$ であることから 1 次独立が言える。 □

(5.4.21) 補足. なお, 上の命題は (5.4.11) を用いても証明できる。

(5.4.22) 命題. M が有限生成射影的 A 加群なら, $\bigwedge^r M$ もそうである。

(証明). これは, 局所的にみれば簡単にわかる。すなわち (3.7.14) より, ある $f_\lambda \in A$ $(\lambda \in \Lambda)$ で $M \otimes A_{f_\lambda}$ が有限生成自由加群で, かつ $(f_\lambda\,;\,\lambda \in \Lambda) = A$ であるようなものが存在する。しかるに一般に $f \in A$ に対し (5.4.9) より $(\bigwedge^r M) \otimes_A A_f \simeq \bigwedge^r M_f$ であり, (5.4.20) より有限生成自由加群の外積は有限生成自由加群であるから, 各 $(\bigwedge^r M) \otimes_A A_{f_\lambda}$ は有限生成自由 A_{f_λ} 加群。よって (3.7.14) より, $\bigwedge^r M$ は有限生成射影的。 □

(5.4.23) 命題. M が有限生成自由加群, n をその階数とする。$\mu : \bigwedge^r M^* \to \mathrm{Hom}_A(\bigwedge^m M, \bigwedge^{m-r} M)$ を上の写像とするとき,

(1) $0 \le r \le m \le n$ なら, μ は単射。
(2) $m = r$ または $n = m$ なら, μ は同型。

(証明). (1) $e_1, \ldots, e_n$ を M の基底, $e_1^*, \ldots, e_n^* \in M^*$ をその双対基底, すなわち $e_i^*(e_j) = \delta_{ij}$ なるものとする。(5.4.20) の証明と同様, $I \subset \{1, \ldots, n\}$ で要素の数 $\#I$ が s であるものに対し, その要素を小さい順に並べたものを $i_1 < \cdots < i_s$ $(i_j \in I)$ として, $e_I = e_{i_1} \wedge \cdots \wedge e_{i_s}$, $e_I^* = e_{i_1}^* \wedge \cdots \wedge e_{i_s}^*$ と定める。$[n] = \{1, \ldots, n\}$ と書くとき, (5.4.20) より

(1) $\bigwedge^r M^*$ の基底として $\{e_I^* \mid I \subset [n],\ \#I = r\}$,
(2) $\bigwedge^m M$ の基底として $\{e_I \mid I \subset [n],\ \#I = m\}$,
(3) $\bigwedge^{m-r} M$ の基底として $\{e_I \mid I \subset [n],\ \#I = m - r\}$

を取れる。$I, J \subset [n]$, $\#I = m$, $\#J = m - r$ に対し, $f_{IJ} : \bigwedge^m M \to \bigwedge^{m-r} M$ を

$$f_{IJ}(e_K) = \begin{cases} e_J & (K = I) \\ 0 & (K \ne I) \end{cases}$$

と定めると, f_{IJ} は $\mathrm{Hom}_A(\bigwedge^m M, \bigwedge^{m-r} M)$ の基底となる。一方, $I = \{i_1, \ldots, i_m\} \subset [n]$ の部分集合 $J \subset I$ 対し, (5.4.17) より $\#I = m$, $\#J = r$ なる $I, J \subset [n]$ に対し

$$\mu(e_J^*)(e_I) = \sum_{K \subset I,\ \#K = r} \epsilon(I, K) \det\big((e_j^*(e_k))_{k \in K,\ j \in J}\big) e_{I-K}.$$

$J \neq K$ なら $\det(e_j^*(e_k)) = 0$, $J = K$ なら $\det(e_j^*(e_k)) = 1$ なので, $\mu(e_J^*)(e_I) = \epsilon(I, J)e_{I-J}$ で, したがって

$$\mu(e_J^*) = \sum_{I \supset J,\ \#I=m} \epsilon(I, J) f_{I,I-J}. \tag{5.4.23.1}$$

よって

$$0 = \mu\Big(\sum_J a_J e_J^*\Big) = \sum_{\#J=r} \sum_{I \supset J,\ \#I=m} \epsilon(I, J) a_J f_{I,I-J} = \sum_{\#K=m-r} \sum_{I \supset K,\ \#I=m} \epsilon(I, I-K) a_{I-K} f_{I,K}$$

であれば, 任意の $\#J = r$ なる $J \subset [n]$ に対し $a_J = a_{I-K} = 0$ であるから $\operatorname{Ker}\mu = 0$ で, したがって μ は単射。

