# 数論的微分方程式論

Francesco Baldassarri (Univ. Padova)

1996 年 4 月

# 序

このノートは, F. Baldassarri 教授が 1996 年 3 月 25 日から 3 月 27 日に千葉大学において行った集中講義のノートを訳したものです。附録の内容は全て松田が加えました。また, 原稿の校正については, 杉山健一氏, 都築暢夫氏に協力して頂きました。

講義ノートを快く提供された F. Baldassarri 教授, いろいろお世話下さった志賀弘典氏, また校正に協力して頂いた方々に深く感謝します。

1996 年 4 月

松田 茂樹

# 目次

# 第 1 章

## 1.1 $G$ 関数入門

### 1.1.1 $G$ 関数とは

$K$ を数体とし, $\mathcal{V}_K$ でその整数環を表すとする。

**定義 1.1.1.** $K$ 上定義された原点における $G$ 級数 ($G$ 関数) とは

$$g(X) = \sum_j A_j X^j \in K[[X]] \tag{1.1.1.1}$$

であって次を満たすものを言う。

(i) $\exists L \in K(X)[d/dX]$ s.t. $Lg = 0$.

(ii) $\forall K \hookrightarrow \mathbb{C}$ に対し, $g$ は正の収束半径を持つ。

(iii) $\exists \{c_s\}, c_s \in \mathbb{N}$ s.t. $\forall j \le s$ に対し $c_s A_j \in \mathcal{V}_K$ であってかつ

$$\sup_s \frac{1}{s} \log c_s < \infty. \tag{1.1.1.2}$$

さて, $K$ の絶対値を次のように正規化することにする。

$$\begin{aligned} v \mid p \text{ の時} \quad & |p|_v = p^{[K_v:\mathbb{Q}_p]/[K:\mathbb{Q}]} \\ v \mid \infty \text{ の時} \quad & |x|_v = |x|^{[K_v:\mathbb{R}]/[K:\mathbb{Q}]} \end{aligned}$$

この時, 有名な積公式 $\prod_v |x|_v = 1$ が成立する。従って, 次のように, 絶対 height を矛盾なく定義出来る。

$$h(x) = \prod_v \max(1, |x|_v). \tag{1.1.1.3}$$

ベクトルに対しては

$$h(x_1, \dots, x_n) = \prod_v \max(1, |x_1|_v, \dots, |x_n|_v). \tag{1.1.1.4}$$

これを利用すると, $G$ 関数は次のように特徴付けることが出来る。

(i) $\exists L \in K(X)[d/dX]$ s.t. $Lg = 0$.

(ii) $h(A_0, \ldots, A_m)$ は高々指数関数的な増大度しか持たない。

一般に, 級数 $g$ に対して, size と呼ばれる次の数を考える。

$$\begin{aligned}\sigma(g) &= \limsup_s \frac{1}{s} \log h(A_0, \ldots, A_s) \\ &= \limsup_s \frac{1}{s} \sum_v \bigl(\max_{j \le s} \log^+ |A_j|_v\bigr)\end{aligned} \tag{1.1.1.5}$$

(ここで, $\log^+ a = \max(0, \log a)$ である。) この記号を使うと, 上の増大度の条件は $\sigma(g) < \infty$ と書ける。

さて $v$ 進解析では,

$$R_v = 1/\limsup_j |A_j|_v^{1/j} \tag{1.1.1.6}$$

という数が $g$ の収束半径を表す。先の size の定義で $\limsup$ と $\sum_v$ を交換すると,

$$\rho(g) = \sum_v \limsup_s \frac{1}{s} \max_{j \le s} \log^+ |A_j| = \sum_v \log^+ \frac{1}{R_v} \tag{1.1.1.7}$$

という数が得られる。この数は $g$ の global inverse radius と呼ばれる。$\sigma(g)$ と $\rho(g)$ の関係は簡単には述べられない。実際, もし $g$ が定義 1.1.1 の (i) の条件を満たさなくても良いとすれば, $\rho = 0$ だが, $\sigma = \infty$ となることもあり得る。なお, 定理 1.2.14 も参照せよ。

**補足 1.1.2.** $\rho$ と $\sigma$ の定義は無限和と $\limsup$ の交換をしているだけなので, その差は有限次拡大とかでは変わらない。

### 1.1.2 例

いくつか $G$ 関数の例を挙げる。

**例 1.1.3.**

$$\sum X^i/i = -\log(1 - X). \tag{1.1.2.1}$$

これは二階の有理係数の微分方程式を満たすが, $c_s = \prod_{p \le s} p^{[\log_p s]}$ とすれば,

$$\frac{1}{s} \log c_s = \sum_{p \le s} \frac{[\log_p s] \log p}{s} \le \frac{\log s}{s} \#\{p \le s\} \sim 1.$$

となって, 条件が満たされることが分る。また, $\sigma = 1$ である。

**例 1.1.4.** $\alpha \in \mathbb{Q}$ の時,

$$(1 + X)^\alpha = \sum \binom{\alpha}{i} X^i \tag{1.1.2.2}$$

は $G$ 関数になる。(Cf. 附録 A.1.)

**例 1.1.5.** もっと一般に, Eisenstein の定理より, $g \in K[[X]]$ で $\mathbb{Q}(X)$ 上代数的なものは $G$ 関数であることが分る。

**例 1.1.6.** 逆に, 有理関数係数の微分方程式を満たしても $G$ 関数にならない例としては, $d/dt - 1 = 0$ の解である $\exp(t)$ 等が挙げられる。これの $p$ 進収束半径は $p^{-1/(p-1)}$ なので, $p$ が大きくなるにつれ, どんどん収束半径が小さくなってしまう。

Bombieri, Chudnovsky, André, Dwork らにより, 以下のようなことが分っている, もしくは分りつつある。

**予想 1.1.7.** $g$ が 定義 *1.1.1* の *(i)* の条件を満たしているとすると,

$$\sigma(g) < \infty \Leftrightarrow \rho(g) < \infty.$$

*(*定理 *1.2.14* 及び*, Remark 1.2.16* を参照。*)*

**命題 1.1.8.** $g(X)$ が *0* における $G$ 関数であり, $g$ が代数的数な点 $\xi \in \overline{\mathbb{Q}}^{\mathrm{alg}}$ にまで解析接続出来たとすると, $g(X)$ は $\xi$ においても $G$ 関数になる。

**例 1.1.9.** $a, b, c \in \mathbb{Q}$ の時,

$$ {}_2F_1(a,b,c,\lambda) = \sum \frac{(a)_j (b)_j}{(c)_j j!} \lambda^j, \quad (x)_j = x(x+1)\cdots(x+j-1) \tag{1.1.2.3}$$

は $G$ 関数になる。この場合, $\sigma$ の評価は難しいのであるが, 幸いなことに

$$ {}_2F_1(a,b,c,\lambda) = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(b)\Gamma(c-b)} \int_0^1 x^{b-1}(1-x)^{c-b-1}(1-\lambda x)^{-a} dx \tag{1.1.2.4}$$

というふうな代数的な微分形式の周期積分の形に書けている。このような幾何的な場合には殆どの $p$ に対してフロベニウスが存在し, その場合には ${}_2F_1$ の $p$ 進収束半径が 1 でなければならないので $G$ 関数であることが分る。

### 1.1.3　主な予想

前節最後の例では積分の中身は二変数の関数であるが, もし定義を単純に二変数の場合に拡張するならば, これも $G$ 関数になる。ここから次の疑問が自然に湧き上がる。

**問題 1.1.10.** 数論的な多様体の上で多変数の $G$ 関数の理論を発展させたとする。$V, W$ を共に $\overline{\mathbb{Q}}^{\mathrm{alg}}$ 上スムーズな多様体とする。$f : V \to W$ をスムーズな射として, 相対 $i$-cycle $\gamma$ と, 係数が $G$ 関数であるような相対 $i$ 微分 $\omega$ に対して, $\displaystyle\int_\gamma \omega$ は $W$ の上の $G$ 関数になるか？

実の所, このような問題が提出される以前に, 上の逆であり, もっと深い問題である次の問題が Dwork によって提出されている。

**問題 1.1.11.** 全ての $G$ 関数は幾何的か？

この講義では, 幾つかの Y. André との共同研究の概略を話すことにする。その中では, $G$ 関数の幾何的な理論の基礎を与え, 代数幾何での自然な操作に対する安定性が証明される。

## 1.2 $G$ 加群 ($G$ 接続)

### 1.2.1 $G$ 加群の定義

$\mathrm{Spec}(\mathcal{V}_K)$ の空でない開部分スキーム $S$ を考える。$S = \mathrm{Spec}(\mathcal{V}_S)$ とし, $\Sigma_S$ で $S$ の閉点全体を表すことにする。$v \in S$ に対して, $K_v$ を $K$ の $v$ 進完備化, $\mathcal{V}_v$ を $K_v$ の整数環, $\kappa(v)$ をその剰余体とする。更に $p(v)$ を $\kappa(v)$ の標数とし, $\pi_v$ を $\mathcal{V}_v$ の素元の一つとする。

**定義 1.2.1.** $\mathcal{F}$ を $K$ 上の関数体とする。$\mathcal{F}$ のスムーズ $S$ モデルとは $S$ 上スムーズな有限型なスキーム $X \to S$ でファイバーが連結であり, かつ $\kappa(X_K) = \mathcal{F}$ となるものを言う。

$\mathcal{F}$ のスムーズな $S$ モデルを一つ選ぶと, $|\ \ |_v$ の $\mathcal{F}$ への拡大が一つ決まる。実際, $\eta_v$ を閉ファイバー $X_{\kappa(v)} = X \times \kappa(v)$ の生成点であるとすると, 局所環 $\mathcal{O}_{X,\eta_v}$ は $\pi_v$ を素元とする離散付値環になり, $|\ \ |_v$ の拡張になるように正規化された絶対値が決まる。これを

$$|\ \ |_{X,v} \tag{1.2.1.1}$$

で表すことにする。

$(M, \nabla)$ を階数 $\mu < \infty$ の $\mathcal{F}/K$ 微分加群, 即ち $M \simeq \mathcal{F}^\mu$ であって

$$\nabla : M \to \Omega^1_{\mathcal{F}/K} \otimes M \tag{1.2.1.2}$$

が積分可能な $\mathcal{F}/K$ 接続であるものとする (附録 A.2 参照)。

**定義 1.2.2.** $(M, \nabla)$ の $X/S$ 上のモデルとは, 局所自由階数 $\mu$ の $\mathcal{O}_X$ 加群 $\mathcal{M}$ と積分可能な $X/S$ 接続

$$\nabla : \mathcal{M} \to \Omega^1_{X/S} \otimes \mathcal{M} \tag{1.2.1.3}$$

の組 $(\mathcal{M}, \nabla)$ であって, $(\mathcal{M}, \nabla)_{\eta_v} = (M, \nabla)$ となるものを言う。($\eta_v$ は $X$ の生成点である。)

さて, $v \in \Sigma_S$ に対して, $(M, \nabla)$ の $X/S$ 上の generic な収束半径 $R_{X,v}(M)$ を次のようにして定めることにしよう。まずは, $X$ 内の $\eta_v$ におけるエタールな局所座標系 $(U, \boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_d))$ および, $M$ の $\mathcal{F}$ 上の基底 $\boldsymbol{e} = (e_1, \ldots, e_\mu)$ を一つ固定する。$\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_d) \in \overline{\mathbb{N}}^d$ ($\overline{\mathbb{N}} = \mathbb{N} \cup \{0\}$) に対して,

$$\frac{1}{\boldsymbol{\alpha}!}\nabla\Big(\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{x}}\Big)^{\boldsymbol{\alpha}}\boldsymbol{e} = \boldsymbol{e}G_{\boldsymbol{\alpha}}, \quad G_{\boldsymbol{\alpha}} \in M_\mu(\mathcal{F}) \tag{1.2.1.4}$$

と書くことにする。

**定義 1.2.3.** 以上の状況のもとで, $(M,\nabla)$ の generic な $v$ 進収束半径を

$$R_{X,v} = 1/\max\left(1, \limsup_{|\boldsymbol{\alpha}|\to\infty} |G_{\boldsymbol{\alpha}}|_{X,v}^{1/|\boldsymbol{\alpha}|}\right) \tag{1.2.1.5}$$

で定める。(ただし, $|\boldsymbol{\alpha}| = \sum \alpha_i$ である。) $R_{X,v}(M)$ は $\boldsymbol{e}$ の取り方に依らない。

**命題 1.2.4.** もし $(M,\nabla)$ の $X/S$ 上のモデルが存在すれば, 勝手な $v \in \Sigma_S$ に対して次が成立する。

$$(1 \geq)\ R_{X,v}(M) \geq |p|_v^{\frac{1}{p-1}} \tag{1.2.1.6}$$

証明は簡単。

**定義 1.2.5.** 同じく $(M,\nabla)$ の $X/S$ 上のモデルが存在する場合に, $(M,\nabla)$ の $X/S$ 上の global な逆半径を次の式で定める。

$$\rho_{X/S}(M) = \sum_{v\in\Sigma_S} \log\frac{1}{R_{X,v}(M)} \in [0,+\infty] \tag{1.2.1.7}$$

**定義 1.2.6.** $(M,\nabla)$ が type $G$ もしくは $G$ 加群 であるとは, ある (従って全ての) $S$ と $S$ モデル $X/S$ の組に対して $\rho_{X/S}(M) < \infty$ となることである。

例えば, 有限個を除く全ての $v \in \Sigma_S$ に対して $R_{X,v}(M) = 1$ であるような $(M,\nabla)$ は $G$ 加群 である。このような $(M,\nabla)$ を *globally convergent* と呼ぶことにする。globally convergent ならば $G$ 加群である。逆も成立すると思われるが, まだ証明されてはいない。

### 1.2.2 Katz の仕事との関係

$(\mathcal{M},\nabla)$ を $(M,\nabla)$ の $X/S$ 上のモデルとし, $v \in \Sigma_S$ とする。 $(\mathrm{mod}\ \pi_v)$ で還元することで, 標数 $p = p(v)$ の微分加群

$$\nabla_{\kappa(v)} : \mathcal{M}_{\kappa(v)} \to \Omega_{X_{\kappa(v)}/\kappa(v)} \otimes \mathcal{M}_{\kappa(v)} \tag{1.2.2.1}$$

を得る。標数 $p$ の微分加群では, $p$ 曲率や巾零という概念が大切である。

**定義 1.2.7.** $k$ を標数 $p$ の体とし, $X$ をスムーズな $k$ スキームとする。$(\mathfrak{M},\nabla)$ を積分可能 $X/k$ 接続とする。$(\mathfrak{M},\nabla)$ が**指数** $n$ **以下の巾零** (*nilpotent of exponent* $\leq n$) であるとは, 勝手なエタールな $X$ の局所座標系 $(x_1,\ldots,x_d)$ に対して, 次が成立することを言う。

$$\nabla\Big(\frac{\partial}{\partial x_1}\Big)^{pw_1}\cdots\nabla\Big(\frac{\partial}{\partial x_d}\Big)^{pw_d} = 0 \quad \text{for } \forall(w_1,\ldots,w_d) \in \overline{\mathbb{N}}^d,\ \Sigma w_i = n. \tag{1.2.2.2}$$