(2) $m = r$ であれば, (5.4.23.1) において, $I \supset J$ となるのは $I = J$ の時に限り, このとき $f_{J,\varnothing} = e_J$ であることから $\mu(e_J^*) = \epsilon(J, J)e_J = e_J$. よって μ は同型。また $m = n$ のときは, $\#I = n$ となるのは $I = [n]$ の場合に限るので, $\mu(e_J^*) = \epsilon([n], J) f_{[n],[n]-J}$. ここで $f_{[n],[n]-J}$ は, 階数 1 の A 加群 $\bigwedge^n M$ の基底 $e_1 \wedge \cdots \wedge e_n$ を $\pm e_{[n]-J}$ に写す写像なので, J が動くとき, これらは $\operatorname{Hom}_A(\bigwedge^n M, \bigwedge^{n-r} M)$ の基底だから, μ は同型。 □

(5.4.24) 命題. A を可換環, M を A 加群とする。M が有限生成射影的なら $\bigwedge^r M^* \simeq \big(\bigwedge^r M\big)^*$.

(証明). (5.4.9) で, 特に B が $S = \{f^n \mid n = 0, 1, 2, \ldots\}$ $(f \in A)$ に対する局所化 A_f の場合を考えると, $(\bigwedge_A^r M)_f \simeq \bigwedge_{A_f}^r M_f$ であるから, (3.7.14) および (3.6.8) により, 有限生成自由加群の場合に帰着できるが, このときは (5.4.23) より言える。 □

6 跡とノルム

6.1 概要

(6.1.1). この節でも, 特に断りがない限り A は可換環を表すものとする。

(6.1.2). 有限次元ベクトル空間の線形写像に対し跡 (トレース) や行列式の概念が定義されるが, これらの概念は可換環 A 上の有限生成射影加群の A 準同型に対しても自然に拡張される。また, 体の有限次ガロア拡大の理論における跡やノルムの概念も可換環の拡大で, 加群として有限生成射影的であるものに拡張される。ここでは, この一般化された跡やノルムの概念について説明する。

6.2 加群の跡

(6.2.1). A を環, M を有限生成射影的 A 加群とする。このとき, (3.7.14) より自然な射 $\operatorname{Hom}_A(M, A) \otimes_A M \to \operatorname{End}_A(M)$ は同型になるので, **評価写像** (**evaluation map**) $\mathrm{ev} : \operatorname{Hom}_A(M, A) \otimes_A M \to A; \varphi \otimes x \mapsto \varphi(x)$ との合成で $\operatorname{End}_A(M) \to A$ が定義される。

(6.2.2) 定義. 上の写像 $\operatorname{End}_A(M) \to A$ を $\operatorname{Tr}_{M/A}$, Tr_A ないしは Tr と書き, **跡写像** (**trace map**) という。また $f \in \operatorname{End}_A(M)$ に対し $\operatorname{Tr} f$ を f の**跡** (**trace**) という。

(6.2.3) 例. M が有限生成自由 A 加群であるとする。M の基底 (e_i) についての $f \in \operatorname{End}_A(M)$ の表現行列を $F = (a_{ij})$ とする。$M^* = \operatorname{Hom}_A(M, A)$ における (e_i) の双対基底を (e_i^*) とするとき $f(e_j) = \sum_i a_{ij} e_i$ よ

り, $\mathrm{End}_A(M) \simeq M^* \otimes_A M$ で f は $\sum_{i,j} a_{ij} e_j^* \otimes e_i$ に写るので, $\mathrm{Tr}\, f = \sum_{i,j} a_{ij} e_j^*(e_i) = \sum_{i,j} a_{ii}\delta_{ij} = \sum_i a_{ii}$ これは通常の跡と一致する。

(6.2.4) 補題. (1) $f, g \in \mathrm{End}_A(M)$ に対し, $\mathrm{Tr}(f \circ g) = \mathrm{Tr}(g \circ f)$.
(2) A' を A 上の可換環とするとき, $\mathrm{Tr}_{M/A} \otimes \mathrm{id}_{A'} = \mathrm{Tr}_{M \otimes_A A'/A'}$.

(証明). (1) $\mathrm{End}_A(M) \simeq M \otimes \mathrm{Hom}_A(M, A)$ によって f が $\sum_i x_i \otimes \varphi_i$ と, g が $\sum_j y_j \otimes \psi_j$ と同一視されるとき, 例えば $g \circ f$ は $\sum_{i,j} \psi_j(x_i) y_j \otimes \varphi_i$ と同一視される。したがってその跡を計算すると $\sum_{ij} \psi_j(x_i)\varphi_i(y_j)$ となる。$f \circ g$ の跡も同様に計算できるので, 両者は一致する。
(2) 定義の構成はどれも底変換について可換であることからわかる。すなわち, $M' = M \otimes_A A'$ と書くとき, 次の可換図式が得られ, (3.7.11) など縦の射は同型。このことから明らか。

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{End}_A(M) \otimes_A A' \arrow[r, "\sim"] \arrow[d, "\wr"'] & \mathrm{Hom}_A(M, A) \otimes_A M \otimes_A A' \arrow[r, "\mathrm{ev} \otimes \mathrm{id}"] \arrow[d, "\wr"] & A \otimes_A A' \arrow[d, "\wr"] \\
\mathrm{End}_{A'}(M') \arrow[r, "\sim"] & \mathrm{Hom}_{A'}(M', A') \otimes_{A'} M' \arrow[r, "\mathrm{ev}"] & A'
\end{tikzcd}$$

□

(6.2.5). A を整域とし, その商体を K とする。M が有限生成射影的のとき, $M \otimes_A K$ は K ベクトル空間である。このとき, $\dim_K(M \otimes_A K)$ を M の**階数** (**rank**) と呼び, $\mathrm{rank}_A M$ ないしは $\mathrm{rank}\, M$ と書く。M が有限生成自由加群であれば, これは (2.3.20) の意味での階数と一致する。$f \in \mathrm{End}_A(M)$ は $f \otimes \mathrm{id} \in \mathrm{End}_K(M \otimes_A K)$ を誘導するが, 上の補題より $\mathrm{Tr}\, f = \mathrm{Tr}\, f \otimes \mathrm{id}$ なので, 特に $f = \mathrm{id}$ の場合を考えれば $\mathrm{Tr}(\mathrm{id})$ は $\mathrm{rank}(M)$ の K における像と一致する。特に自然な射 $\mathbb{Z} \to A$ が単射の場合は $\mathbb{Z}$ を部分環とみなすと

$$\mathrm{Tr}(\mathrm{id}) = \mathrm{rank}(M).$$

(6.2.6) 命題. M, N を有限生成射影的 A 加群とする。$f \in \mathrm{End}_A(M)$, $g \in \mathrm{End}_A(N)$ に対し,

$$\mathrm{Tr}(f \otimes g) = \mathrm{Tr}(f)\,\mathrm{Tr}(g).$$

(証明). (5.2.6) より次の図式が可換になる。このことから明らか。

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{End}_A(M) \otimes_A \mathrm{End}_A(N) \arrow[r] \arrow[d, "\wr"] & (M^* \otimes_A M) \otimes_A (N^* \otimes_A N) \arrow[r, "\mathrm{ev} \otimes \mathrm{ev}"] \arrow[d, "\wr"] & A \otimes_A A \arrow[d] \\
\mathrm{End}_A(M \otimes_A N) \arrow[r] & (M \otimes_A N)^* \otimes_A (M \otimes_A N) \arrow[r, "\mathrm{ev}"'] & A
\end{tikzcd}$$

□

(6.2.7) 命題. M を定数階数が 1 である有限生成射影加群とすると, 評価写像 $\mathrm{ev}: M^* \otimes_A M \to A$ は同型。

(証明). (3.7.14) より $f_1, \ldots, f_k \in A$ で M_{f_i} が有限生成自由 A_{f_i} 加群であるものが存在するので, (2.9.34) より自由加群の場合に帰着できるが, その場合は明らか。 □

6.3 環の拡大の跡

(6.3.1) 定義. B を (可換とは限らない) A 代数で, A 加群として有限生成射影的なものとする。このとき, $\lambda: B \to \mathrm{End}_A(B); x \mapsto (\lambda_x : y \mapsto xy)$ と $\mathrm{Tr}: \mathrm{End}_A(B) \to A$ との合成もまた**跡**という。この文章ではこれ

を $\mathrm{tr}_{B/A}: B \to A$ ないしは単に tr と書くことにする。

(6.3.2) 補題. (1) $\mathrm{tr}(xy) = \mathrm{tr}(yx)$.

(2) A' を A 上の環とするとき, $\mathrm{tr}_{B/A} \otimes \mathrm{id}_{A'} = \mathrm{tr}_{B \otimes_A A'/A'}$.