$(\mathfrak{M},\nabla)$ が巾零とは, ある $n \in \mathbb{N}$ に対して指数 $n$ 以下の巾零微分加群であることである。また, 特に $n = 1$ の場合には, $(\mathfrak{M},\nabla)$ は $p$ 曲率が 0 であるという。附録 A.3 参照。

**命題 1.2.8.** $X/S$ を $\mathcal{F}$ のスムーズなモデルとし, $(\mathcal{M},\nabla)$ を $\mathcal{F}/K$ 接続 $(M,\nabla)$ の $X/S$ のモデルとする。$v \in \Sigma_S$ とするとき,

$$(\mathcal{M}_{\kappa(v)},\nabla_{\kappa(v)}) \text{ が巾零} \Leftrightarrow R_{X,v}(M) > |p|_v^{\frac{1}{p-1}}. \tag{1.2.2.3}$$

Katz は**大域的巾零接続** (*globally nilpotent connection*) という概念を定義した。これは次のようなものである。

**定義 1.2.9.** $\mathcal{F}/K$ 接続 $(M, \nabla)$ が**大域的巾零**であるとは, ある $S$ 上のスムーズモデル $X/S$ と, その上のモデル $(\mathcal{M}, \nabla)$ があって, その任意の $v \in \Sigma_S$ に対して $(\mathcal{M}_{\kappa(v)}, \nabla_{\kappa(v)})$ が巾零になることを言う。

命題 1.2.8 より, globally convergent であれば, 大域的巾零であることが分る。しかし, 定義上は $G$ 接続は必ずしも 大域的巾零とは限らない。(実際にはそうなると予想されている。予想 1.2.12 参照。) そこで, もう少し条件を弱くした almost everywhere nilpotent な接続というのを考えることにする。

**定義 1.2.10.** $\mathcal{F}/K$ 接続 $(M, \nabla)$ が *almost everywhere nilpotent* (以下 a.e. nilpotent) であるとは, ある $S$ 上のスムーズなモデル $X/S$ と, その上のモデル $(\mathcal{M}, \nabla)$ があって, $v \mid p$ であるような任意の $v \in \Sigma_S$ に対して $(\mathcal{M}_{\kappa(v)}, \nabla_{\kappa(v)})$ が巾零になるような有理素数 $p$ が Dirichlet 密度 1 であることを言う。

定義から, $G$ 接続は a.e. nilpotent であることがすぐに分る。例えば $K = \mathbb{Q}$ の場合なら,

$$T = \left\{ p: \text{ 素数} \;\middle|\; R_{X,p} \leq p^{-\frac{1}{p-1}} \right\}$$

と置くとき,

$$\infty > \sum \log \frac{1}{R_{X,p}} > \sum_{p \in T} \log p^{\frac{1}{p-1}} = \sum_{p \in T} \frac{\log p}{p-1} > \sum_{p \in T} \frac{1}{p} \tag{1.2.2.4}$$

となって, $T$ の Dirichlet 密度 が 0 であることが示せる。

次のような Katz の結果の拡張がある。(Cf. [Kat70], [Kat72], [Kat82].)

**定理 1.2.11.** $(\mathcal{M}, \nabla)$ や $X/S$ は上の通りとする。

*(i)* $(\mathcal{M}_{\kappa(v)}, \nabla_{\kappa(v)})$ *が無限個の* $v \in \Sigma_S$ *に対して巾零であるなら,* $(\mathcal{M}, \nabla)$ *は高々確定特異点しか持たない。*

*(ii)* $(\mathcal{M}, \nabla)$ *が a.e. nilpotent であるとすると,* $(\mathcal{M}_K, \nabla_K)$ *の全ての特異因子における exponent は有理数になる。*

以上のことから, $\overline{\mathbb{Q}}^{\mathrm{alg}}$ 上スムーズな多様体 $V$ に対し

| | | |
|---|---|---|
| $GC(V)$ | $=$ | $\{V$ 上の globally convergent な接続付加群 $\}$ |
| $G(V)$ | $=$ | $\{V$ 上の $G$-connection$\}$ |
| $Nilp(V)$ | $=$ | $\{V$ 上の大域的巾零な接続付加群 $\}$ |
| $Nilp^{\mathrm{ae}}(V)$ | $=$ | $\{V$ 上の almost everywhere nilpotent な接続付加群 $\}$ |
| $Reg^{\mathbb{Q}}(V)$ | $=$ | $\{$exponents が rational である $V$ 上の regular な接続付加群 $\}$ |

とすると, 次のような図が得られる。

$$
\begin{tikzcd}
& G(V) & & \\
GC(V) \arrow[ur, phantom, sloped, "\subset"] & & Nilp^{\mathrm{ae}}(V) \arrow[ul, phantom, sloped, "\subset"] \arrow[r, phantom, "\subset"] & Reg^{\mathbb{Q}}(V) \\
& Nilp(V) \arrow[ul, phantom, sloped, "\subset"] \arrow[ur, phantom, sloped, "\subset"] & &
\end{tikzcd}
$$

これについて, 次のように予想されている。

**予想 1.2.12.** $GC(V) = Nilp^{\mathrm{ae}}(V)$

従って, 本来は始めの四つは区別する必要がないと思われるのだが, 今の所, これは予想でしかないので, こういったことを考える必要があるのである。

### 1.2.3 $G$ 加群の size

$(\mathcal{M}, \nabla)$, $X/S$ を上の通りとする。これによって誘導される stratification data

$$\theta^{(m)} : \mathcal{M} \to \left(\mathcal{P}^n_{X/S} \otimes \mathcal{M}\right) \otimes K \tag{1.2.3.1}$$

を考える。これは左 $\mathcal{O}_X$-線形写像であり, $(\mathcal{M}, \nabla)$ の生成点における解の Taylor 展開の truncation

$$\boldsymbol{e} \mapsto \sum_{|\boldsymbol{\alpha}| \leq n} \boldsymbol{\xi}^{\boldsymbol{\alpha}} \otimes \boldsymbol{e} G_{\boldsymbol{\alpha}} \tag{1.2.3.2}$$

である。ただし, $\boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ をエタール局所的な座標系として $\boldsymbol{\xi} = (\xi_1, \ldots, \xi_d)$, $\xi_i = x_i \otimes 1 - 1 \otimes x_i$ である。ここで, 次のような $\mathcal{V}_S$ のイデアル $I^{(n)}$ を考える。

$$I^{(n)} = \{a \in \mathcal{V}_S \mid \theta^{(n)}(a\mathcal{M}) \subset \mathcal{P}^n_{X/S} \otimes \mathcal{M}\}. \tag{1.2.3.3}$$

そして,

$$h_X(\mathcal{M}, n) = \frac{1}{[K : \mathbb{Q}]} \log NI^{(n)} \tag{1.2.3.4}$$

と置く。ただし, $NI^{(n)} = \#(\mathcal{V}_S / I^{(n)})$ である。

**定義 1.2.13.** $X/S$ 上の $(M, \nabla)$ の *size* を次のように定義する。

$$\sigma_{X/S}(M) = \limsup_n \frac{1}{n} h_X(\mathcal{M}, n) \in [0, +\infty] \tag{1.2.3.5}$$

これは $(M, \nabla)$ のモデル $(\mathcal{M}, \nabla)$ の取り方には依存しない。$I^{(n)}\mathcal{V}_v = c_v \mathcal{V}_v$,

$$h_X(\mathcal{M}, n, v) = \log(1/|c_v|_v) \tag{1.2.3.6}$$

とおけば,

$$h_X(\mathcal{M}, n) = \sum_{v \in \Sigma_S} h_X(\mathcal{M}, n, v) \tag{1.2.3.7}$$

が成立する。また, 次の式も簡単に示せる。

$$\log \frac{1}{R_{X,v}(M)} = \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n} h_X(\mathcal{M}, n, v) \tag{1.2.3.8}$$

Bombieri-André の公式の次のような一般化がある。([DGS94, p.226] や [And89, p.235] を参照。)

**定理 1.2.14.** $(M, \nabla)$ の階数を $\mu$ とする。もし, $(M, \nabla)$ の $X/S$ 上のモデルが存在すれば, 次の式が成立する。

$$\rho_{X/S}(M) \leq \sigma_{X/S}(M) \leq \rho_{X/S}(M) + \mu - 1 \tag{1.2.3.9}$$

従って, $G$-connection を global inverse radius の有界性ではなく, size の有界性を用いて定義することも出来る。

**例 1.2.15.** 上の右側の不等式については, $g(X) = \mathrm{Li}_r(X) = \sum_{n\geq 1} \dfrac{X^n}{n^r}$ を見ると理解しやすい。$1/(1+X)$, $\mathrm{Li}_1, \ldots, \mathrm{Li}_{\mu-1}$, は階数 $\mu$ の微分加群の解の基底になる。ここで

$$\sigma(\mathrm{Li}_r) = \limsup_{s} \frac{1}{s} \log h(1^r, \ldots, s^r) \tag{1.2.3.10}$$

$$= \limsup_{s} \frac{r}{s} \sum_{p} [\log_p s] \log p \tag{1.2.3.11}$$

$$= r \limsup_{s} \#\{p \leq s\} \frac{\log s}{s} = r \tag{1.2.3.12}$$

より $\sigma(\mathrm{Li}_r) = r$ である。一方, 収束半径はどの $p$ に対しても 1 なので, $\rho(\mathrm{Li}_r) = 0$ となる。

**補足 1.2.16.** 接続付加群の global inverse radius や size を, $X$ の代数的点での局所的な解の global inverse radius や size と結びつけるための定理はまだない。これについては, 次のような問題がまだ未解決である。

Q1. $g = \sum a_n X^n \in K[[X]]$ が有理関数係数の微分作用素 $L$ の解になっているとする。このとき, $L$ として minimum なものを選ぶとき, Chudnovski の基本定理から $\sigma(g) < \infty \Leftrightarrow \sigma(L) < \infty$ が言えるが, 同様なことが $\rho$ についても言えるか? 同じことだが, $\rho(g) < \infty \Leftrightarrow \sigma(g) < \infty$ は言えるか?

Q2. $g$ を $G$ 関数とするとき, $\rho(g) \leq \sigma(g)$ は言えるか?

Q3. $g$ を $G$ 関数とするとき, $\rho(g) = \sigma(g)$ ならば, ある整数 $N$ が存在して, $g(NX)$ は代数的整数を係数に持つか? (Yves の予想)。また, $\rho(g) = \sigma(g)$ として, $g$ が代数関数でないとすると 0 は $L$ の特異点になるか?

等々。

### 1.2.4 逆像と順像

さて, スムーズな $\overline{\mathbb{Q}}^{\mathrm{alg}}$ 多様体 $V$ に対して, 積分可能な $V/\overline{\mathbb{Q}}$ 接続を持つ準連接的な $\mathcal{O}_V$ 加群のなすアーベル圏を $\mathrm{MIC}(V)$ とすると, $V$ 上の $G$ 加群の圏 $G(V)$ は $\mathrm{MIC}(V)$ の充満部分圏になる。

**補題 1.2.17.** $G(V)$ は $\mathrm{MIC}(V)$ の *thick tannakian subcategory* である。

つまり, $(\mathcal{O}_V, d_{V/\overline{\mathbb{Q}}^{\mathrm{alg}}})$ を含み, $-\otimes_{\mathcal{O}_V}-$, $\mathcal{H}om_{\mathcal{O}_V}$, duality, extension について閉じており, 更に, subquotient についても閉じている。

$f : V \to W$ を任意のスムーズな $\overline{\mathbb{Q}}^{\mathrm{alg}}$ 多様体間の射とするとき, $\mathcal{O}$ 加群についての $f^*$ は自然に

$$f^* : G(W) \to G(V) \tag{1.2.4.1}$$

を誘導する。また, もし $f$ がエタール被覆であれば, (つまり有限エタールなら) $f_*$ は

$$f_* : G(V) \to G(W) \tag{1.2.4.2}$$

を誘導する。これは, 一種の Eisenstein の定理の拡張である。つまり,

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, "\varphi"] \arrow[dr] & & Y \arrow[dl] \\ & S & \end{tikzcd}$$

を $V, W$ のスムーズ $S$ モデル $X, Y$ のエタール被覆で $\varphi^{\mathrm{alg}}_{\mathbb{Q}} = f$ となるものであり, また $(\mathcal{M}, \nabla)$ を $(M, \nabla)$ の $X/S$ 上のモデルとするとき, $\varphi_*\mathcal{P}^n_{X/S} = \mathcal{P}^n_{Y/S} \otimes \varphi_*\mathcal{O}_X$ となるので,

$$\varphi\Theta^{(n)} : \varphi_*\mathcal{M} \to \varphi_*(\mathcal{P}^n_{X/S} \otimes \mathcal{M}) \otimes K = \mathcal{P}^n_{Y/S} \otimes \varphi\mathcal{M} \otimes K \tag{1.2.4.3}$$

が $\varphi_*\mathcal{M}$ についての $\Theta^{(n)}$ になり, 従って, $I^{(n)}$ は変化しないのである。

もっと一般に, $f : V \to W$ がスムーズな射であるとしよう。$(\mathcal{M}, \nabla)$ を $G(V)$ の対象とするとき, $D$ 加群の意味での $f_+(\mathcal{M}, \nabla)$ を定義できる。このとき, 稠密開な $W' \subset W$ で任意の $i$ に対して

$$h^i f_+(\mathcal{M}, \nabla)|_{W'} \tag{1.2.4.4}$$

が $\mathcal{O}_{W'}$ 連接的であり, かつ積分可能な $W'/\overline{Q}^{\mathrm{alg}}$ 接続 (Gauss-Manin 接続) を持つようなものが存在することが知られている。

**定理 1.2.18** (主大域定理)**.**

$$h^i f_+(\mathcal{M}, \nabla) \text{ は } G(W') \text{ の対象になる。}$$

この定理によって, 「$G$ 関数は幾何的起源を持つか」という予想の意味が, より明確になる。

## 1.3 剛解析空間の幾何

### 1.3.1 剛解析空間

$K$ を非アルキメデス的な付値 $|\ \ |$ に関して完備な体とし, $\mathcal{V}$ をその整数環, $\mathfrak{m}, k$ を各々 $\mathcal{V}$ の極大イデアルと剰余体とする。$K$ の標数は 0, $k$ の標数は $p \neq 0$ であるとする。

$A$ を位相環で, そのトポロジーが部分加群達からなる 0 の近傍系 $\{V\}$ によって定まっているものとする時, $A\{T_1, \ldots, T_n\}$ で収束巾級数環, 即ち

$$A = \left\{ \sum a_{\boldsymbol{\alpha}} T^{\boldsymbol{\alpha}} \middle| \lim_{|\boldsymbol{\alpha}| \to \infty} a_{\boldsymbol{\alpha}} = 0 \right\} \tag{1.3.1.1}$$

を表すことにする。(トポロジーは, $V\{T\} = \{\sum_{\boldsymbol{\alpha}} a_{\boldsymbol{\alpha}} T^{\boldsymbol{\alpha}} \mid a_{\boldsymbol{\alpha}} \in V\ \forall \boldsymbol{\alpha}\}$ で与える。)