(証明). (1) (6.2.4) (1) と, $x, y \in B$ に対し (6.3.1) の記号で $\lambda_{xy} = \lambda_x \circ \lambda_y$ であることから言える。

(2) (3.7.11) より $\mathrm{End}_A(B) \otimes_A A' \simeq \mathrm{End}_{A'}(B \otimes_A A')$ であることに注意すると, (6.2.4) (2) と, 次の図式の可換性から言える。

$$\begin{tikzcd} B \otimes_A A' \arrow[r] \arrow[dr] & \mathrm{End}_A(B) \otimes_A A' \arrow[d] \\ & \mathrm{End}_{A'}(B \otimes_A A') \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} x \otimes y \arrow[r, mapsto] \arrow[dr, mapsto] & \lambda_x \otimes y \arrow[d, mapsto] \\ & \lambda_x \otimes \lambda_y = \lambda_{x \otimes y} \end{tikzcd}$$

□

(6.3.3) 補題. 特に B が可換環で, A 上有限エタールであるとする。A の十分大きな有限エタールガロア拡大 $\overline{A}$ を取れば, $S := \mathrm{Hom}_A(B, \overline{A})$ として, $\#S = \deg_A(B) = n$ とできる。$S = \{\sigma_1, \ldots, \sigma_n\}$ とする。このとき $x \in B$ に対し

$$\mathrm{tr}(x) = \sum_i \sigma_i(x).$$

なお, この文章ではエタール射の定義は書かないが, A が体である場合は B が A 上有限エタールであることは, B が A の有限次分離拡大の直積であることと同値であることを注意しておく。

(証明). $\overline{B} = B \otimes_A \overline{A}$ とする。(6.3.2) より底変換して $\overline{B}/\overline{A}$ に対して証明すれば十分である。このとき, $\mathrm{Hom}_A(B, \overline{A}) \simeq \mathrm{Hom}_{\overline{A}}(B \otimes_A \overline{A}, \overline{A})$ によって $\sigma_i : B \to \overline{A}$ に対する $\sigma_i \otimes \mathrm{id} : B \otimes \overline{A} \to \overline{A} \otimes \overline{A}$ を $B \otimes \overline{A} \to \overline{A}$ とみなせる。したがって, $B = \prod_i A$, $\overline{A} = A$ の場合に帰着できる。この場合は次の (6.3.4) から明らか。 □

(6.3.4) 補題. B_i, $(i = 1, \ldots, k)$ を A 加群として有限生成射影的な A 上の環とし, $B = \prod B_i = B_1 \times \cdots \times B_k$ とおく。このとき,

$$\mathrm{tr}_{B/A} = \sum_i \mathrm{tr}_{B_i/A}.$$

(証明). $B = \prod B_i$ を A 加群とみなすと直和ともみなせる。このとき $s_i : B_i \to \prod B_i$, $p_i : \prod B_i \to B_i$ を, i 成分の埋め込み写像および i 成分への射影とする。すると, A 加群 M に対し $M^* = \mathrm{Hom}_A(M, A)$ と書くとき

$$\begin{array}{ccc} \prod_{i,j} \mathrm{Hom}_A(B_j, B_i) & \xrightarrow{\sim} & \mathrm{Hom}_A(B, B) = \mathrm{End}_A(B) \\ \cup & & \cup \\ (\psi_{ij}) & \longmapsto & \sum_{i,j} s_i \circ \psi_{ij} \circ p_j \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} \prod_{i,j} B_j^* \otimes_A B_i & \xrightarrow{\sim} & B^* \otimes_A B \\ \cup & & \cup \\ \varphi_{ij} \otimes b_{ij} & \longmapsto & \sum_{i,j} \varphi_{ij} \circ p_j \otimes s_i(b_{ij}) \end{array}$$

なる同型がある。したがって, $\mathrm{ev}_i : B_i^* \otimes_A B_i$ を B_i の評価写像として $\sum_i \mathrm{ev}_i : \prod_{i,j} B_j^* \otimes_A B_i \to A$ なる写像を $(\varphi_{ij} \otimes b_{ij})_{ij}$ を $\sum_i \mathrm{ev}(\varphi_{ij} \otimes b_{ij}) = \sum_i \varphi_{ii}(b_{ii})$ に写すものとすると, $p_j \circ s_i = \begin{cases} \mathrm{id}_{B_i} & (i = j) \\ 0 & (i \neq j) \end{cases}$ に注意すれば

$$\mathrm{ev}\Big(\sum_{i,j} \varphi_{ij} \circ p_j \otimes s_i(b_{ij})\Big) = \sum_{i,j} \varphi_{ij} p_j(s_i(b_{ij})) = \sum_i \varphi_{ii}(b_{ii}) = \sum_i \mathrm{ev}_i\big((\varphi_{ij} \otimes b_{ij})_{ij}\big)$$

なる計算から, 下の図式が可換であることがわかる。

$$\begin{array}{ccccccc}
\prod_i B_i & \longrightarrow & \prod_{i,j} \mathrm{Hom}_A(B_j, B_i) & \xrightarrow{\sim} & \prod_{i,j} B_j^* \otimes_A B_i & \xrightarrow{\sum_i \mathrm{ev}_i} & A \\
\| & & \downarrow & & \downarrow & & \| \\
B & \longrightarrow & \mathrm{Hom}_A(B, B) & \xrightarrow{\sim} & B^* \otimes_A B & \xrightarrow{\mathrm{ev}} & A
\end{array}$$