**定義 1.3.1.** ($K$ 上の) Tate 代数とは, $K\{T_1, \ldots, T_n\}$ の商であるような $K$ 代数である。(トポロジーは商トポロジーで与える。)

$A$ を Tate 代数とし, $X = \mathrm{Spm}(A)$ とする。$x \in X$ に対して, $\kappa(x) = A/x$ は $K$ の有限次拡大であり, 従って, 付値 $|\ \ |$ の延長や, その整数環 $\mathcal{V}(x)$ が一意的に定まる。故に $A$ の元 $f$ に対して $f(x)$ で $f$ の $\kappa(x)$ への像を表せば, $|f(x)|$ も一意的に決まる。こうして $f$ は $X$ 上の「関数」と見做せる。

$X$ の Grothendieck 位相及び, 構造層 $\mathcal{O}_X$ を次を満たすように定めることが出来る。

(i) $(f_1, \ldots, f_n) = 1$ なるような $\forall f_1, \ldots, f_n \in A$ に対して,

$$V = \{x \in X \mid 1 \leq \forall i \leq n\, |f_i(x)| \leq |f_0(x)|\} \tag{1.3.1.2}$$

は, $X$ の開集合である。これは, **特殊領域**と呼ばれる。

(ii) $\mathcal{O}_X(V) = A\{T_1, \ldots, T_n\}/(f_i - f_0 T_i, i = 1, \ldots, n)$

(iii) 全ての特殊領域による有限被覆は admissible である。

この時の $(X, \mathcal{O}_X)$ は**アフィノイド空間**と呼ばれる。

**例 1.3.2.** 単位球 $D(0, 1^+) = \{x \in K \mid |x| \leq 1\} = \mathrm{Spm} K\{X\}$ における特殊領域は次の形の集合である。

$$D(a, r^+) \setminus \bigcup_{i=1}^{m} D(a_i, r_i^-) \tag{1.3.1.3}$$

$(D(a, r^+) = \{n \mid |x - a| \leq r\}, D(a, r^-) = \{n \mid |x - a| < r\})$

**定義 1.3.3.** $K$ 上の剛解析空間とは, Grothendieck 位相空間 $X$ とその上の $K$ 代数の層 $\mathcal{O}_X$ の組であって, 各 $V_\alpha$ がアフィノイド空間である admissible 被覆 $\{V_\alpha\}$ を持つものである。$K$ 上の剛解析空間間の射 $f : Y \to X$ とは, 連続写像 $Y \to X$ と, 局所 $K$ 代数の層の射 $f^{-1}\mathcal{O}_X \to \mathcal{O}_Y$ の組である。

Tate 代数の間の射 $A \to B$ があれば, 剛解析空間の間の射 $\mathrm{Spm}B \to \mathrm{Spm}A$ が得られる。関手 Spm は忠実充満になる。

**定義 1.3.4.** 剛解析空間間の射 $f : X \to Y$ がスムーズ (resp. エタール) であるとは, $Y$, $X$ の admissible 被覆 $\{Y_i\}_i$, $\{X_i\}_i$ で次を満たすものが存在することを言う。

(i) $f(Y_i) \subset X_i$

(ii) $A_i = \Gamma(X_i, \mathcal{O}_X)$, $B_i = \Gamma(Y_i, \mathcal{O}_Y)$ とすると,

$$B_i \simeq A_i\{T_1, \ldots, T_n\}/(f_1, \ldots, f_r) \tag{1.3.1.4}$$

という同型で, $\det\left(\dfrac{\partial f_j}{\partial T_k}\right)_{1\le j,k\le r}$ が $B_i$ で可逆 (resp. かつ $r = n$) になるようなものが存在する。

相対微分形式の層 $\Omega^1_{Y/X}$ は, $\mathcal{I}$ を $Y \to Y \times_X Y$ の定義イデアルとして $\mathcal{O}_Y$ 加群 $\mathcal{I}/\mathcal{I}^2$ で定義される。これは連接 $\mathcal{O}_Y$ 加群であり, もし $f$ がスムーズ (resp. エタール) であれば, 局所自由 (resp. 0) になる。

普通の代数幾何の場合と同様にして de Rham 複体 $\Omega^{\bullet}_{Y/X}$ や ($X$ に関して相対的な) 積分可能な接続付加群 $(\mathcal{E}, \nabla)$, それに付随する de Rham 複体 $\mathcal{E} \otimes \Omega^{\bullet}_{Y/X}$ などが定義される。

### 1.3.2 形式スキームとの関係

次の形の形式 $\mathcal{V}$ スキーム $X$ を考えることにする。

> $X$ は局所的に, $\mathcal{V}\{T_1, \ldots, T_n\}$ の (位相的な) 商である $\mathcal{V}$ 代数 $A$ に対する $\mathrm{Spf}A$ の形に書けている。(これは, 局所有限型な形式 $\mathcal{V}$ スキームになる。)

Raynaud の構成により (cf. [Ray74]), このような形式 $\mathcal{V}$ スキームに対して剛解析空間 $X_K$ が付随する。$X = \mathrm{Spf}A$ であれば, $X_K = \mathrm{Spm}A_K$ である。($A_K = A \otimes K$ は Tate 代数になる。) 一般には $\mathcal{V}_L$ で $K$ の有限次拡大 $L$ の整数環を表すことにすると, $X_K$ の点は $X$ の $\mathcal{V}_L$ 値点, 即ち $X(\mathcal{V}_L) = \mathrm{Hom}(\mathrm{Spec}\mathcal{V}, X)$ の元に対応する。従って, $x \in X$ に対して, 閉埋め込み

$$x : \mathrm{Spf}\mathcal{V}(x) \hookrightarrow X \tag{1.3.2.1}$$

が対応する。$x$ の像は, $X$ の閉点 ($k$ スキーム $X_k$ の点) 一つからなる。これを $x$ の**特殊化** (*specialization*) と呼び, $\mathrm{Sp}(x)$ と書く。ここから

$$\mathrm{Sp} : X_K \to X \tag{1.3.2.2}$$

という局所環付 site の写像が出来る。$X_K$ は $X$ の *Raynaud generic* **ファイバー** と呼ばれる。

$X_k$ の部分集合 $S$ に対し, $S$ の $X$ 内の管状近傍 (tube, tubular neighborhood) を

$$]S[_X = \mathrm{Sp}^{-1} S \tag{1.3.2.3}$$

で定める。$Z$ を $X$ の閉スムーズ形式 $V$ 部分スキームとし, $\varepsilon \in (0,1)$ とする。$Z$ の $X$ 内の半径 $\varepsilon$ の勘定近傍を, $X$ のエタール局所的な座標系 $(t_1,\dots,t_n)$ で $Z$ が $t_1 = t_2 = \cdots = t_c = 0$ で定義されるようなものを取るときに, 局所的に

$$]Z[_{X,\varepsilon} = \{x \in \widehat{X}_K \mid t_i(x) < \varepsilon, i = 1,\dots,c\} \tag{1.3.2.4}$$

となるように定める。

**例 1.3.5.** $X = \mathbb{A}^1_{\mathcal{V}} = \mathrm{Spf}\mathcal{V}\{t\}$, $X_K = \mathrm{Spm}K\{t\} = D(0,1^+) = \mathcal{V}_{\overline{K}^{\mathrm{alg}}}$ とする。$x \in D(0,1^+)$ に対しては

$$\mathrm{Sp}(x) = x\,(\mathrm{mod}\,\overline{\mathfrak{m}}^{\mathrm{alg}}) \in \overline{k}^{\mathrm{alg}} = (\mathbb{A}^1_k)^c,$$
$$]\overline{x}[ = D(x,1^-), \qquad ]\overline{x}[_{X,\varepsilon} = D(x,\varepsilon^-).$$

となる。ただし, 左肩の $c$ は閉点の集合を表すための記号である。

### 1.3.3 通常のスキームとの関係

さて, ここで $X$ を局所有限な $K$ スキームとする。$X$ の閉点の集合 $X^c$ に対して $K$ 上の剛解析空間の構造を与えることにしよう。まず $X = \mathrm{Spec}A$ がアフィンである場合を考える。$A$ の表示

$$A \simeq K[t_1,\dots,t_n]/(f_1,\dots,f_r)$$

を一つ固定しておく。$\mathcal{V}_K$ の極大イデアル $\mathfrak{m}$ の元 $\pi \neq 0$ を取り,

$$X_m = \{x \in X^c \mid |t_i(x)| \leq |\pi|^{-m} \text{ for } \forall i\} \tag{1.3.3.1}$$

とし, また $A_m$ を $\mathcal{V}[\pi^m t_1,\dots,\pi^m t_n]$ の $A$ 内の像とする。$X_m$ が $x(A_m) \subset \mathcal{V}_{\overline{K}^{\mathrm{alg}}}$ となるような点 $A \xrightarrow{x} \overline{K}^{\mathrm{alg}}$ の全体であることに注意しよう。

$A$ に $\{\pi^\ell A_m\}_\ell$ で定まる位相を与え, その位相による完備化を $\widehat{A}_m$ で表す。これは $K$ 上の Tate 代数になる。$X_m$ の点は $A \xrightarrow{x} \overline{K}^{\mathrm{alg}}$ で $\widehat{A}_m \xrightarrow{x} \overline{K}^{\mathrm{alg}}$ に延長出来るものと丁度対応する。即ち, $X_m \simeq \mathrm{Spm}(\widehat{A}_m)_K$ となる。これによって $X_m$ に剛解析空間の構造を入れる。これは, $X_m \subset X_{m+1}$ と両立する。集合として

$$X^c = \bigcup_m X_m \tag{1.3.3.2}$$

が成立するので, 右辺によって $X^c$ に剛解析空間の構造が入る。これを $X^{\mathrm{an}}$ と書く。一般には, アフィン被覆に対して上の操作を行い, これを貼り合わせることになる。

**例 1.3.6.** $X = \mathbb{A}^1_K$ とすると, $X^{\mathrm{an}} = \mathbb{A}^{1\,an}_K = \bigcup_{m=0}^{\infty} D(0,(p^m)^+)$ となる。

実際に扱うのは 有限型の $\mathcal{V}$ スキームである。この場合は二つの構成が可能である。一つ目は, $X$ からまず $X$ の $X_k$ に沿っての $X$ の形式的完備化 $\widehat{X}$ を取り, それの Raynaud generic fiber $\widehat{X}_K$ を作るというもの。もう一つ目は, $X$ から普通のスキームとしての generic fiber $X_K$ を取り, その $X_K^{\mathrm{an}}$ を取るというものである。一般には $\widehat{X} \hookrightarrow X_K^{\mathrm{an}}$ があり, もし $X$ が固有なら, これは同型になる。

$$
\begin{tikzcd}
 & X_K\colon K\text{ スキーム} \arrow[r, dotted] & X_K^{\mathrm{an}} \\
X\colon \text{有限型 } \mathcal{V}\text{ スキーム} \arrow[ur, dotted] \arrow[dr, dotted] & & \\
 & \widehat{X}\colon \text{形式 } \mathcal{V}\text{ スキーム} \arrow[r, dotted] & \widehat{X}_K \arrow[uu, "\cup"']
\end{tikzcd}
$$

**例 1.3.7.** $X = \mathbb{A}^1_{\mathcal{V}}$ の時は, $\widehat{X}_K = D(0,1^+) \hookrightarrow (\overline{K}^{\mathrm{alg}})^{\mathrm{an}} = X_K^{\mathrm{an}}$ となる。

### 1.3.4 ノルムについて

さて, $X$ をスムーズ $\mathcal{V}$ スキームで連結ファイバーを持つものとする。$\mathcal{F} = \kappa(X_K)$ には $|\ \ |$ の延長である $|\ \ |_{X,v}$ という絶対値が決まるのであった。(1.2.1.1 参照)。$x \in \widehat{X}$ とする。また, $(U, t_1, \ldots, t_d)$ を $\mathrm{Sp}(x) \in X_k \subset X$ のエタール局所的なアファイン座標近傍系とし, 更に $U = \mathrm{Spec} A$ とする。この時 $x_i = t_i(x)$ として, $\mathcal{V}$ 代数間の次の埋め込みで次が可換になるようなものが一意的に存在する。

$$
\begin{tikzcd}
A \arrow[rr] \arrow[ddr, "x"'] & & \mathcal{V}(x)[[T_1 - x_1, \ldots, T_d - x_d]] \arrow[ddl] \\
 & & T_i \arrow[dl, mapsto] \\
 & \mathcal{V}(x) \quad x_i &
\end{tikzcd}
$$

この埋め込みは, 具体的には次のように書けている。

$$f \mapsto \sum_{\boldsymbol{\alpha}} \frac{1}{\boldsymbol{\alpha}!} \frac{\partial^{\boldsymbol{\alpha}} f}{\partial \boldsymbol{t}^{\boldsymbol{\alpha}}}(x)(\boldsymbol{T} - \boldsymbol{x})^{\boldsymbol{\alpha}} \tag{1.3.4.1}$$

これは, 次の $K$ 代数の間の写像に延長出来することが出来る。

$$\mathcal{O}_{\widehat{X}_K}(\widehat{U}_K) \hookrightarrow K(x)[[\boldsymbol{T} - \boldsymbol{x}]]^b \tag{1.3.4.2}$$

$$\mathcal{F} \hookrightarrow Q(K(x)[[\boldsymbol{T} - \boldsymbol{x}]]^b) \tag{1.3.4.3}$$

ここで, $K(x)[[\boldsymbol{T} - \boldsymbol{x}]]^b = \left\{ \sum a_{\boldsymbol{\alpha}} (\boldsymbol{T} - \boldsymbol{x})^{\boldsymbol{\alpha}} \mid \sup |a_{\boldsymbol{\alpha}}| < \infty \right\}$ であり, $Q$ は分数体を表す。

$$\|\textstyle\sum a_{\boldsymbol{\alpha}} (\boldsymbol{T} - \boldsymbol{x})^{\boldsymbol{\alpha}}\|_1 = \sup |a_{\boldsymbol{\alpha}}| \tag{1.3.4.4}$$

で $\|\ \ \|_1$ を定義すると, これは multiplicative なので, $Q(K(x)[[\boldsymbol{T} - \boldsymbol{x}]]^b)$ に延長される。また, $\mathcal{O}_{\widehat{X}_K}(\widehat{U}_K)$ には二つの sup. norm, $\|\ \ \|_{\widehat{U}_K}$ および $\|\ \ \|_{]x[}$ がある。$\mathcal{F}$ には前に説明したように $|\ \ |_{X,v}$ (1.2.1.1) というノルムがある。

**定理 1.3.8.** これら全ての埋め込みは *isometric* である。

従って, 以後はどのノルムを使って考えるかは気にしなくてもよいことになる。

**補足 1.3.9.** $\|\ \ \|_{\widehat{U}_K}$ と $\|\ \ \|_{]x[}$ が isometric ということから, 基本的に $f \in \mathcal{O}_{\widehat{X}_K}$ のノルムは $]x[$ だけで調べればよいことが分る。

## 1.4 $p$ 進微分方程式

### 1.4.1 基本解行列

記号の使い方は §1.3.4 の通りとする。$\mathcal{M}$ を局所自由有限型 $\mathcal{O}_X$ 加群とし, $\nabla$ を $\mathcal{M}_K = \mathcal{M} \otimes K$ の積分可能な接続とする。ここから自然に $X_K^{\mathrm{an}} (\supset \widehat{X}_K)$ 上の接続が得られる。$\mathcal{M}|_U$ が $\mathcal{O}_U$ 上自由で階数 $\mu$ と仮定すると, $x \in \widehat{X}$ での局所的な表示

$$\frac{1}{\boldsymbol{\alpha}!}\left(\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{t}}\right)^{\boldsymbol{\alpha}} Y = G_{\boldsymbol{\alpha}} Y, \quad \boldsymbol{\alpha} \in \overline{\mathbb{N}}^d,\ (G_\alpha \in M(\mu, \mathcal{O}_{U_K})) \tag{1.4.1.1}$$

が得られる。これは積分可能な偏微分方程式系である。(1.4.1.1) の基本解行列とは,

$$\sum_{\boldsymbol{\alpha}} G_{\boldsymbol{\alpha}}(x)(\boldsymbol{T} - \boldsymbol{x})^{\boldsymbol{\alpha}} \tag{1.4.1.2}$$

のことであり, その収束半径は複素解析の場合と同様に

$$R_x = 1 \big/ \max\bigl(1, \limsup_{|\boldsymbol{\alpha}| \to \infty} |G_{\boldsymbol{\alpha}}(x)|^{1/|\boldsymbol{\alpha}|}\bigr) \in [0, 1] \tag{1.4.1.3}$$

で与えられる。(収束半径が 1 を越えるのは避ける。) $G_{\boldsymbol{\alpha}}$ は $U$ 上の有理関数の行列なので,

$$R_{X,v} = 1 \big/ \max\bigl(1, \limsup_{|\boldsymbol{\alpha}| \to \infty} |G_{\boldsymbol{\alpha}}|_{X,v}^{1/|\boldsymbol{\alpha}|}\bigr) \in [0, 1] \tag{1.4.1.4}$$

が定義される (cf. 定義 1.2.3)。これに関して次の定理が成立する。

**定理 1.4.1.** *(i)* $x_0 \in X(\overline{k}^{\mathrm{alg}})$ とする。任意の $x \in ]x_0[$ に対して $R_x \geq \rho$ ならば, $R_{X,v} \geq \rho$ となる。

*(ii)* 任意の $x \in \widehat{X}$ に対して $R_x \geq R_{X,v}$.

証明には, Dwork Robba の effective estimate に関する定理 (cf. [DGS94]) を多変数に拡張したものを用いる。

**補足 1.4.2.** Remark 1.3.9 でも注意したが, $R_{X,v}$ は $X$ 上の global な定数ではあるが, $x_0 \in X(\overline{k}^{\mathrm{alg}})$ を一つ選べば $]x_0[$ での情報だけから決まる。より正確には $\|G_{\boldsymbol{\alpha}}\|_{]x_0[} = |G_{\boldsymbol{\alpha}}|_{X,v}$ となっているのである。

**定理 1.4.3.** 微分方程式系 (1.4.1.1) が階数 $\mu$ で $G_{\boldsymbol{\alpha}}$ が $D(0, \rho^-)$ 上で解析的かつ有界である場合を考える。$D(0, \rho^-)$ の *sup. norm* を $\|\ \ \|_\rho$ で表す。$\sum G_{\boldsymbol{\alpha}}(0) \boldsymbol{X}^{\boldsymbol{\alpha}}$ が $D(0, \rho^-)$ で収束すると仮定し, $C = \max_{|\boldsymbol{\alpha}| < \mu} \|\boldsymbol{\alpha}! G_{\boldsymbol{\alpha}}\|_\rho \rho^{-|\boldsymbol{\alpha}|}$ とおく。このとき,

$$\|G_{\boldsymbol{\alpha}}\|_\rho \leq C \{|\boldsymbol{\alpha}|, \mu - 1\}_p \rho^{-|\boldsymbol{\alpha}|} \tag{1.4.1.5}$$

が成立する。ここで記号 $\{s, n\}_p$ は

$$\sup \frac{1}{|\lambda_1, \ldots, \lambda_n|_p}, \quad (\text{ただし, } \lambda_i \text{ は } 1 \leq \lambda_1 < \lambda_2 < \cdots < \lambda_n \leq s \text{ を動く}) \tag{1.4.1.6}$$

を表す。従って, ある $s, n$ に依存しない $c_p$ に対して $\{s, n\}_p \leq c_p s^n$ となっている。

**系 1.4.4.** 微分方程式系 (1.4.1.1) において $G_{\boldsymbol{\alpha}}$ は $D(0,1^-)$ 上解析的かつ有界であるとする。任意の $x \in D(0,1^-)$ に対して, $D(x,\rho^-)$ での基本解行列が存在すると仮定する。このとき, 次が成立する。

$$\|G_{\boldsymbol{\alpha}}\|_1 \leq C\{|\boldsymbol{\alpha}|, \mu-1\}_p \rho^{-|\boldsymbol{\alpha}|} \tag{1.4.1.7}$$

ただし, $C = \max_{|\boldsymbol{\alpha}|<\mu} \rho^{-|\boldsymbol{\alpha}|} \|\boldsymbol{\alpha}! G_{\boldsymbol{\alpha}}\|_1$ である。

**補足 1.4.5.** 明らかに (1.4.1.7) $\Rightarrow \limsup \|G_{\boldsymbol{\alpha}}\|_1^{1/|\boldsymbol{\alpha}|} \leq 1/\rho$ となる。従って, もし $G_{\boldsymbol{\alpha}}$ が rational であれば $R_{X,v}(M) \geq \rho$ となる。

**系 1.4.6.** *(i)* $\mathcal{F} = \kappa(X)$ とし, (1.4.1.1) がある $\mathcal{F}/K$ 接続を表現しているとする。このとき, $C$ を 系 *1.4.4* と同様のものとして, 次が成立する。

$$|G_{\boldsymbol{\alpha}}|_{X,v} \leq C\{|\boldsymbol{\alpha}|, \mu-1\}_p R_{X,v}^{-|\boldsymbol{\alpha}|} \tag{1.4.1.8}$$

*(ii)* $x_0 \in X(\overline{k}^{\mathrm{alg}})$ とし, (1.4.1.1) が $]x_0[_X$ 内に特異点を持たないとする。このとき,

$$\|G_{\boldsymbol{\alpha}}\|_{\,]x_0[_X} = |G_{\boldsymbol{\alpha}}|_{X,v} \tag{1.4.1.9}$$

も上と同様に抑えられる。

次に特異点を持つ場合を考える。(1.4.1.1) がスムーズな超曲面 $Z \subset X$ に沿って確定特異点を持つと仮定する。($X$ のエタール局所的な座標系において) $Z$ の定義方程式が $t_1 = 0$ で与えられているとすると, $G_{\boldsymbol{\alpha}}$ の係数は $\mathcal{O}(X_K \setminus Z_K)$ にあり, また, ある定数 $\tilde{C}$ で

$$t_1^{|\boldsymbol{\alpha}|+\tilde{C}} G_{\boldsymbol{\alpha}} \in M_\mu\bigl(\mathcal{O}(X_K)\bigr) \tag{1.4.1.10}$$

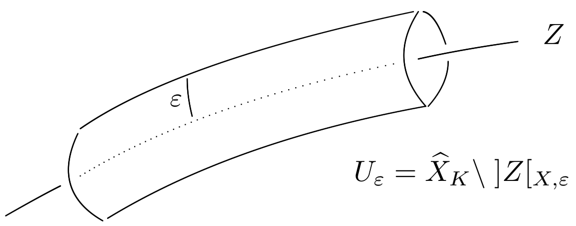
となるものが存在する。

$$U_\varepsilon = \widehat{X}_K \setminus\, ]Z[_{X,\varepsilon} = \{x \in \widehat{X}_K \mid |t_1(x)| \geq \varepsilon\} \tag{1.4.1.11}$$

と定義すると, $C$ を 系 1.4.6 の通りとして,

$$\|G_{\boldsymbol{\alpha}}\|_{U_\varepsilon} \leq C\{|\boldsymbol{\alpha}|, \mu-1\}_p \cdot (\varepsilon R_{X,v})^{-|\boldsymbol{\alpha}|} \cdot \varepsilon^{-\tilde{C}} \tag{1.4.1.12}$$

が成立する。



### 1.4.2 singular disk での収束半径

まず, Liouville 数の定義から始めよう。$\lambda \in \overline{K}^{\mathrm{alg}}$ に対して, 次の級数を考える。

$$g_\lambda(T) = \sum_{\substack{s=0 \\ s\neq\lambda}}^{\infty} \frac{T^s}{\lambda - s} \tag{1.4.2.1}$$

$\lambda$ の**型**を $g_\lambda(T)$ の $p$ 進収束半径として定義し, $\mathrm{type}(\lambda)$ と書くことにする。(絶対値は $|p| = p^{-1}$ で正規化しておく。)

**定義 1.4.7.** $\lambda$ が $p$ 進 non-Liouville 数であるとは,

$$\mathrm{type}(\lambda) = \mathrm{type}(-\lambda) = 1 \tag{1.4.2.2}$$

となることを言う。

Roth の定理 [Rot54] から, 代数的数ならば, $p$ 進 non-Liouville であることが分る。[DGS94, p.200] にも簡単な証明がある。

**補足 1.4.8.** 以下では exponent に $p$ 進 non-Liouville 数の条件をつけるのであるが, つけない場合には, かなり病的な現象が起きる。例えば [Rob85, 5.5] や, [CM97, 7.2] を参照。なお, 後者では, non-Liouville 数について詳しく扱っている。

以下, $X = \mathbb{P}^1_{\mathcal{V}}$ 上で考える。$T$ で, 標準的なパラメータを表すことにする。次の微分方程式系を考える。

$$\frac{dY}{dT} = GY, \qquad G \in M_\mu(\kappa(X)) \tag{1.4.2.3}$$

$G$ は $D(0, 1^-)$ 内で, 0 にのみ極を持つとする。更に, 特異点は確定特異点であり, 0 における exponent 及び, exponent の差は全て $p$ 進 non-Liouville 数であるとする。$R = R_{\mathbb{P}^1, v}$ を (1.4.2.3) の generic な収束半径としよう。このとき, (1.4.2.3) は 0 において

$$Y = UT^A \tag{1.4.2.4}$$

の形の解行列を持つ。ただし, $A \in M_\mu(K)$ であり, $U$ は $\overline{K}^{\mathrm{alg}}[[T]]$ に係数を持つ行列である。

**定理 1.4.9** (Transfer theorem)**.** $U$ は $D(0, (R^{\mu^2})^-)$ 上で *holomorphic* である。

この定理は $R = 1$ の場合は Christol (cf. [Chr84]), 一般には André-Baldassarri-Chiarellotto による。この定理は重要である。

### 1.4.3 Adolphson's の比較定理

先と同様, $\mathbb{P}^1_K$ で

$$\frac{dY}{dT} = GY, \qquad G \in M_\mu(\kappa(X)) \tag{1.4.3.1}$$

の形の微分方程式系を考える。特異点の集合を $a_1, \dots, a_s, a_\infty = \infty \in \mathbb{P}^1(\overline{K}^{\mathrm{alg}})$ とし, 全ての特異点は確定特異点であり, exponent は $p$ 進 non-Liouville であると仮定する。$r_1, \dots, r_s$, $r_\infty$ を正の実数で, $D(a_i, r_i^+)$ は互いに共通部分を持たず, かつ各 $a_i$ において (1.4.3.1) が $D(a_i, r_i^+)$ 上で

$$U_i(T - a_i)^{A_k}, \tag{1.4.3.2}$$

の形の解を持つようなものとする。ここで $U_i$ はある $\varepsilon \in (0,1)$ に対して $D(a_i, (r_i/\varepsilon)^+)$ 上正則であり, $A_i$ は $M_\mu(\kappa(X))$ の元とする。また。

$$D(\infty, r^+) = \{x \in (P_K^1)^{\mathrm{an}} \mid |x| \geq 1/r\}$$

とする。

**定理 1.4.10** (Adorphson [Ado76])**.**

$$\mathcal{L} = \mathcal{O}_{\mathbb{P}_K^1}(\mathbb{P}_K^1 \setminus \{a_1, \dots, a_\infty\}) = K\Big[T, \frac{1}{\prod_i (T - a_i)}\Big],$$
$$L = \mathcal{O}_{(\mathbb{P}_K^1)^{\mathrm{an}}}\Big((\mathbb{P}_K^1)^{\mathrm{an}} \setminus \bigcup_{i=1}^{\infty} D(a_i, r_i^+)\Big)$$

と置くと, 複体の間の自然な射

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \mathcal{L}^\mu & \xrightarrow{d/dT - G} & \mathcal{L}^\mu & \longrightarrow & 0 \\ & & \cap\big\downarrow & & \cap\big\downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & L^\mu & \xrightarrow{d/dT - G} & L^\mu & \longrightarrow & 0 \end{array} \tag{1.4.3.3}$$

は *quasi-isomorphism* になる。また,

$$\mathrm{Ker}_{\mathcal{L}^\mu}\Big(\frac{d}{dT} - G\Big) \simeq \mathrm{Ker}_{L^\mu}\Big(\frac{d}{dT} - G\Big) \tag{1.4.3.4}$$

および,

$$\mathrm{Cok}_{\mathcal{L}^\mu}\Big(\frac{d}{dT} - G\Big) \simeq \mathrm{Cok}_{L^\mu}\Big(\frac{d}{dT} - G\Big) \tag{1.4.3.5}$$

はともに有限次元 $K$ 線形空間になる。

Transfer 定理 (定理 1.4.9) から, 特に (1.4.3.4), (1.4.3.5) の同型が次の二条件の元で成立することが分る。

(i) 微分方程式系 (1.4.3.1) は高々確定特異点しか持たず, 各特異点での exponent 及び exponent の差は全て $p$ 進 non-Liouville であり,

(ii) (1.4.3.1) の generic な収束半径 を $R = R_{X,v}$ とするとき, 任意の $i = 1, \dots, \infty$ に対して $\varepsilon \in (0,1)$ となるような $r_i = R^{\mu^2}\varepsilon$ を $D(a_i, (R^{\mu^2}\varepsilon)^-)$ が互いに共通部分を持たないように選べる。

**補足 1.4.11.** Adorphson の比較定理は, 本質的には代数的な de Rham コホモロジーと ($p$ 進) 解析的な de Rham コホモロジーを比較している訳だが, この定理は一変数の場合には不確定特異点の場合に, 確定特異点を持つ場合は多変数の場合に拡張されている (cf. [Bal87], [Bal88])。

## 1.5 $\mathcal{D}$ 加群の コホモロジーと dévissage

### 1.5.1 $\mathcal{D}$ 加群の復習

通常の $\mathcal{D}$ 加群の簡単な復習をしておく。$K$ を標数 0 の代数閉体とし, $X$ を $K$ 上スムーズな多様体とする。また, $\mathcal{D}_X$ を $X/K$ 上の微分作用素の層とし, MIC$(X)$ で積分可能な $K$ 接続

$$\nabla : \mathcal{E} \to \Omega^1_{X/S} \otimes \mathcal{E} \tag{1.5.1.1}$$

を持つ準連接的な $\mathcal{O}_X$ 加群 $\mathcal{E}$ のなす圏を表すことにする。これは, 左 $\mathcal{D}_X$ 加群で, $\mathcal{O}_X$ 加群として準連接的なものの圏とも見做せる。