これは, 題意の式が成立することを意味する。 □

(6.3.5) 補題. K を体とする。L が K 有限次拡大体のとき,

$$L/K \text{ が分離拡大 } \Rightarrow \mathrm{Tr}_{L/K} : L \to K \text{ は全射。}$$

(証明). $\overline{K}$ を K の代数閉包として, $S = \mathrm{Hom}_K^{\mathrm{alg}}(L, \overline{K})$ と置くと, 仮定より S は $\mathrm{Hom}_K(L, \overline{K})$ の基底で, かつ $\mathrm{Tr}(y) = \sum_{\sigma \in S} \sigma(y)$. よって, $a = \mathrm{Tr}(b) \neq 0$ なる $b \in L$ が存在する。すると $\forall x \in K$ に対し $\mathrm{Tr}(xb/a) = xa/a = x$ となって, 全射であることがわかる。 □

(6.3.6) 例. K を体, L を有限次分離拡大とすると, $L \simeq K[X]/(f(X))$ と書ける。X の L における像を α とする。また

$$\begin{aligned}
&f(X) = a_0 + a_1 X + \cdots + X^n \in K[X] \\
&f(X)/(X - \alpha) = b_0 + b_1 X + \cdots + b_{n-1} X^{n-1} \in L[X] \quad (b_{n-1} = 1)
\end{aligned}$$

とするとき,

$$\mathrm{tr}\left(\alpha^i \frac{b_j}{f'(\alpha)}\right) = \delta_{ij}.$$

(証明). まず, α の K の代数閉包 $\overline{K}$ における共役を $\alpha_1 (= \alpha), \ldots, \alpha_n$ とすれば, $0 \leq i \leq n-1$ に対し

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{f(X)}{X - \alpha_k} \frac{\alpha_k^i}{f'(\alpha_k)} = X^i$$

が成立することに注意する。実際, 両辺の差は $n-1$ 次以下の式だが, $X = \alpha$ を代入すると 0 になるので, 多項式としても 0 である。主張はこの式より自明である。 □

したがって, $x \otimes y \mapsto \mathrm{tr}_{L/K}(xy)$ による $1, \alpha, \ldots, \alpha^{n-1}$ の双対基底は $b_i/f'(\alpha)$ であることがわかる。

6.4 行列式

(6.4.1). M を有限生成射影的 A 加群とする。自然数 k に対し

$$\mathrm{End}_A(M) \to \mathrm{Hom}_A\left(\bigwedge^k M, \bigwedge^k M\right) \simeq \mathrm{Hom}_A\left(\bigwedge^k M, A\right) \otimes \bigwedge^k M \to A$$

が定義できる。$k = 1$ ならこれは跡である。

(6.4.2). (5.4.19) より, $\mathrm{Hom}_A\left(\bigwedge^k M, A\right) \simeq \bigwedge^k \mathrm{Hom}_A(M, A)$ なる同型は右辺の $(\varphi_1 \wedge \cdots \wedge \varphi_k)$ に左辺の $(y_1 \wedge \cdots \wedge y_k) \mapsto \det((\varphi_j(y_i))_{ij})$ を対応させる射だから, (6.4.1) の中央の同型は

$$\begin{array}{ccc}
\mathrm{Hom}_A(\bigwedge^k M, A) \otimes \bigwedge^k M & \longrightarrow & \mathrm{Hom}_A(\bigwedge^k M, \bigwedge^k M) \\
\cup & & \cup \\
(\varphi_1 \wedge \cdots \wedge \varphi_k) \otimes (x_1 \wedge \cdots \wedge x_k) & \longmapsto & (y_1 \wedge \cdots \wedge y_k) \mapsto \det((\varphi_j(y_i))_{ij})(x_1 \wedge \cdots \wedge x_k)
\end{array}$$

なる射である。

(6.4.3). M を定数階数 r を持つ有限生成射影的 A 加群とするとき, これは局所的には階数 r の自由加群である。つまり, (3.7.14) より $f_1, \ldots, f_k \in A$ で M_{f_i} が有限生成自由 A_{f_i} 加群であるものが存在するが, この時, M_{f_i} の階数はすべて r である。すると, $(\bigwedge^r M)_{f_i} \simeq \bigwedge^r M_{f_i}$ は階数 1 であるから, $\bigwedge^r M$ は階数 1 の有限生成射影 A 加群。よって (6.2.7) より $\mathrm{ev} : \bigwedge^r M^* \otimes \bigwedge^r M \to A$ なる写像は同型写像である。以上を踏まえて次のように定義する。

(6.4.4) 定義. M を定数階数 r を持つ有限生成射影的 A 加群とする (cf. (3.7.21)). $k = r$ のときの (6.4.1) のの射 $\mathrm{End}_A(M) \to \mathrm{End}_A(\bigwedge^r M) \to A$ を $\det_{M/A}$, $\det_A$ ないしは $\det$ と書く。$\det_A$ による $f \in \mathrm{End}_A(M)$ の像 $\det f$ を f の**行列式 (determinant)** という。これは M が自由 A 加群の場合は通常の行列式と同じになる (cf. (5.4.7)).