$K$ 上スムーズな多様体の間の射 $f : X \to Y$ があったとすると, $\mathcal{D}$ 加群の理論から

$$f_+ : D^b(\mathcal{D}_X) \to D^b(\mathcal{D}_Y) \tag{1.5.1.2}$$

という関手が与えられる。ここで, $D^b(\mathcal{D}_X)$ は MIC$(X)$ を係数とする bounded な複体の導来圏を表す。二つの射 $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$ に対して $(gf)_+ = g_+ \circ f_+$ が成立する。また, $f$ が閉埋め込みであれば, $f_+$ は $f$ の $\mathcal{O}_X$ 加群としての 0 による extension $f_*$ と一致する。従って, この場合 $f_+$ は完全関手になる。我々がより関心を持つのは, $f$ がスムーズの場合である。この場合には, $h^i f_+(\mathcal{E}, \nabla)$ は次のようにして計算される。まず, $(\mathcal{E}, \nabla)$ の相対 de Rham 複体 $DR_{X/Y}\mathcal{E}$ を

$$0 \ \to \ \mathcal{E} \ \xrightarrow{\nabla^0} \ \Omega^1_{X/Y} \otimes \mathcal{E} \ \xrightarrow{\nabla^1} \Omega^2_{X/Y} \otimes \mathcal{E} \ \to \ldots \tag{1.5.1.3}$$

として定める。ただし, $\nabla^0 = \nabla$,

$$\nabla^i(\omega \otimes e) = d_{X/Y}\omega \otimes e + (-1)^i \omega \wedge \nabla(e)$$

である。そして,

$$\boldsymbol{R}^i f_* DR_{X/Y}\mathcal{E} \quad (R^i_{DR} f_*(\mathcal{E}, \nabla) \text{ とか } H^i_{DR}(X/Y, (\mathcal{E}, \nabla)) \text{ とも書く}) \tag{1.5.1.4}$$

を考える。積分可能の仮定から, $Der(Y/K)$ は $H^i_{DR}(X/Y, (\mathcal{E}, \nabla))$ に作用するので, これは MIC$(Y)$ の対象になる。このとき, $f_+$ を $d = \dim X - \dim Y$ として

$$f_+\mathcal{E} = \boldsymbol{R} f_* DR_{X/Y}\mathcal{E}[d] \tag{1.5.1.5}$$

で定義する。従って, $h^{i-d} f_+\mathcal{E}$ は $\boldsymbol{R}^i f_* DR_{X/Y}\mathcal{E}$ となる。

$X$ がアファインであれば,

$$h^{i-d} f_+\mathcal{E} = \mathrm{Ker} f_* \nabla^i / \mathrm{Im} f_* \nabla^{i-1} \tag{1.5.1.6}$$

である。($\mathcal{D}_Y$ 加群としての構造は自然に決まる。) 一般には, $\{U_\alpha\}$ を $X$ のアファイン被覆とすれば,

$$E_1^{p,q} = C^p\big(\{U_\alpha\}, \mathcal{H}^q_{DR}(X/Y, (\mathcal{E}, \nabla))\big) \Rightarrow H^{p+q}_{DR}(X/Y, (\mathcal{E}, \nabla)) \tag{1.5.1.7}$$

という Čeck スペクトル系列がある。ただし, ここで, $\mathcal{H}^q_{DR}$ は

$$U \mapsto H^q_{DR}(U/Y, (\mathcal{E}, \nabla)) \tag{1.5.1.8}$$

という MIC$(Y)$ に値を取る $X$ 上の前層を表す。

$$H^q_{DR}(X/Y, -) : \mathrm{MIC}(X) \to \mathrm{MIC}(Y) \tag{1.5.1.9}$$

という関手は, 実は

$$H^0_{DR} : (\mathcal{E}, \nabla) \mapsto \big(f_*\mathcal{E}^{\nabla|_{Der(X/Y)}}, \text{induced connection}\big) \tag{1.5.1.10}$$

という関手の右導来関手になっているので, $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$ に対して Leray スペクトル系列

$$E_2^{p,q} = H^p_{DR}\big(Y/Z, (H^q_{DR}(X/Y, (\mathcal{E}, \nabla)), \square^q)\big) \Rightarrow H^{p+q}_{DR}(X/Z, (\mathcal{E}, \nabla)) \tag{1.5.1.11}$$

がある。

その他に Hodge スペクトル系列

$$R^p f_*(\mathcal{E} \otimes \Omega^q_{X/Y}) \Rightarrow R^{p+q}_{DR} f_*(\mathcal{E}, \nabla) \tag{1.5.1.12}$$

もあるが, これは $\mathcal{O}_Y$ 加群のスペクトル系列であり, この上には $\mathcal{D}_Y$ は作用しない。これを挙げたのは, ここから

**命題 1.5.1.** $f : X \to Y$ が相対次元 $d$ なら, $\forall(\mathcal{E}, \nabla)$ と $\forall i \notin [0, 2d]$ に対して

$$R^i_{DR} f_*(\mathcal{E}, \nabla) = 0 \tag{1.5.1.13}$$

が言えるためである。特に $f$ がエタールの場合, 次が言える。

$$R^0_{DR} f_*(\mathcal{E}, \nabla) = (f_*\mathcal{E}, f_*\nabla) \tag{1.5.1.14}$$

$$R^i_{DR} f_*(\mathcal{E}, \nabla) = 0 \quad (i \neq 0) \tag{1.5.1.15}$$

($\nabla : \mathcal{E} \to \Omega_X \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{E}$ から $f_*\nabla : f_*\mathcal{E} \to f_*\Omega^1_X \otimes_{f_*\mathcal{O}_X} f_*\mathcal{E} = \Omega^1_Y \otimes_{\mathcal{O}_Y} f_*\mathcal{E}$ が得られることに注意。)

**補足 1.5.2.** $f$ がアファインでなければ, 例えば $d = 0$ の場合でも連接的 $\mathcal{O}_X$ 加群 $\mathcal{E}$ で, $R^1 f_*\mathcal{E} \neq 0$ となるようなものがある。上のことから, このような $\mathcal{E}$ には接続が入り得ないことが分る。

同様に逆像は, $f : X \to Y$ と $(\mathcal{E}, \nabla) \in \mathrm{Ob}(\mathrm{MIC}(Y))$ に対して, $(f^*\mathcal{E}, f^*\nabla)$ として定められる。これは, $f_*\Omega^1_Y \to \Omega^1_X$ を通して自然に MIC$(X)$ の対象になる。逆像を取る関手は右完全であり, 左導来関手を取ることが出来る。つまり, $c = \dim X - \dim Y$ として

$$f^! = Lf^*[c] : D^b(\mathcal{D}_Y) \to D^b(\mathcal{D}_X) \tag{1.5.1.16}$$

と定めることが出来る。例えば, $f = i : X \hookrightarrow Y$ が余次元 $c$ の閉埋め込みで, $(\mathcal{E}, \nabla)$ が連接的な接続付 $\mathcal{O}_Y$ 加群なら,

$$i^!(\mathcal{E}, \nabla) = (i^*\mathcal{E}, i^*\nabla)[-c] \tag{1.5.1.17}$$

となる。次の定理は基本的である。

**定理 1.5.3.** $Z$ を $X$ のスムーズな閉部分多様体とし, $i$, $j$ をそれぞれ $Z \overset{i}{\hookrightarrow} X$, $U = X \setminus Z \overset{j}{\hookrightarrow} X$ という埋め込み写像とする。このとき, $D^b(\mathcal{D}_X)$ の対象 $\mathcal{M}^\bullet$ に対し, 次の *distinguished triangle* がある。

$$\begin{tikzcd}
i_+ i^! \mathcal{M}^\bullet \arrow[rr] & & \mathcal{M}^\bullet \arrow[dl] \\
& j_+ \mathcal{M}^\bullet|_U \arrow[ul, "{[1]}"] &
\end{tikzcd}$$

### 1.5.2 性質の継承

以下では, MIC$(X)$ の対象についての性質を考える。$(\mathcal{E}, \nabla)$ が性質 $\mathcal{P}$ を満たすことを $\mathcal{P}\big((\mathcal{E}, \nabla)\big)$ で表す。スムーズな射 $f : X \to Y$ に対して

$$\mathcal{P}\big((\mathcal{E}, \nabla)\big) \Rightarrow \mathcal{P}\big(R^i_{DR} f_*(\mathcal{E}, \nabla)\big) \quad \forall i \tag{1.5.2.1}$$

となるための性質 $\mathcal{P}$ についての判定条件に興味がある。これは $\mathcal{P}$ が「$G$ 接続である」という性質の場合に応用することを念頭に置いているものの, 実際には, 広い範囲の性質について応用が可能である。例えば $\mathcal{P}$ が「$\mathcal{O}$ 加群として連接的である」とか, 「正則である」, 或いは「exponents が rational である」等々。

**定義 1.5.4.** $\mathcal{P}$ がエタール位相について局所的である (resp. エタール有限射の順像について, 安定 (stable) である) とは, 任意の MIC$(X)$ の対象 $(\mathcal{E}, \nabla)$ と任意の $X$ のエタール被覆 $\{V_i\}$ に対して (resp. 任意のエタール有限射 $\pi : X \to X'$ について)

$$\mathcal{P}\big((\mathcal{E}, \nabla)\big) \Leftrightarrow \Big(\mathcal{P}\big((\mathcal{E}, \nabla)|_{U_i}\big) \text{ for } \forall i\Big) \tag{1.5.2.2}$$

$$\Big(\text{resp. } \mathcal{P}\big((\mathcal{E}, \nabla)\big) \Rightarrow \mathcal{P}\big(\pi_*(\mathcal{E}, \nabla)\big)\Big) \tag{1.5.2.3}$$

が成立することである。

また, $\mathcal{P}$ が閉部分集合に継承されるとは, スムーズな $K$ 多様体の間の任意の閉埋め込み $i : Y \hookrightarrow X$ に対して $\mathcal{P}\big((\mathcal{E}, \nabla)\big)$ ならば $\mathcal{P}\big(i^*(\mathcal{E}, \nabla)\big)$ となることを言う。更に $\mathcal{P}$ が強完全であるとは, $\mathcal{P}(0)$ であって, かつ任意の完全列

$$E_1 \to E \to E_2 \tag{1.5.2.4}$$

に対して, $\big(\mathcal{P}(E_i),\, i = 1, 2\big)$ ならば $\mathcal{P}(E)$ となることを言う。

**補足 1.5.5.**

$$\text{強完全} \;\Leftrightarrow\; \text{完全} + \text{部分商について閉じている}$$

**補題 1.5.6.** もし $\mathcal{P}$ が強完全で, かつエタール位相について局所的であるなら, エタールな有限射の順像にも安定である。

ここで考えているような $\mathrm{MIC}(X)$ の対象の性質, 即ち「$G$ 接続である」, 「連接的 $\mathcal{O}$ 加群である」, 「正則 である」等は皆, 強完全かつエタール位相について局所的であり, また, 閉部分集合にも継承されることを注意しておく。

dévissage についての補題を述べるには, もう少し準備がいる。

**定義 1.5.7.** $K$ 多様体間のスムーズな射 $f : X \to S$ が elementary fibration であるとは,

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "j"] \arrow[dr, "f"'] & \overline{X} \arrow[d, "\overline{f}"] & Z \arrow[l] \arrow[dl, "g"] \\ & S & \end{tikzcd}$$

という可換図式で次のようなものに埋め込めることである。

(i) $Z$ は $\overline{X}$ の被約閉部分スキームであり, $j$ はその補集合の開埋め込みになっている。

(ii) $\overline{f}$ は射影的なスムーズ射であり, 幾何的ファイバーは既約, 次元 1 である。

(iii) $g$ はエタール被覆である。

**定義 1.5.8.** 定義 1.5.7 の elementary fibration は $\overline{X} = \mathbb{P}^1_S$, $\overline{f} = \mathrm{pr}_S$ であって $Z$ が $f$ の切断 $\sigma_i$ $(i = 1, \ldots, \infty)$ 達の非連結和である場合に rational であると言う。(以下 r.e.f. と書く。) ここで, $\sigma_\infty$ は $\sigma_\infty : S \to Z_\infty = \{\infty\} \times S \subset \mathbb{P}^1_S$ という切断を表す。つまり, 次のようになっている。

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "j"] \arrow[dr, "f"'] & \mathbb{A}^1_S \arrow[d, "\mathrm{pr}_S"] & \coprod_{i=1}^r \sigma_i(S) \arrow[l] \arrow[dl] \\ & S \arrow[ur, bend right, "\sigma_i"'] & \end{tikzcd}$$

**定義 1.5.9.** 定義 1.5.7 の elementary fibration が coordinated (以下 c.e.f. と書く) であるとは, それが次のような図式に埋め込まれることである。

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "j"] \arrow[d, "\pi"] \arrow[ddr, bend right=60, "f"'] & \overline{X} \arrow[d, "\overline{\pi}"] & Z \arrow[l] \arrow[d, "\pi'"] \\ Y \arrow[r, "j'"] \arrow[dr, "f'"'] & \mathbb{P}^1_S \arrow[d, "\mathrm{pr}_S"] & Z' \arrow[l] \arrow[dl, "g'"] \\ & S & \end{tikzcd}$$

ここで,

(i) $\overline{\pi}$ は有限射であり, $\pi$ はエタール被覆である。

(ii) $f = f' \circ \pi$, $\overline{f} = \mathrm{pr} \circ \overline{\pi}$, $g = g' \circ \pi'$.

(iii) 図式の下の部分は, $j'(Y) \subset \mathbb{A}^1_S$ となるような elementary fibration になっている。

**定義 1.5.10.** 高さ $d$ の c.e.f. の tower とは

(i) $d = 0$ の場合はエタール被覆

(ii) $d > 0$ の場合は, 次のように $d$ 個の c.e.f. の合成になっているようなスムーズ射 $f : X \to S$

$$X = X_d \to X_{d-1} \to \cdots \to X_1 \to X_0 = S$$

であるようなものである。

M. Artin の定理を, 次のように精密にすることが出来る (cf. [GV73, Exp. XI])。

**命題 1.5.11.** $f : X \to S$ をスムーズな $K$ 多様体の間のスムーズ射とする。この時, エタール射 $S' \to S$ と $X_{S'}$ の有限開被覆 $\{U_\alpha\}$ で, 各 $U_\alpha \to S'$ が *coordinated elementary fibration* の *tower* になるようなものが存在する。

**定義 1.5.12.** $f : X \to S$ をスムーズ $K$ 多様体の間のスムーズ射とする。$f$ の level $j \geq 0$ の Artin 集合 $A_j(f)$ とは, 次の条件を満たすような全てのエタール射 $S' \to S$ の像の和集合である。

(i) $X_{S'}$ には開被覆 $\{U_\alpha\}$ で $f_{S'}$ の各 $U_\alpha$ への制限が c.e.f. の tower になっているものがある。

(ii) $|\boldsymbol{\alpha}| = \sum \alpha_i = p$ として, $0 \leq |\boldsymbol{\alpha}| - 1 \leq j$ なる任意の $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_0, \ldots, \alpha_p)$ に対して, $U_{\boldsymbol{\alpha}} = \bigcap_{i=0}^p U_{\alpha_i}$ の有限開被覆 $\{U_{\boldsymbol{\alpha},\beta}\}$ で $f_{S'}$ の $U_{\boldsymbol{\alpha},\beta}$ への制限が c.e.f. の tower になっているものが存在する。

(iii) $(|\boldsymbol{\alpha}| - 1) + (|\boldsymbol{\beta}| - 1) \leq j$ となる任意の $\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}$ に対して $U_{\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}} = \bigcap_{i=0}^p U_{\boldsymbol{\alpha},\beta_i}$ の有限開被覆 $\{U_{\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\gamma}\}$ で, $f_{S'}$ の $U_{\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\gamma}$ への制限が c.e.f. の tower になっているものが存在する。

(iv) 同様なことが, 任意の $(|\boldsymbol{\alpha}| - 1) + (|\boldsymbol{\beta}| - 1) + \cdots \leq j$ となるようなものについて成立する。

任意の $j$ に対して, $A_j(f) \supset A_{j+1}(f)$ が成立することがすぐに確かめられる。

**系 1.5.13.** $\forall j \geq 0$ に対して $A_j(f)$ は $S$ の空でない開集合になる。

以上の準備の元で, 次の二つの dévissage の補題を述べることが出来る。

**補題 1.5.14.** $\mathcal{P}$ を強完全でエタール位相について局所的な性質であるとする。ここで

*(∗)* $\forall$ *r.e.f.* $f : X \to S$ で $S$ があるアファイン $K$ 空間 $\mathbb{A}^d_K$ 上エタールかつアファインであるもの, および $\forall(\mathcal{E}, \nabla) \in \mathrm{MIC}(X)$ に対して,

$$\mathcal{P}\big((\mathcal{E}, \nabla)\big) \Rightarrow \mathcal{P}(R^i_{DR} f_*(\mathcal{E}, \nabla)) \textit{ for } i = 0, 1.$$

を仮定する。このとき, 任意の $i \geq 0$ とスムーズ $K$ 多様体間のスムーズ射 $f: X \to S$, および $(\mathcal{E}, \nabla) \in \mathrm{MIC}(X)$ に対して

$$\mathcal{P}\big((\mathcal{E}, \nabla)\big) \Rightarrow \mathcal{P}\big(\big(R^i_{DR} f_*(\mathcal{E}, \nabla)\big)|_{A_i(f)}\big) \tag{1.5.2.5}$$

が成立する。

**補題 1.5.15.** 更に $\mathcal{P}$ が $\mathcal{O}_X$ 加群としての連接性を意味するものとする。ここで,

*(**)* $\forall$ *r.e.f.* $f: X \to S$ で $S$ があるアファイン $K$ 空間 $\mathbb{A}^d_K$ 上エタールかつアファインであるもの, および $\forall (\mathcal{E}, \nabla) \in \mathrm{MIC}(X)$ で単純かつ *cyclic* なものに対して, ある稠密な開部分スキーム $U \subset S$ が存在して

$$\mathcal{P}\big((\mathcal{E}, \nabla)\big) \Rightarrow \mathcal{P}\big(\big(R^j_{DR} f_*(\mathcal{E}, \nabla)\big)|_U\big) \text{ for } j = 0, 1$$

を仮定する。すると, 任意のスムーズ $K$ 多様体間のスムーズ射 $f: X \to S$ および, 任意の $(\mathcal{E}, \nabla) \in \mathrm{MIC}(X)$ に対して, ある稠密な開部分スキーム $U \subset S$ が存在して *(*これは $(\mathcal{E}, \nabla)$ に依存する*)*,

$$\mathcal{P}\big(\big(R^j_{DR} f_*(\mathcal{E}, \nabla)\big)|_U\big) \text{ for } \forall j \tag{1.5.2.6}$$

が成立する。

**補足 1.5.16.** $\mathrm{MIC}(X)$ の単純かつ cyclic な対象は, 特に $\mathcal{O}_X$ 加群として有限生成自由である。

補題 1.5.15 によって, 証明しようとしている $G$ 接続の順像についての主定理が $f: X \to S$ が r.e.f. であり, $(\mathcal{E}, \nabla)$ が自由な $G$ 接続である場合に帰着される。同様にホロノミーが順像に対して保存されることも示される。

ここでは 補題 1.5.14 の証明のスケッチをすることにする。$X$, $S$ は連結であるとしてよい。また, $f$ は純相対次元 $d$ であるとする。

*(*証明*)*. いくつかの Step に分けて行う。

**Step 1.** $d = 0$ とする。$i = 0$ のときのみ考えればよい。この場合, $A_0(f)$ は $f$ が固有射になるような $S$ の極大開部分集合になる。この時, $R^0_{DR} f_* = f_*$ であり, $\mathcal{P}$ が有限エタールによる順像について安定であることから結論が出る。

**Step 2.** 次に $d > 0$ とする。$0 \leq i \leq 2d$ で考えれば十分である。$S$ を $A_i(f)$ で置き換え, 更にエタール射 $S' \to S$ であって $f_{S'}: X_{S'} \to S'$ が 定義 1.5.12 の中の条件を満たすようなものだとする。次の Čeck スペクトル系列を考える。

$$E_1^{p, i-p} = \bigoplus_{\alpha_0 < \cdots < \alpha_p} R^{i-p}_{DR} f_{\boldsymbol{\alpha} *}\big((\mathcal{E}, \nabla)|_{U_{\boldsymbol{\alpha}}}\big) \Rightarrow R^i_{DR} f_*(\mathcal{E}, \nabla). \tag{1.5.2.7}$$

ここで, 少しの間, $f: X \to S$ が c.e.f. の tower の場合は証明出来ているものと仮定しよう。すると, $i = 0$ の場合は

$$\begin{aligned}
\mathcal{P}\big(R^0_{DR} f_{\boldsymbol{\alpha} *}\big((\mathcal{E}, \nabla)|_{U_{\boldsymbol{\alpha}}}\big)\big) \text{ for } \forall \alpha &\Rightarrow \mathcal{P}(E_1^{0,0}) \\
&\Rightarrow \mathcal{P}(E_\infty^{0,0}) \\
&\Rightarrow \mathcal{P}\big(R^0_{DR} f_*(\mathcal{E}, \nabla)\big)
\end{aligned}$$

が言える。($E_\infty^{0,0} = R^0_{DR} f_*(\mathcal{E}, \nabla)$ に注意。) 従って, Čeck スペクトル系列 (1.5.2.7) を利用して, $i$ についての帰納法を使うことが出来る。即ち,

$$\mathcal{P}\big(R^{i-p}_{DR} f_{\boldsymbol{\alpha}*}(\mathcal{E}, \nabla)|_{U_{\boldsymbol{\alpha}}}\big) \text{ for } \forall \boldsymbol{\alpha} \text{ s.t. } |\boldsymbol{\alpha}| = p + 1 > 1 \tag{1.5.2.8}$$

を仮定すると,

$$\mathcal{P}(E_1^{p,i-p}) \text{ for } \forall p \Rightarrow \mathcal{P}(E_\infty^{p,i-p}) \text{ for } \forall p \Rightarrow \mathcal{P}\big(R^i_{DR} f_*(\mathcal{E}, \nabla)\big) \tag{1.5.2.9}$$

が言えるので, 後は

$$\mathcal{P}\big(R^i_{DR} f_{\boldsymbol{\alpha}*}(\mathcal{E}, \nabla)|_{U_\alpha}\big) \text{ for } \forall \alpha \tag{1.5.2.10}$$

さえ言えばいいことになるが, $U_\alpha \to S$ は c.e.f. の tower になっているからである。

**Step 3.** 以上から, c.e.f. の tower の場合を証明すればよいことが分った。$X = X_d \to X_{d-1} \to \cdots \to X_0 = S$ を c.e.f. の tower としよう。ここで, Leray のスペクトル系列を使うと $d = 1$, 即ち, 単なる c.e.f. の時に証明すればよいことが分る。

**Step 4.** $f$ を次のような c.e.f. とする。

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "j"] \arrow[d, "\pi"] \arrow[ddr, bend right=60, "f"'] & \overline{X} \arrow[d, "\overline{\pi}"] & Z \arrow[l] \arrow[d, "\pi'"] \\
Y \arrow[r, "j'"] \arrow[dr, "f'"'] & \mathbb{P}^1_S \arrow[d, "\mathrm{pr}_S"] & Z' \arrow[l] \arrow[dl, "g'"] \\
& S &
\end{tikzcd}$$

$\mathcal{P}$ はエタール局所的な性質であるので, $S$ をエタール被覆で取りかえて, 上の図式の下の部分は r.e.f. になっていると仮定してもかまわない。また, $\pi$ はエタールなので, Leray スペクトル系列が退化する。即ち,

$$R^i_{DR} f_*(\mathcal{E}, \nabla) = R^i_{DR} f'_* \circ \pi_*(\mathcal{E}, \nabla) \tag{1.5.2.11}$$

となる。故に (*) の仮定から

$$\mathcal{P}\big((\mathcal{E}, \nabla)\big) \Rightarrow \mathcal{P}\big(\pi_*(\mathcal{E}, \nabla)\big) \Rightarrow \mathcal{P}\big(R^i_{DR} f'_* \circ \pi_*(\mathcal{E}, \nabla)\big) \tag{1.5.2.12}$$

となって, 証明が完成する。 □

二番目の補題の証明はもっと難しい。ただし, $\mathcal{P}$ が閉部分集合にも継承されると仮定すると, 閉部分多様体についての exact triangle を用ることで, $\mathcal{D}$ 加群の理論の枠内での簡単な証明が得られる。

# 1.6　$p$ 進的な評価と主局所定理の証明

## 1.6.1　主大域定理の主局所定理への帰着

再度, この講義での主定理を述べておこう。

**定理 1.6.1** (主大域定理)**.** $f : V \to W$ をスムーズな $\overline{\mathbb{Q}}^{\mathrm{alg}}$ 多様体間のスムーズ射とする。$(\mathcal{E}, \nabla)$ を $G(V)$ の対象とし, $W^{(i)} \subset W$ を $(h^i f_+\mathcal{E})|_{W^{(i)}}$ が $\mathcal{O}_{W^{(i)}}$ 連接的になるような開集合であるとする。このとき, $(h^i f_+\mathcal{E})|_{W^{(i)}} \in \mathrm{Ob(W^{(i)})}$ となる。

dévissage の補題によって, この定理は $\mathcal{E}$ が自由 $\mathcal{O}_{\mathcal{V}}$ 加群で, $f$ が r.e.f. であり, $i = 0, 1$ で $W^{(i)} = W$ である場合に帰着出来る。実際には更に $h^i f_+\mathcal{E}$ が有限型自由な $\mathcal{O}_W$ 加群であると仮定してもよい。このような状況は, ある $S \subset \mathcal{V}_K$, $[K : \mathbb{Q}] < \infty$ 上の場合に延長することが出来る。つまり, $f$ はスムーズ $S$ モデル間の射 $f_S : X_S \to Y_S$ からの基底変換で得られるとしてよい。これを $S$ の閉点で局所化すると, 次のような状況が生ずる。

まず $K$ は $\mathbb{Q}_p$ の有限次拡大体とし, $|\quad|$, $\mathcal{V}$, $k$ を各々絶対値, 整数環, 剰余体とする。次のスムーズ $\mathcal{V}$ スキーム達の可換図式を考える。

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "j"] \arrow[dr, "f"'] & \overline{X} = \mathbb{P}^1_Y \arrow[d, "\overline{f} = \mathrm{pr}"] & Z = \coprod_{\nu \in \mathcal{S}} Z_\nu \arrow[l] \arrow[dl, "g"] \\
& S &
\end{tikzcd}$$

ここで, $\mathcal{S}$ は $\infty$ を含む有限集合であり, $j$ は開埋め込みであり, $\overline{f}$ は射影, また $g$ によって同型 $Z_\nu \simeq Y$ を誘導するものとする。更に, $Y$ は $\mathbb{A}^d_{\mathcal{V}}$ 上アファインエタールと仮定し, 座標系を $\boldsymbol{\lambda} = (\lambda_1, \ldots, \lambda_d)$ と書く。また, $t$ で, 標準的な $\mathbb{P}^1_Y$ の「縦の」座標を表す。$\nu \in \mathcal{S} \setminus \{\infty\}$ に対して $Z_\nu = V(t - \theta_\nu)$, $\theta_\nu \in \mathcal{O}(Y)$ と書けているとすると, $\nu \neq \nu' \in \mathcal{S} \setminus \{\infty\}$ の時は $\theta_\nu - \theta_{\nu'} \in \mathcal{O}(Y)^\times$ となるとする。また, $Z_\infty = V(1/t)$ と書けているとする。

$\mathcal{M}$ を有限型自由な $\mathcal{O}_X$ 加群で階数 $\mu$ であるものとし, $\nabla$ を積分可能な $\mathcal{M}$ 上の $X/\mathcal{V}$ 接続とする。$(\mathcal{M}, \nabla)_K$ は正則で, かつ指数が全て $\mathbb{Z}_p$ の non-Liouville 数からなるとする。更に, $h^i(f_* DR_{X/Y}\mathcal{M})$, $i = 0, 1$ は $\mathcal{O}_Y$ 上 有限型自由だと仮定する。$R$ を $(\mathcal{M}, \nabla)$ の $X/\mathcal{V}$ 上の generic な収束半径とする。

このような状況のもと, 主局所定理は次のように書ける。

**定理 1.6.2** (主局所定理)**.** $h^i(f_* DR_{X/Y}\mathcal{M})_K$ の *generic* な収束半径を $R_i$ で表すとき,

$$R_0 \geq R, \quad R_1 \geq R^{\mu^2+1}. \tag{1.6.1.1}$$

が成立する。

ここで

$$\begin{aligned}\rho_{Y/S}\bigl(R^i_{DR}f_*(\mathcal{M},\nabla)\bigr) &= \sum_{v\in\Sigma_S}\log\frac{1}{R_{Y,v}\bigl(R^i_{DR}f_*(\mathcal{M},\nabla)\bigr)}\\ &\leq \sum_{v\in\Sigma_S}\log\frac{1}{\bigl(R_{X,v}(\mathcal{M},\nabla)\bigr)^{\mu^2+1}}\\ &\leq (\mu^2+1).\end{aligned}$$

が成立することに注意すると, 上の定理から $R^i_{DR}f_*(\mathcal{M}.\nabla)$ が $G$ 接続であることが導かれることが分る。つまり, 主大域定理は主局所定理に帰着される。