(6.4.5) 命題. M を定数階数 m を持つ有限生成射影的 A 加群とする。$f, g \in \mathrm{End}_A(M)$ とするとき,

$$\det(g \circ f) = (\det g)(\det f).$$

(証明). (5.4.4) より $\bigwedge^m$ は関手的であるから, $\bigwedge^m M$ の変換として, $(\wedge^m g) \circ (\wedge^m f) = \wedge^m (g \circ f)$ である。一方, (6.4.2) より $\wedge^m f = (\det f)\,\mathrm{id}$, $\wedge^m g = (\det g)\,\mathrm{id}$, $\wedge^m (g \circ f) = (\det g \circ f)\,\mathrm{id}$ であるから, 左辺は $(\det g)(\det f)\,\mathrm{id}$, 右辺は $\det(g \circ f)\,\mathrm{id}$ と一致する。これらの $\mathrm{End}_A(\bigwedge^m M) \to \bigwedge^m M^* \otimes \bigwedge^m M \xrightarrow{\mathrm{ev}} A$ の像を取れば結論が言える。 $\square$

(6.4.6) 補題. M を定数階数 m を持つ有限生成射影的 A 加群, A' を A 上の可換環とするとき,

$$\det_{M/A} \otimes \mathrm{id}_{A'} = \det_{M \otimes_A A'/A'} .$$

(証明). 定義の構成はどれも底変換について可換であることからわかる。すなわち, $M' = M \otimes_A A'$ と書くとき, $\bigwedge^m M$ も有限生成射影的であることから, 次の図式は可換になる。また (5.4.9), (3.7.11) などから縦の射は同型である。よって主張が言える。

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{End}_A(M) \otimes_A A' \arrow[r] \arrow[d, "\wr"] & \mathrm{End}_A(\bigwedge^m_A M) \otimes_A A' \arrow[r, "\sim"] \arrow[d, "\wr"] & \bigwedge^m_A M^* \otimes_A \bigwedge^m M \otimes_A A' \arrow[r, "\mathrm{ev}\otimes\mathrm{id}"] \arrow[d, "\wr"] & A \otimes_A A' \arrow[d, "\wr"] \\
\mathrm{End}_{A'}(M') \arrow[r, dash] & \mathrm{End}_{A'}(\bigwedge^m_{A'} M') \arrow[r, "\sim"] & \bigwedge^m M'^* \otimes_{A'} \bigwedge^m M' \arrow[r, "\mathrm{ev}"] & A'
\end{tikzcd}$$

$\square$

(6.4.7) 命題. M, N を定数階数を持つ有限生成射影的 A 加群, $\mathrm{rank}(M) = m$, $\mathrm{rank}(N) = n$ とするとき, $f \in \mathrm{End}_A(M)$, $g \in \mathrm{End}_A(N)$ に対し,

$$\det(f \otimes g) = (\det f)^n (\det g)^m.$$

(証明). $f \otimes g = (f \otimes \mathrm{id}) \circ (\mathrm{id} \otimes g)$ であるので, (6.4.5) より $g = \mathrm{id}$ の場合に示せば十分である。(3.7.14) より $s_1, \ldots, s_k \in A$ で N_{s_i} が有限生成自由 A_{s_i} 加群であるものが存在する。$\det(f \otimes \mathrm{id})\,\mathrm{id}$ と $(\det f)^n\,\mathrm{id}$ を $\mathrm{End}_A(\bigwedge^{mn}(M \otimes_A N))$ の元とみなすとき, これらが N_{s_i} 上で一致すれば, (2.9.34) より M 上でも一致する。よって N が有限生成自由 A 加群の場合に帰着できるので, $N = A^n$ として構わない。この場合, $M \otimes_A N \simeq \bigoplus^n M$ なので, $s_i > m$ なら $\bigwedge^{s_i} M = 0$ となることに注意すれば, (5.4.11) より

$$\bigwedge^{mn}(M \otimes_A N) \simeq \bigwedge^{mn}\Big(\bigoplus_{i=1}^{n} M\Big) \simeq \bigoplus_{s_1+\cdots+s_n = mn} \Big(\bigotimes_{i=1}^{n} \bigwedge^{s_i} M\Big) \simeq \bigotimes_{i=1}^{n} \bigwedge^m M$$

である。左辺における $\wedge^{mn}(f\otimes \mathrm{id})$ なる変換は, $\det(f\otimes\mathrm{id})$ 倍写像であるが, 右辺においては $(\wedge^m f)\otimes\cdots\otimes(\wedge^m f)$ なる変換に対応する。$\wedge^m f$ は $\det f$ 倍写像であるから, $(\det f)^n$ 倍写像であることがわかる。よって $\det(f\otimes\mathrm{id})=(\det f)^n$ である。 □

6.5 ノルム写像

(6.5.1) 定義. A 上の (可換とは限らない) 環 B が A 加群として有限生成射影的かつ定数階数を持つとき, $\lambda: B\to \mathrm{End}_A(B); x\mapsto(\lambda_x: y\mapsto xy)$ と $\det:\mathrm{End}_A(B)\to A$ との合成を**ノルム写像** (**norm map**) といい, $\mathrm{Nr}_{B/A}: B\to A$ と書く。

(6.5.2) 補題. 特に B が可換環で, A 上有限エタールであるとする。A の十分大きな有限エタールガロア拡大 $\overline{A}$ を取れば, $S:=\mathrm{Hom}_A(B,\overline{A})$ として, $\#S=\deg_A(B)=n$ とできる。$S=\{\sigma_1,\ldots,\sigma_n\}$ とする。このとき $x\in B$ に対し

$$\mathrm{Nr}(x)=\prod_i \sigma_i(x).$$

(証明). 跡の場合 (6.3.3) と同様。 □

(6.5.3) 補題. A を可換環, B_i を A 加群として有限生成射影的かつ定数階数を持つような A 上の環とし, $B=B_1\times\cdots\times B_k$ とする。このとき,

$$\mathrm{Nr}_{B/A}=\prod_i \mathrm{Nr}_{B_i/A}.$$

(証明). $\mathrm{rank}_A B_i=r_i$, $r=\sum r_i=\mathrm{rank}_A B$ とする。A 加群としては, $B\simeq\bigoplus_{i=1}^k B_k$ であり, $\sum s_i=r$ かつ $s_i\le r_i$ なる s_i の組は $s_i=r_i$ なるものしかないので, (5.4.11) より

$$\bigwedge^r B\simeq\bigoplus_{s_1+\cdots+s_k=r}\bigotimes_{i=1}^k\bigwedge^{s_i}B_i\simeq\bigotimes_{i=1}^k\bigwedge^{r_i}B_i$$

であることがわかる。(有限生成射影的加群 M についても, $\mathrm{rank}\,M=n$ のとき, 局所化して自由加群の場合に帰着させることで, $r>n$ なら $\bigwedge^r M=0$ であることがわかる。) (5.4.22) より一般に A 加群 M が射影的なら $\bigwedge^i M$ も射影的であり, $(\bigwedge^r M)^*\simeq\bigwedge^r M^*$ なる自然な同型があるので

$$\begin{array}{ccc}
(\bigotimes_{j=1}^k\bigwedge^{r_j}B_j^*)\otimes(\bigotimes_{i=1}^k\bigwedge^{r_i}B_i) & \longrightarrow & \mathrm{Hom}_A\left(\bigotimes_{j=1}^k\bigwedge^{r_j}B_j,\bigotimes_{i=1}^k\bigwedge^{r_i}B_i\right)\\
\downarrow & & \downarrow\\
(\bigwedge^r B^*)\otimes_A(\bigwedge^r B) & \longrightarrow & \mathrm{Hom}_A(\bigwedge^r B,\bigwedge^r B)
\end{array}$$

$$\begin{array}{ccc}
\bigotimes_j(\varphi_{j1}\wedge\cdots\wedge\varphi_{jr_j})\otimes\bigotimes_i(b_{i1}\wedge\cdots\wedge b_{ir_i}) & \longmapsto & \big(\bigotimes_i(b_{i1}\wedge\cdots\wedge b_{ir_i})\big)\big(\bigotimes_j(\varphi_{j1}\wedge\cdots\wedge\varphi_{jr_j})\big)\\
\downarrow & & \downarrow\\
\bigwedge_j(\varphi_{j1}\wedge\cdots\wedge\varphi_{jr_j})\otimes\bigwedge_i(b_{i1}\wedge\cdots\wedge b_{ir_i}) & \longmapsto & \big(\bigwedge_i(b_{i1}\wedge\cdots\wedge b_{ir_i})\big)\big(\bigwedge_j(\varphi_{j1}\wedge\cdots\wedge\varphi_{jr_j})\big)
\end{array}$$