### 1.6.2 主局所定理の証明

早速証明に入ろう。まず, $\mathcal{M}\simeq\mathcal{O}^\mu_X$ 上の接続を明示的に書く。

$$\nabla = d_{X/\mathcal{V}} - G_{1,\underline{0}}d_{X/\mathcal{V}}t - \sum_{i=1}^d G_{0,\underline{1}}d_{X/\mathcal{V}}\lambda_i$$
$$G_{1,\underline{0}},\ G_{0,\underline{1}_i}\in M_\mu\bigl(\mathcal{O}(X)\bigr),\quad i=1,\dots,d.$$

すると, 対応する de Rham 複体は次のように書ける。

$$\begin{aligned}DR_{X/Y}\mathcal{M} &= 0\to\mathcal{O}^\mu_X \xrightarrow{d_{X/Y}-G_{1,\underline{0}}d_{X/Y}t} \bigl(\Omega^1_{X/Y}\bigr)^\mu \to 0\\ &\simeq 0\to\mathcal{O}^\mu_X \xrightarrow{\frac{\partial}{\partial t}-G_{1,\underline{0}}} \mathcal{O}^\mu_X\to 0\end{aligned}$$

まずは簡単な

$$h^0 = h^0DR_{X/Y}\mathcal{M} = \mathrm{Ker}_{\mathcal{O}(X)^\mu}\Bigl(\frac{\partial}{\partial t}-G_{1,\underline{0}}\Bigr) \tag{1.6.2.1}$$

の方から考えよう。これは, 階数が $\mu'\leq\mu$ の有限生成自由な $\mathcal{O}(Y)$ 加群で, 接続は

$$\square\Bigl(\frac{\partial}{\partial\lambda_i}\Bigr) = \frac{\partial}{\partial\lambda_i} - G_{0,\underline{1}_i},\quad i=1,\dots,d \tag{1.6.2.2}$$

と書けている。$h^0$ の $\mathcal{O}(Y)$ 上の基底を $(e_1,\dots,e_\mu)$, $(e_i\in\mathcal{O}(X)^{\mu'})$ とする。これを $K(X)^\mu$ の元と見做すと, これは $K(X)$ 上線形独立になっている。従って, これを含む $K(X)$ の基底 $(e_1,\dots,e_\mu)$ を取ることが出来る。(実際には $\mathcal{O}(X)$ の基底となるように取ることが出来る。) 主張は $h^0\otimes K(Y)$ の基底として $(e_1,\dots,e_{\mu'})$ を取り, $\mathcal{M}\otimes K(X)$ の基底として $(e_1,\dots,e_\mu)$ を取った場合の generic な収束半径の定義 (定義 1.2.3) から明らかである。

次に

$$h^1DR_{X/Y}\mathcal{M} = \mathcal{O}(X)^\mu\Big/\Bigl(\frac{\partial}{\partial t}-G_{1,\underline{0}}\Bigr)\mathcal{O}(X)^\mu \tag{1.6.2.3}$$

の方に移ろう。接続は

$$\square\Bigl(\frac{\partial}{\partial\lambda_i}\Bigr) = \frac{\partial}{\partial\lambda_i} - G_{0,\underline{1}_i} \tag{1.6.2.4}$$

から誘導されるものである。($\nabla$ の積分可能から, well-defined になる。) ここで, $\mathcal{Y}(T, \boldsymbol{\Lambda})$ を $(\mathcal{M}, \nabla)$ の $\widehat{X}_K$ の閉点 $(x_0, \boldsymbol{z})$ ($\boldsymbol{\lambda} = \boldsymbol{z}$ は $\widehat{Y}_K$ の点) における基本解行列とする。即ち,

$$\frac{\partial \mathcal{Y}}{\partial T}(t, \lambda) = G_{1,\underline{0}}(t, \boldsymbol{\lambda}), \quad \frac{\partial \mathcal{Y}}{\partial \Lambda_i}(t, \lambda) = G_{0,\underline{1}_i}(t, \boldsymbol{\lambda}) \tag{1.6.2.5}$$

が成り立つ。$\mathcal{Y}(T, \boldsymbol{\Lambda})$ を

$$\mathcal{Y}(T, \boldsymbol{\Lambda}) = \sum G_{i,\boldsymbol{\alpha}}(x_0, \boldsymbol{z})(T - x_0)^i (\boldsymbol{\Lambda} - \boldsymbol{z})^{\boldsymbol{\alpha}} \tag{1.6.2.6}$$

と書く。

**命題 1.6.3.** ある定数 $C_1$ と $H_{i,\boldsymbol{\alpha}} \in M_\mu(\mathcal{O}(Y_K)[t])$ で

$$G_{i,\boldsymbol{\alpha}} = \frac{H_{i,\boldsymbol{\alpha}}}{\prod_{\nu \neq \infty} (t - \theta_\nu)^{i + |\boldsymbol{\alpha}| + C_1}}$$

$$\deg_t H_{i,\boldsymbol{\alpha}} \leq \mathrm{Card}(\mathcal{S})(i + |\boldsymbol{\alpha}|) - 2i + C_1$$

となるものが存在する。

*(証明).* これは, $t = \theta_\nu$, $t = \infty$ における特異点が確定特異点であること, 及び $d/dt$ が $\infty$ で位数 2 の零点を持つことから分る。 □

ここで,

$$\mathcal{X}(t, \boldsymbol{z}, \boldsymbol{\Lambda}) = \mathcal{Y}(t, \boldsymbol{\Lambda})\mathcal{Y}(t, \boldsymbol{z})^{-1} = \sum_{\boldsymbol{\alpha}} G_{0,\boldsymbol{\lambda}}(t, \boldsymbol{\lambda})(\boldsymbol{\lambda} - \boldsymbol{z})^{\boldsymbol{\alpha}} \tag{1.6.2.7}$$

について考える。Dwork-Robba の定理 (系 1.4.6) より, ある定数 $C_2$ があって

$$|G_{i,\boldsymbol{\alpha}}|_{X,v} \leq C_2(i + |\boldsymbol{\alpha}|)^{\mu - 1} R^{-i + |\boldsymbol{\alpha}|} \tag{1.6.2.8}$$

となることが分る。

また, 命題 1.6.3 で $i = 0$ の場合に $(t, \boldsymbol{\lambda}) \in \overline{X}_K^{\mathrm{an}}$ への特殊化を考えると

$$|G_{0,\boldsymbol{\alpha}}(t, \boldsymbol{\lambda})| \leq C_2(|\boldsymbol{\alpha}|)^{\mu - 1} R^{-|\boldsymbol{\alpha}|} \left( \frac{|t|^{\mathrm{Card}\mathcal{S}}}{\prod_{\nu \neq \infty} |t - \theta_\nu|} \right)^{|\boldsymbol{\alpha}| + C} \tag{1.6.2.9}$$

が言える。これらから

**補題 1.6.4.**

$$|\boldsymbol{\lambda} - \boldsymbol{z}| < R \frac{1}{|t|} \prod_{\nu \neq \infty} \left| \frac{t - \theta_\nu}{t} \right| \tag{1.6.2.10}$$

の下では, $\mathcal{X}(t; \boldsymbol{z}, \boldsymbol{\lambda})$ は収束する。

が分る。これが, 主局所定理の証明のポイントである。$\boldsymbol{z}$ と $\boldsymbol{\lambda}$ の相互的な役割に注意すれば, 条件 (1.6.2.10) の下では, $\mathcal{X}$ は可逆な解析関数の行列であり,

$$\mathcal{X}(t;\boldsymbol{z},\boldsymbol{\lambda})\mathcal{X}(t;\boldsymbol{\lambda},\boldsymbol{z}) = I_\mu \tag{1.6.2.11}$$

が成立する。ここで, $\rho \in (0,1]$ に対して, 半径が $\rho$, 中心が $|\quad|_\rho$ であるような $\widehat{Y}$ 内の閉円板 $D(\boldsymbol{z},\rho^+)$, 及びその上の sup. norm $|\quad|_\rho$ を考える。($\rho = 1$ の時は, $D(\boldsymbol{z},\rho^+) = \widehat{Y}_K$, $|\quad|_\rho = |\quad|_\rho$ となる。) $D(\boldsymbol{z},\rho^+)$ 上の有理型関数のなす体を $\mathcal{M}_\rho(\boldsymbol{z})$ とし, その $|\quad|_\rho$ による完備化を $\mathcal{K}_\rho$ で表す。($\rho = 1$ の時は, $\mathcal{K}_1$ は $\kappa(Y)$ の $|\quad|_Y$ による完備化と一致する。) さて, 次の微分方程式系を考える。

$$\frac{\partial Z}{\partial x} = G_{1,\underline{0}} Z \tag{1.6.2.12}$$

これを, $\mathcal{K}_\rho(t)/\mathcal{K}_\rho$ 接続と見做す。任意の $h \in \mathcal{O}(Y_K)$ に対して $|h|_\rho \leq |h|_1 = |h|_Y$ が成立しているので,

$$\left|\sum a_i t^i\right|_{X,\rho} = \max |a_i|_\rho \quad a_i \in \mathcal{K}_\rho \tag{1.6.2.13}$$

という絶対値に関する (1.6.2.12) の generic な収束半径を $R_{X,\rho}$ で表すと,

$$R_{X,\rho} \geq R_{X,1} = R \tag{1.6.2.14}$$

となっている。(任意の $h \in \mathcal{O}(X_K)$ に対して $|h|_{X,\rho} \leq |h|_{X,1} = |h|_X$ となることに注意しよう。) ここで, Adolphson の定理を $(\mathcal{K}_\rho, |\quad|_\rho)$ という付値体の上で適用する。$\varepsilon \in (0,1)$ に対して

$$\mathcal{A}_{\rho,\varepsilon} = \left\{ x \in \mathcal{K}_\rho \,\middle|\, |x-\theta_\nu|_\rho > R^{\mu^2}\varepsilon \text{ for } \forall\nu \in \mathcal{S}\setminus\{\infty\},\ |x|_\rho < R^{-\mu^2}\varepsilon^{-1} \right\} \tag{1.6.2.15}$$

と置く。これは, $\mathcal{K}_\rho$ 解析空間になる。

**系 1.6.5.** 任意の $\forall\rho \in (0,1]$, $\varepsilon \in (0,1)$ に対して, 標準的な写像

$$\mathcal{O}(\mathcal{X}_K) \otimes \mathcal{K}_\rho \to \mathcal{O}(\mathcal{A}_{\rho,\varepsilon})$$

により,

$$\mathcal{O}(X_K)^\mu \Big/ \Big(\frac{\partial}{\partial t} - G_{1,\underline{0}}\Big)\mathcal{O}(X_K)^\mu \otimes_K \mathcal{K}_\rho \simeq \mathcal{O}(\mathcal{A}_{\rho,\varepsilon})^\mu \Big/ \Big(\frac{\partial}{\partial t} - G_{1,\underline{0}}\Big)\mathcal{O}(\mathcal{A}_{\rho,\varepsilon})^\mu$$

という $\mathcal{K}_\rho$ 線形空間の同型が引き起こされる。

さて, $\rho$, $\varepsilon$ を上と同様として, 次の $\overline{X}_K^{\mathrm{an}}$ の開部分解析空間を考える。

$$\begin{aligned}\mathfrak{X}_{\rho,\varepsilon} = \Big\{ (t,\boldsymbol{\lambda}) \in \overline{X}_K^{\mathrm{an}} \,\Big|\, &|\boldsymbol{\lambda}-\boldsymbol{z}| \leq \rho, |t-\theta_\nu(\boldsymbol{\lambda})| > R^{\mu^2}\varepsilon, \\ &\text{for } \forall\nu \in \mathcal{S}\setminus\{\infty\},\ |t| < R^{-\mu^2}\varepsilon^{-1} \Big\}\end{aligned} \tag{1.6.2.16}$$

このとき, 自然な準同型

$$\mathcal{O}(\mathfrak{X}_{\rho,\varepsilon}) \hookrightarrow \mathcal{O}(\mathcal{A}_{\rho,\varepsilon}) \tag{1.6.2.17}$$

があることに注意しておく。

**補題 1.6.6.** $\rho = R^{\mu^2+1}\varepsilon$ とすると, $(t, \boldsymbol{\lambda}) \in \mathfrak{X}_{\rho,\varepsilon}$ については (1.6.2.10) が自動的に成立する。

*(証明).* $|t - \theta_{\nu_0}(\boldsymbol{\lambda})| < 1$ とすると, $|t| \leq 1$, $\nu \neq \nu_0$ に対しては $|t - \theta_\nu(\boldsymbol{\lambda})| = 1$ となるので,

$$R\frac{1}{|t|}\prod_{\nu\neq\infty}\Big|\frac{t-\theta_\nu}{t}\Big| > RR^{\mu^2}\varepsilon = R^{\mu^2+1}\varepsilon.$$

一方仮定より $|\boldsymbol{\lambda} - \boldsymbol{z}| \leq R^{\mu^2}\varepsilon$. また, $|t| > 1$ なら, 任意の $\nu$ に対して $|t - \theta_\nu(\boldsymbol{\lambda})| = |t|$ となり, 更に

$$R\frac{1}{|t|}\prod_{\nu\neq\infty}\Big|\frac{t-\theta_\nu}{t}\Big| > RR^{\mu^2}\varepsilon$$

となるので, 同様にして O.K. である。最後に任意の $\nu$ に対して $|t| = |t - \theta_\nu(\boldsymbol{\lambda})| = 1$ であれば,

$$R\frac{1}{|t|}\prod_{\nu\neq\infty}\Big|\frac{t-\theta_\nu}{t}\Big| = R > RR^{\mu^2+1}\varepsilon$$

より言える。 □

というわけで, 補題 1.6.4 から, 次が言える。

**系 1.6.7.** $\rho = R^{\mu^2+1}$ のとすると, 任意の $\varepsilon \in (0,1)$ に対して

$$\mathcal{X}(t; \boldsymbol{z}, \boldsymbol{\lambda}) \in GL(\mu, \mathcal{O}(\mathcal{A}_{\rho,\varepsilon})). \tag{1.6.2.18}$$

以上の準備のもとで, $\mathcal{O}(Y)$ 加群

$$h^1 = h^1 DR_{X/Y}\mathcal{M} \simeq \mathcal{O}(X)^\mu \Big/ \Big(\frac{\partial}{\partial t} - G_{1,\underline{0}}\Big)\mathcal{O}(X)^\mu \tag{1.6.2.19}$$

について考える。$\Omega = (\omega_{ij})_{\substack{1\leq i\leq\mu\\1\leq j\leq N}}$ を $\mathcal{O}(X)$ 係数の行列で, 各列が $\mathcal{O}(Y)$ 加群 $h^1$ の基底になっているものとする。de Rham コホモロジーを取る操作は閉埋め込み $\{\boldsymbol{z}\} \hookrightarrow Y_K$ による基底変換と可換なので, $\Omega(\boldsymbol{z})$ は $h^1\big(DR_{X_{\boldsymbol{z}}/\kappa(\boldsymbol{z})}\mathcal{M}_{\boldsymbol{z}}\big)$ の $\kappa(\boldsymbol{z})$ 上の基底になっている。接続 □ の定義から $\mathcal{X}(t; \boldsymbol{z}, \boldsymbol{\lambda})\Omega(\boldsymbol{z})$ は変数を $\boldsymbol{\lambda}$ とするときの $h^1\big(DR_{X_{\boldsymbol{\lambda}}/\kappa(\boldsymbol{\lambda})}\mathcal{M}_{\boldsymbol{\lambda}}\big)$ の horizontal basis になっている。大切な点は, 比較定理から行列 $\mathcal{R}(\boldsymbol{\lambda}) \in GL(\mu, \mathcal{K}_\rho)$ で

$$\mathcal{X}(t; \boldsymbol{z}, \boldsymbol{\lambda})\Omega(\boldsymbol{z}) = \Omega(\boldsymbol{\lambda})\mathcal{R}(\boldsymbol{\lambda})\Big(\mod \Big(\frac{\partial}{\partial t} - G_{1,\underline{0}}\mathcal{O}(\mathcal{A}_{\rho,\epsilon})^\mu\Big)\Big) \tag{1.6.2.20}$$