なる階数 1 の A 加群の可換図式において, 射はすべて同型。また, (5.4.19) より次は可換。

$$\begin{tikzcd}
(\bigotimes_{j=1}^{k} \bigwedge^{r_j} B_j^*) \otimes (\bigotimes_{i=1}^{k} \bigwedge^{r_i} B_i) \arrow[r, "\prod_i \mathrm{ev}_{B_i}"] \arrow[d] & A \arrow[d, equal] \\
(\bigwedge^r B^*) \otimes_A (\bigwedge^r B) \arrow[r, "\mathrm{ev}_B"] & A
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
\bigotimes_j (\varphi_{j1} \wedge \cdots \wedge \varphi_{jr_j}) \otimes \bigotimes_i (b_{i1} \wedge \cdots \wedge b_{ir_i}) \arrow[r, mapsto] \arrow[d, mapsto] & \prod_{i=1}^{k} \det\bigl((\varphi_{is}(b_{it}))_{st}\bigr) \arrow[d, equal] \\
\bigwedge_j (\varphi_{j1} \wedge \cdots \wedge \varphi_{jr_j}) \otimes \bigwedge_i (b_{i1} \wedge \cdots \wedge b_{ir_i}) \arrow[r, mapsto] & \prod_{i=1}^{k} \det\bigl((\varphi_{is}(b_{it}))_{st}\bigr)
\end{tikzcd}$$

この 2 つから

$$\begin{tikzcd}
\bigoplus B_i \arrow[r] \arrow[d, "\wr"] & \mathrm{End}_A(\bigoplus B_i) \arrow[r] \arrow[d, "\wr"] & \mathrm{End}_A(\bigwedge^r \bigoplus B_i) \arrow[r] \arrow[d, "\wr"] & (\bigotimes_{j=1}^{k} \bigwedge^{r_j} B_j^*) \otimes (\bigotimes_{i=1}^{k} \bigwedge^{r_i} B_i) \arrow[r] \arrow[d, "\wr"] & A \arrow[d, equal] \\
B \arrow[r] & \mathrm{End}_A(B) \arrow[r] & \mathrm{End}_A(\bigwedge^r B) \arrow[r] & \bigwedge^r B^* \otimes \bigwedge^r B \arrow[r] & A
\end{tikzcd}$$

は可換で, したがって $\mathrm{Nr}_{B/A} = \prod_i \mathrm{Nr}_{B_i/A}$. □

(6.5.4) 命題. 以下, 環は可換であるとする。A をネーター環, B を A 上の環, C を B 上の環とし, B は A 加群として有限生成射影的かつ定数階数を持ち, C は B 加群として有限生成射影的かつ定数階数を持つとする。このとき

$$\mathrm{Tr}_{B/A} \circ \mathrm{Tr}_{C/B} = \mathrm{Tr}_{C/A}, \qquad \mathrm{Nr}_{B/A} \circ \mathrm{Nr}_{C/B} = \mathrm{Nr}_{C/A}\,.$$

(証明). M を A 加群とすると, $M \to \prod_{\mathfrak{p}\colon \max} M_{\mathfrak{p}}$ が単射であること, および (6.2.4) より任意の $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} A$ に対し, $A_{\mathfrak{p}}$ 上で上の定理が成立することを言えば十分なので, A は局所環として構わない。またネーターの仮定から A の完備化 $\hat{A}$ は A 上平坦で, かつ有限生成 A 加群 M に対し $M \otimes_A \hat{A} \simeq \hat{M}$ となることから A を完備化して考えてよい。この場合 $B \simeq B_1 \times \cdots \times B_n$ と分解する。ただし B_i は完備な A 上の局所環で, A 加群として自由なものである。このとき $C_i = C \otimes_B B_i$ とおけば $C \simeq C_1 \times \cdots \times C_n$ であり, (6.3.4) などから $z = (z_1, \ldots, z_n) \in C$ に対しては $\mathrm{Tr}_{C/B}(z) = (\mathrm{Tr}_{C_1/B_1}(z_1), \ldots, \mathrm{Tr}_{C_n/B_n}(z_n))$ であることがわかる。以上より, B は A 上自由, C も B 上自由として構わない。この場合は基底を取って考えれば題意は単純な行列の計算に帰着できる。 □

参考文献

[Ka76] 河田敬義, ホモロジー代数 I, II, 岩波講座 基礎数学, 岩波書店, 1976.

[Kun85] E. Kunz, *Introduction to Commutative Algebra and Algebraic Geometry*, Birkhäuser, 1985.

[Mat86] H. Matsumura, *Commutative ring theory*, Cambridge studies in advanced mathematics, vol. 8, Cambridge University press, 1986.

記号

索引