となるものが存在することである。定義から $\mathcal{R}(\boldsymbol{\lambda})$ は接続 □ の $\boldsymbol{z} \in \widehat{Y}_K$ における基本解行列になっており, しかも, 系 1.6.7 より任意の $\varepsilon \in (0,1)$ および任意の $|\boldsymbol{\lambda} - \boldsymbol{z}| < R^{\mu^2+1}\varepsilon$ に対して収束することが分る。そして, ここから主局所定理が得られるのであった。

# 付録 A

## A.1 $(1+X)^\alpha$

### A.1.1 二項級数

$p$ を素数とする。一般に $\alpha \in \mathbb{Z}_p$ の時, $\binom{\alpha}{n} = \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}$ として

$$(1+X)^\alpha = \sum_{n \geq 0} \binom{\alpha}{n} X^n \tag{A.1.1.1}$$

は $D(0, 1^-)$ の上で解析的である。更に $\alpha \in \mathbb{Q}$ であれば, $G$ 関数になる。さて, $\alpha \notin \mathbb{Q}$ の場合は, この関数は結構たちが悪い。例えば, 次が言える。

**命題 A.1.1.** $F$ を $\mathbb{Q}(X)$ の $|f(X)| = \limsup_{f(x) \neq 0} |f(x)|_p$ による完備化, $\widehat{\overline{F}}$ を $F$ の代数閉包の完備化とする。このとき $(1+X)^\alpha \notin \Omega$ となる。

ひらたく言えば, ある種の代数性を持たないということである。

*(証明).* 仮に $(1+X)^\alpha \in \widehat{\overline{F}}$ とすると, $(1+X)^\alpha \pmod p$ は $\mathbb{F}_p(X)$ 上代数的になる。従って,

$$\sum_{i=0}^{N} c_i(X)(1+X)^{\alpha i} = 0 \pmod{p\mathbb{Z}_p[[X]]} \tag{A.1.1.2}$$

なる $c_i(X) \in Z_p[X]$ が存在するはずである。$c_i(X)$ を $1+X$ で展開して整理すると,

$$\sum_{i,k} c_{i,k}(1+X)^{\alpha i + k} = 0 \pmod{p\mathbb{Z}_p[[X]]} \tag{A.1.1.3}$$

となるような $c_{i,k} \in \mathbb{Z}_p$ があることになる。($c_{i,k}$ の少なくとも一つは $0 \pmod p$ でない。) ここで $\alpha \notin \mathbb{Q}$ のとき, $\alpha i + k$ は全て異なることに注意すると, 以下の補題に矛盾する。 □

**補題 A.1.2.** $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{Z}_p$ が全て異なる時, $(1+X)^{a_i} \pmod{p\mathbb{Z}_p}$ は線形独立である。

*(証明).* 線形独立でないものがあったと仮定する。線形従属な組のうち極小なものを取り, $|\lambda_i| = 1$ なるような $\lambda_i \in \mathbb{Z}_p$ に対して

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i (1+X)^{a_i} = 0 \pmod p \tag{A.1.1.4}$$

となっていたとする。$a_i \pmod{p^k}$ が全て等しくなるような最大の $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ に対して, $a_i = m + p^k b_i$, $m \in \mathbb{N}$, $b_i \in \mathbb{Z}_p$ と書く。

$$(1+X)^{p^k b_i} = (1+X^{p^k})^{b_i} \pmod{p}$$

となることに注意すると, (A.1.1.4) から

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i (1+X)^{b_i} = 0 \pmod{p}. \tag{A.1.1.5}$$

これを微分して

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i b_i (1+X)^{b_i} = 0 \pmod{p}. \tag{A.1.1.6}$$

(A.1.1.5), (A.1.1.6) から

$$\sum_{i=2}^{n} \lambda_i (b_1 - b_i)(1+X)^{b_i} = 0 \pmod{p}.$$

を得る。ここで, $\lambda_i(b_1 - b_i) \pmod{p}$, $(i = 2, \ldots, n)$ が全て異なることに注意すると, 極小性に矛盾することが分る。 □

## A.2 積分可能性

### A.2.1 曲率と積分可能性

$Y$ をスキーム, $f : X \to Y$ をスムーズな $Y$ スキームとする。$\mathcal{E}$ を準連接な $\mathcal{O}_X$ 加群, $\nabla : \mathcal{E} \to \Omega^1_{X/Y} \otimes \mathcal{E}$ を $X/Y$ 接続とする。この時,

$$\nabla_i(\omega \otimes e) = d\omega \otimes e + (-1)^i \omega \wedge \nabla(e) \tag{A.2.1.1}$$

とすることで,

$$\nabla_i : \Omega^i_{X/Y} \otimes_{\mathcal{O}_Y} \mathcal{E} \to \Omega^{i+1}_{X/Y} \otimes_{\mathcal{O}_Y} \mathcal{E} \tag{A.2.1.2}$$

が定義される。ここで $\omega$ と $e$ は各々 $\Omega_{X/Y}$ と $\mathcal{E}$ の切断であり, $\omega \wedge \nabla e$ は

$$\Omega^I_{X/Y} \otimes_{\mathcal{O}_X} \left(\Omega^1 \otimes_{\mathcal{O}_S} \mathcal{E}\right) \to \Omega^{i+1}_{X/Y} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{E}; \quad \omega \otimes \tau \otimes e \to (\omega \wedge \tau) \otimes e \tag{A.2.1.3}$$

による $\omega \otimes \nabla(e)$ の像を表す。

**定義 A.2.1.** 接続付加群 $(\mathcal{E}, \nabla)$ の**曲率** (*curvature*) $K = K(\mathcal{E}, \nabla)$ を

$$K = \nabla_1 \circ \nabla : \mathcal{E} \to \mathcal{E} \otimes \Omega^2_{X/Y} \tag{A.2.1.4}$$

で定める。

このとき,

**補題 A.2.2.** $(\nabla_{i+1}\otimes\nabla_i)(\omega\otimes e)=\omega\wedge K(e)$

となることがすぐに確かめられる。

**定義 A.2.3.** $\nabla$ が積分可能とは, $K=0$ となることである。

補題 A.2.2 から, 積分可能ということは

$$0\to\mathcal{E}\xrightarrow{\nabla}\Omega^1_{X/Y}\otimes\mathcal{E}\xrightarrow{\nabla_1}\Omega^2_{X/Y}\otimes\mathcal{E}\xrightarrow{\nabla_2}\cdots \tag{A.2.1.5}$$

が複体になるということであるとも言える。また, $D_1$, $D_2$ を $\mathrm{Der}(X/Y)$ の元とするとき,

$$[\nabla(D_1),\nabla(D_2)]-\nabla([D_1,D_2])=(D_1\wedge D_2)(K) \tag{A.2.1.6}$$

が成立するので, $[\nabla(D_1),\nabla(D_2)]-\nabla([D_1,D_2])=0$ が常に成立することであるとも言える。これは別の言い方をすれば, $\mathrm{Der}(X/Y)\to\mathrm{End}_Y(\mathcal{E})$ が Lie 代数の準同型になっているということでもある。(この性質が積分可能という言い方に一番ぴったりしているかもしれない。)

# A.3　$p$ 曲率

## A.3.1　フロベニウスと $p$ 曲率

$T$ を標数 $p>0$ のスキームとする。即ち, $p\mathcal{O}_T=0$ と仮定する。$f:X\to T$ をスムーズな $T$ スキームとする。標数 $p$ の著しい性質として, $D\in\mathrm{Der}(X/T)$ に対して $D^p$ もまた導分 $\mathrm{Der}(X/T)$ の元になるということがある。(Leibniz rule から明らか。)

さて, $(\mathcal{E},\nabla)$ を $X/T$ 接続とする。$\nabla$ から自然に $\mathrm{Der}(X/T)\to\mathrm{End}_T(\mathcal{E})$ が出来るが, このとき

**定義 A.3.1.** 接続付加群 $(\mathcal{E},\nabla)$ の $p$ 曲率 ($p$ 曲率) を

$$\psi(D)=(\nabla(D))^p-\nabla(D^p)\in\mathrm{End}_T(\mathcal{E}) \tag{A.3.1.1}$$

で定める。

$\psi(D)$ はちゃんと $T$ 線型になっている。従って, $\psi:\mathrm{Der}(X/T)\to\mathrm{End}_T(\mathcal{E})$ という写像が定義できる。これは, 加法的であり, 更に $p$ 線形である。つまり $g\in\mathcal{O}_X$ に対して $\psi(gD)=g^p\psi(D)$ となる。

$p$ 曲率が 0 とは, これが零写像になっているということである。これについては, 次の定理が成立する。cf. [Kat70, (5.1)].

**定理 A.3.2** (Cartier)**.** *$X^{(p)}=X\times_{T,F_{abs}}T$ とする。($F_{abs}$ は絶対フロベニウス。) また, $F:X\to X^{(p)}$ で相対フロベニウスを表す。このとき, $X^{(p)}$ 上の準連接層のなす圏 $\mathrm{QC}(X^{(p)})$ と, $\mathrm{MIC}(X/T)$ の対象で $p$ 曲率が 0 のものからなる充満部分圏*

$\mathrm{MIC}^{(\psi=0)}(X/T)$ は同値になる。

$$\begin{aligned} \mathrm{QC}(X^{(p)}) &\simeq \mathrm{MIC}^{(\psi=0)}(X/T) \\ \mathcal{F} &\mapsto (F^*(\mathcal{F}), \nabla) \\ \mathcal{E}^{\nabla} &\leftarrow\!\shortmid (\mathcal{E}, \nabla) \end{aligned}$$

### A.3.2 Grothendieck 予想

さて, ここで大局的な場合を考えることにする。$X$ を $\mathbb{C}$ 上スムーズ連結な代数多様体とする。このとき, $\mathbb{C}$ の部分環 $R$ で $\mathbb{Z}$ 上有限生成なもの, および, その上のスムーズ連結な $R$ スキーム $\mathcal{X}$ で, 幾何的連結ファイバーを持ち, かつ $\mathbb{C}$ 上 $\mathcal{X} \otimes_R \mathbb{C} \simeq X$ となるものを取ることが出来る。$S = \mathrm{Spec} R$ とする。(Cf. §1.2.1). $(M, \nabla)$ を $X/\mathbb{C}$ 上の接続とするとき, $\mathcal{X}/S$ を適当に選べば, $\mathcal{X}/S$ 上の連接的で局所自由な接続付加群 $(\mathcal{M}, \nabla)$ で, $R \to \mathbb{C}$ という基底変換で $(M, \nabla)$ になるようなものを取れる。

この状況で, 有限個を除く素数 $p$ に対して $(\mathcal{M}, \nabla) \otimes_S \mathbb{F}_p$ が $p$ 曲率 0 となるとき, $X/\mathbb{C}$ 上の接続付加群 $(M, \nabla)$ は殆ど全ての $p$ に対して $p$ 曲率 0 であるということにする。これはもちろん, モデル $(\mathcal{X}, S)$ や $(\mathcal{M}, \nabla)$ の取り方によらない。

次の予想は基本的である。

**予想 A.3.3** (Grothendieck, 1969)**.** もし $(M, \nabla)$ が殆ど全ての $p$ に対して $p$ 曲率 0 であれば, $(M, \nabla)$ は $X$ のある有限エタール被覆上で自明になる。

この予想は Gauss-Manin 接続の場合には, Katz によって解かれている [Kat70], [Kat72]。また, 同じく Katz によって, 標数 0 の微分ガロア群と, その標数 $p$ への還元との比較についての予想に一般化されている [Kat82]。この方面については, [vdP95], [And] や [And87] も参照のこと。

# 参考文献

[Ado76] A. Adolphson, *An index theorem for p-adic differential operators*, Trans. A.M.S. **216** (1976), 279–293.

[And] Y. André, *Notes sur la théorie de galois différentielles*, preprint.

[And87] Y. André, *Quatre descriptions des groupes de galois defférentielles, Séminaire d'algèbre de Paris 86/87*, Lecture Notes in Math. **1296** (1987).

[And89] Y. André, *G-functions and Geometry*, Aspects of Math, vol. E13, Vieweg, Braunschweig/Wiesbaden, 1989.

[Bal87] F. Baldassarri, *Comparaison entre la cohomologie algébrique et la cohomologie p-adique rigide à coefficients dans un module différentiel I.*, Invent. Math. **87** (1987), 83–99.

[Bal88] F. Baldassarri, *Comparaison entre la cohomologie algébrique et la cohomologie p-adique rigide á coefficients dans un module différentiel II. cas des singularités réguliers à plusieures variables*, Math. Ann. **280** (1988), 417–439.

[Chr84] G. Christol, *Un théoreme de transfert pour les disques singuliers réguliers*, Astérisque **119–120** (1984), 151–168.

[CM97] G. Christol and Z. Mebkhout, *Sur le théorèm de l'indice des équations différentielles p-adiques II*, Ann. of Math. **146** (1997), 345–410.

[DGS94] B. Dwork, G. Gerotto, and F.J. Sullivan, *An inroduction to G-functions*, Annals of Mathematics Studies, vol. 133, Princeton University Press, 1994.

[Kat70] N. Katz, *Nilpotent connections and the monodromy theorem: applications of a result of turritin*, Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math. **39** (1970), 355–432.

[Kat72] N. Katz, *Algebraic solutions of differential equations. p-curvature and the Hodge filtration*, Invent. Math. **18** (1972), 1–118.

[Kat82] N. Katz, *A conjecture in the arithmetic theory of differential equations*, Bull. Soc. Math. France **110** (1982), 203–239.

[Ray74] M. Raynaud, *Géométrie analytique rigide d'après Tate, Kiehl,.. table ronde d'analyse non-archimedienne*, Bull. Soc. math. France, Mém. **39–40** (1974), 319–327.

[Rob85] P. Robba, *Indice d'un opérateur defférentiel $p$-adique IV. cas des systèmes. measure de l'irrégularité dans un disque*, Ann. Inst. Fourier **35** (1985), no. 2, 13–55.

[Rot54] K.F. Roth, *Rational approximations to algebraic numbers*, Mathematika **2** (1954), 1–20.

[vdP95] M. van der Put, *Differential equations in characteristic $p$*, Compositio Math. **97** (1995), 227–251.

[GV73] M. Artin, A. Grothendieck, and J.L. Verdier, *Théorie des topos et cohomologie étale des schémas*, SGA 4, Lecture Notes in Math., vol. 269, 270, 305, Springer, Berlin Heidelberg New York, 1972,1973.